

Приведенные расчеты показывают, что при вдуве газа с малым молекулярным весом большое влияние на значение коэффициента вдува  $\gamma_q$  оказывает выбор расчетной формулы для определения теплопроводности смеси. При вдуве с большим молекулярным весом это влияние уменьшается, но все-таки остается существенным. Например, для случая вдува  $J_2$  в воздух  $\gamma_{q1}$ , рассчитанное с использованием (3.1), равно  $-0.34$ , а с использованием (3.4) оно равно  $-0.29$ .

В то же время формула (3.1) для определения вязкости смеси является достаточно точной при нахождении коэффициентов вдува. Так если за расчетную формулу для определения вязкости смеси взять формулу, полученную на основе кинетической теории газов [5], то для случая вдува водорода значение  $\gamma_{q1}$  изменится всего лишь на  $-0.03$ , а для вдува йода соответственно на  $0.006$ .

Результаты данной работы были также применены для сравнения с результатами [2] по определению коэффициента  $\gamma_\beta$ .

Для случая вдува в воздух воздуха  $\gamma_\beta = -0.59$  (в работе [2]  $-0.67$ ), йода  $-0.196$  ( $-0.23$ ), водорода  $-3.3$  ( $-3.7$ ).

Приведенные примеры показывают, что для всех рассчитанных случаев получается занижение приблизительно на 15% по сравнению с данными [2]. Это является следствием зависимости  $\gamma_\beta$  от температурного фактора: в предлагаемой работе  $T_w/T_e = 1$ , а в [2]  $T_w/T_e = 1/3$ .

Сравнение для пластины было проведено только для случая вдува воздуха в воздух. Это связано с недостаточностью точных данных для вдува других газов. При этом оказалось, что для случая автомобильного вдува при числе Маха, равном нулю,  $\gamma_{q1} = -0.753$ ,  $\gamma_{r1} = -0.915$ . Для сравнения можно привести данные, полученные в результате численного расчета в работе [6]:  $\gamma_{q1} = -0.76$ ,  $\gamma_{r1} = -0.913$ .

Поступило 25 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мугалев В. П. Влияние вдувания различных газов на теплообмен вблизи передней критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Анфимов Н. А. Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
3. Анфимов Н. А. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. М.—Л., «Химия», 1966.
5. Гиршфельдер Дж., Кертис У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. Schlichting H., Bussman K. Exakte Lösungen für die laminare — Reibungsschicht min Absaund und Ausbeasen. Schriften d. dt. Acad. d. Luftfahrtforschung, 1949, 1B, Bd. 2.

#### ОБ ОБОБЩЕНИИ РЕЛАКСАЦИОННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КРУКА

Е. М. ШАХОВ (Москва)

Одним из наиболее существенных достижений в теории разреженных газов за последние 20 лет является модель Крука для уравнения Больцмана [1]. Модельное релаксационное уравнение Крука сохраняет все черты кинетического уравнения Больцмана, связанные со свободным движением молекул, и приближенно, средне-статистически, описывает столкновения молекул. Структура столкновительного члена в форме Крука наиболее проста из всех возможных, отвечающих сущности явления. Тщательное и всестороннее исследование модельного релаксационного уравнения [2-4], а также решение ряда задач для него способствовало более глубокому пониманию процессов, происходящих в разреженном газе. Однако количественные результаты, получаемые на основе модельного уравнения Крука, за исключением довольно редких случаев, должны отличаться от соответствующих результатов, основанных на точном решении уравнения Больцмана. По крайней мере, один из источников ошибок очевиден. Состоит он в том, что релаксационное уравнение при переходе к сплошной среде дает число Прандтля, равное единице, в то время как точное значение для одноатомного газа равно  $2/3$ .

В сравнительно недавней работе [5] Холуэй предложил использовать принцип максимальной вероятности для получения модельного кинетического уравнения, из которого следуют при переходе к сплошной среде выражения для тензора напряжений и вектора теплового потока с правильными коэффициентами вязкости и теплопроводности.

Ниже предлагается способ построения последовательности модельных уравнений, обеспечивающих правильное число Прандтля. Способ основан на аппроксимации уравнения Больцмана для псевдомаксвелловских молекул по методу, предложенному автором ранее в работе [6]. Для произвольных молекул каждое аппроксимирующее уравнение можно рассматривать как модельное. Приводится сопоставление результатов с результатами работы [5].

1. Рассмотрим уравнение Больцмана в отсутствие внешних сил

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \nu(f^+ - f) \equiv J(f)$$

$$\nu = \int f_i g \sigma d\xi_i, \quad g = |\xi - \xi_i| \quad f^+ = \frac{J^+}{\nu}, \quad J^+ = \int f' f'_i g \sigma d\sigma d\xi_i \quad (1.1)$$

Здесь  $\nu$  — частота столкновений,  $J^+$  — интеграл обратных столкновений,  $\sigma$  — сечение столкновений; предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением псевдомаксвелловских молекул, т. е. будем считать  $\sigma$  и  $d\sigma$  обратно пропорциональными относительной скорости сталкивающихся молекул. В этом случае частота столкновений от скоростей молекул не зависит. Наряду с уравнением (1.1) будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau}(F^+ - F) \quad (1.2)$$

в котором  $F^+$  предполагается зависящей от тепловых скоростей и некоторой совокупности макроопических параметров; вид этой зависимости определим ниже.

Уравнение (1.2) будем называть уравнением, аппроксимирующим уравнение Больцмана (1.1), если некоторое число первых моментных уравнений точного и аппроксимирующего уравнений совпадает, т. е. если выполнены условия

$$\int \frac{1}{\tau}(F^+ - F)\psi d\xi = \int J(F)\psi d\xi \quad (1.3)$$

или

$$\psi = \psi(\xi) = 1, \xi_i, \xi_i \xi_j, \xi_i \xi_j \xi_k, \dots$$

$$\psi = \psi(c) = 1, c_i, c_i c_j, c_i c_j c_k, \dots \quad c_i = \xi_i - \int \xi_i F d\xi$$

Точнее говоря, уравнение (1.2) будем называть аппроксимирующим уравнением  $n$ -го приближения для уравнения (1.1), если условия (1.3) выполнены для всех  $\psi$ , включающих в себя степенные одночлены  $n$ -го порядка.

Аппроксимирующее уравнение, которое удовлетворяет условиям (1.3) при совокупности  $\psi$ , включающей не все степенные одночлены третьего порядка, а только свернутые вида  $\xi_i \xi_j^2$ , может быть названо аппроксимирующим кинетическим уравнением в приближении тринадцати моментов, так как совокупность макропараметров, входящих в  $F^+$ , определяется первыми тринадцатью моментами функции распределения. Частоту столкновений  $1/\tau$  уравнения (1.2) положим равной частоте столкновений  $\nu$  уравнения (1.1).

Вид функции  $F^+$  как функции скоростей молекул и макропараметров условиями (1.3) не определяется. Исходя из соображения простоты, следуя [6], возьмем  $F^+$  в виде

$$F^+ = F^{(0)} \{a^{(0)} + a_i^{(1)} c_i + a_{ij}^{(2)} c_i c_j + a_{ijk}^{(3)} c_i c_j c_k + \dots\}$$

$$F^{(0)} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} e^{-c^2/2RT}, \quad c^2 = c_i c_i, \quad c_i = \xi_i - u_i \quad (1.4)$$

Здесь  $F^{(0)}$  — локально-максвелловская функция распределения,  $u_i$  — массовая скорость газа. Совокупность коэффициентов  $a(x_i, t)$  определяется уравнениями (1.3).

Если ограничиться конечным числом членов ряда, то будем иметь соответствующую аппроксимацию интеграла обратных столкновений. Рассматривая сразу второе приближение, при котором в  $F^+$  входят все степенные одночлены до второго порядка включительно и обращаясь к системе (1.3) при  $\psi = 1, c_i, c_i c_j$ , получаем,  $a^{(0)} = a_i^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = 0$  в силу выбора  $F^{(0)}$  и т. Таким образом, во втором приближении, когда совпадают с точными моментные уравнения до второго порядка включительно, получаем в качестве аппроксимирующего уравнения для уравнения Больцмана модель Крукса

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau}(F^{(0)} - F) \quad (1.5)$$

В следующем, третьем приближении, ограничимся представлением  $F^+$  по свернутым полиномам Эрмита. Положим

$$F^+ = F^{(0)} \left\{ a^{(0)} + a_i^{(1)} c_i + a_{ij}^{(2)} \left( \frac{c_i c_j}{RT} - \delta_{ij} \right) + a_i^{(3)} c_i \left( \frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) \right\} \quad (1.6)$$

Для определения совокупности  $a(x_i, t)$  воспользуемся также соответствующими ортогональными полиномами. В результате получим

$$a^{(0)} = a_i^{(1)} = a_{ij}^{(2)} = 0, \quad a_i^{(3)} = \frac{1 - \text{Pr}}{5} \frac{S_i}{pRT}, \quad S_i = \int c_i c^2 F d\xi$$

Таким образом, аппроксимирующее уравнение неполного третьего (или 13-моментного) приближения имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau} (F^+ - F), \quad F^+ = F^{(0)} \left[ 1 + \frac{1 - \text{Pr}}{5} \frac{S_i c_i}{pRT} \left( \frac{c^2}{2RT} - \frac{5}{2} \right) \right] \quad (1.7)$$

Из моментных уравнений для этого уравнения при  $\tau \rightarrow 0$  следуют выражения для напряжений и теплового потока с правильными значениями коэффициентов вязкости и теплопроводности.

2. Очевидно, что процесс аппроксимации можно продолжить. Структура получающихся в любом приближении аппроксимирующих уравнений такова, что позволяет построить метод численного решения без запоминания функции распределения.

Будет ли аппроксимация с увеличением числа членов в представлении  $F^+$  приближаться к точному решению уравнения Больцмана, зависит от сходимости ряда (1.4). Условие сходимости в среднем для этого ряда состоит в существовании интеграла

$$\int \frac{[J^+(F)]^2}{F^{(0)}} d\xi$$

Таким образом, вместо ранее предлагавшегося представления для функции распределения в виде ряда по полиномам Эрмита, умноженно на локально-максвелловскую функцию распределения [7, 4], предлагается использовать аналогичное разложение для интеграла обратных столкновений.

Предположение о возможности разложения  $J^+$  представляется естественным с физической точки зрения. В самом деле, интеграл обратных столкновений описывает распределение по скоростям только тех молекул, которые испытали столкновения в данной точке физического пространства, поэтому для его аппроксимации естественно представление с разделенными переменными, т. е. представление по скоростям молекул при фиксированных  $x_i, t$ , причем главный член этого разложения должен быть локально-максвелловской функцией вследствие самого характера процесса. В отличие от  $J^+$  функция распределения содержит значительную составляющую, связанную со свободным движением молекул, т. е. ту составляющую, в которой переменные не разделены, а входят в совокупности. Даже для задачи о релаксации в однородном пространстве представление функции распределения в виде

$$F = F^{(0)} (1 + a_i c_i + a_{ij} c_i c_j + a_{ijk} c_i c_j c_k + \dots) \quad (2.1)$$

не дает истинного поведения функции распределения во времени, так как согласно (2.1) число молекул с малыми скоростями независимо от начальных условий во все время процесса мало отличается от равновесного.

Непрерывность интеграла обратных столкновений позволяет надеяться не только на сходимость в среднем, но и на равномерную и достаточно быструю сходимость (1.4) в конечной области пространства скоростей.

3. Предложенный выше способ получения приближенных кинетических уравнений с частотой столкновений, не зависящей от относительной скорости сталкивающихся молекул, существенно отличается от предложенного в работе [2] в том отношении, что дает возможность уточнить уравнение путем использования моментных соотношений (1.3) все более и более высокого порядка. Если ограничиться моментами второго порядка, то путем подбора частоты столкновений, как в [2], можно также получить приближенное кинетическое уравнение, обеспечивающее правильное число Прандтля. Это уравнение будет совпадать с уравнением работы [2] для условий, достаточно близких к равновесным, т. е. когда эллипсоидальное распределение может быть линеаризовано относительно максвелловского.

Выбор  $F^+$  в виде (1.4), как уже отмечалось, определялся соображениями простоты. Можно было бы, следуя [2], воспользоваться принципом наиболее вероятного распределения, определяя моменты этого распределения через моменты функции рас-

предела из условий (1.3), которые сводятся к системе трансцендентных уравнений. Комбинация принципа наиболее вероятного распределения и моментных соотношений для интеграла столкновений в принципе дает возможность построить последовательность модельных уравнений. В частности, наряду с моментами второго порядка от наиболее вероятного распределения, как предложено в [5], можно было бы ввести в рассмотрение моменты третьего порядка. Это представляется более естественным при обеспечении правильного выражения для теплового потока (момента третьего порядка) и, следовательно, числа Прандтля, чем подбор частоты столкновений. При этом получилось бы в качестве наиболее вероятного опять экспоненциальное распределение, но уже включающее в показателе степенные одночлены третьего порядка. Следовательно, для больших скоростей будем иметь расходимость интегралов, т. е. сталкиваемся с той же трудностью, что и при использовании принципа наиболее вероятного распределения для течений, близких к равновесным [4, 8]. Для преодоления этой трудности необходимо либо всегда ограничиваться старшими моментами четного порядка, либо линеаризовать экспоненту, т. е. брать  $F^+$  в виде (1.4).

4. В заключение рассмотрим вопрос о равновесных решениях приближенных уравнений. К сожалению, строгое доказательство  $H$ -теоремы при  $F^+$  вида (1.4) невозможно, так как  $F^+$ , а следовательно, и  $F$  могут быть отрицательными. Однако можно ожидать, что для большинства случаев коэффициенты разложения (1.4) будут достаточно малы и  $F$  будет отрицательной только в области больших значений скоростей, где сама функция распределения мала.

Рассмотрим случай малых отклонений от равновесия в однородном пространстве и ограничимся анализом уравнения (1.7), наиболее простого из модельных кинетических уравнений, обеспечивающих правильное число Прандтля, при  $Pr = 2/3$ .

Умножая левую и правую часть (1.7) на  $\ln F$  и интегрируя по всему пространству скоростей, получаем после очевидного преобразования правой части

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \int (F - F^+) \ln \frac{F}{F^+} d\xi + \frac{1}{\tau} \int (F^+ - F) \ln F^+ d\xi, \quad H = \int F \ln d\xi \quad (4.1)$$

Учитывая малость  $S_i$ , линеаризуем  $\ln F^+$  относительно  $S_i$ ; кроме того, воспользуемся моментными соотношениями (1.3). Получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \int (F - F^+) \ln \frac{F}{F^+} d\xi - \frac{8}{45} \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{\rho (2RT)^3} \quad (4.2)$$

Согласно (4.2), при достаточно малых отклонениях от равновесия функция Больцмана  $H$  убывает.

При произвольных, не малых отклонениях от равновесия разложение  $\ln F^+$  не справедливо, следовательно, доказательство  $H$ -теоремы затруднено. Однако вопрос о единственности максвелловского распределения при равновесии решается однозначно, если обратиться к моментным условиям (1.3). При равновесии должно быть  $F = F^+$ , поэтому слева в (1.3) будут стоять нули. Следовательно, например, для уравнения (1.7) получим  $S_i = 0$ , т. е. при равновесии максвелловское распределение является единственно возможным.

Поступило 29 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev., 1954, vol. 94, p. 511. (Рус. перев. в сб.: «Проблемы современной физики», М., Изд-во иностр. лит., 1956, т. 2).
2. Krook M. Continuum equations in the dynamics of rarefied gases. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, No. 4, pp. 523—541. (Рус. перев.: в сб.: «Некоторые задачи современной аэродинамики», М., Изд-во иностр. лит., 1961).
3. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
5. Holway L. H. New statistical models in kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9, pp. 1658—1673. (Рус. перев.: «Механика». Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1967, вып. 6).
6. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, вып. 1.
7. Grad H. V. Communications on Pure and Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: «Механика», Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1952, № 4, 5).
8. Коган А. М. Вывод уравнений эрцовского типа и изучение их релаксационных свойств методом максимизации энтропии. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.