

ВТОРИЧНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

В плоском слое жидкости, ограниченном вертикальными параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры, возникает конвективное движение. Если вертикальные размеры слоя велики по сравнению с его толщиной, то в средней части слоя устанавливается плоскопараллельное стационарное течение с кубическим профилем скорости (два встречных конвективных потока) и линейным распределением температуры по сечению. Интенсивность встречных конвективных потоков пропорциональна разности температур между плоскостями. С увеличением этой разности температур стационарное плоскопараллельное движение теряет устойчивость при некотором критическом значении числа Грассхофа, зависящем от длины волны возмущения.

Исследование спектра возмущений и устойчивости стационарного конвективного движения между вертикальными плоскостями проведено (в рамках линейной теории возмущений) в работах [1-4]. В этих работах показано, что кризис стационарного движения наступает при сравнительно небольших значениях разности температур (числа Грассхофа) и обусловлен неустойчивостью течения по отношению к монотонным возмущениям. Последнее обстоятельство дает основание полагать, что в надкритической области в результате нарастания монотонных возмущений устанавливается вторичное стационарное движение конечной амплитуды. Исследование развитого конвективного движения в надкритической области может быть проведено лишь на основе полных нелинейных уравнений конвекции и до сих пор, по-видимому, не производилось.

В данной работе для исследования вторичных движений применен метод конечных разностей. Численные расчеты, проведенные на ЭВМ, позволяют исследовать структуру вторичного конвективного движения в надкритической области.

1. Рассмотрим плоский вертикальный слой жидкости, ограниченный бесконечными плоскостями $x = 0$; $x = d$, между которыми поддерживается постоянная разность температур θ (расположение осей координат указано на (фиг. 1). Уравнения плоского конвективного движения жидкости запишем в безразмерной форме

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{P} \Delta T \quad (1.2)$$

Здесь T — температура жидкости, ψ — функция тока, связанная с компонентами скорости соотношениями

$$v_x = \partial \psi / \partial y, \quad v_y = -\partial \psi / \partial x \quad (1.3)$$

В качестве единиц расстояния, времени, скорости, функции тока и температуры выбраны соответственно величины: d , d^2/ν , ν/d , ν и θ (ν — кинематическая вязкость). В уравнения входят два безразмерных параметра — число Грассхофа и Прандтля:

$$G = g\beta\theta d^3/\nu^2, \quad P = \nu/\chi \quad (1.4)$$

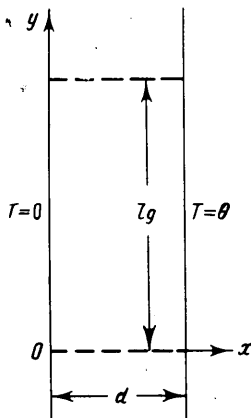
На вертикальных границах слоя скорость жидкости равна нулю и задана температура

$$\begin{aligned} \psi = \partial \psi / \partial x = 0 & \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1 \\ T = 0, \quad T = 1 & \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. Уравнения (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.5) имеют стационарное решение, описывающее плоскопараллельное движение жидкости с линейным поперечным распределением температуры

$$\psi_0 = 1/24 G x^2 (1-x)^2, \quad T_0 = x \quad (2.1)$$

Функция тока ψ_0 определяет замкнутое (с нулевым расходом по сечению) стационарное движение, состоящее из двух встречных потоков. Из (2.1) находится ку-



Фиг. 1

бический профиль скорости этого движения

$$v_0 = -1/12 Gx(1-x)(1-2x) \quad (2.2)$$

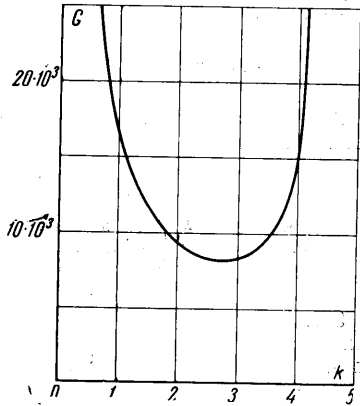
Решение (2.1) формально удовлетворяет уравнениям движения при всех значениях числа Грассхофа G . Однако такое движение реально существует лишь в области малых G , когда оно обладает устойчивостью по отношению к возмущениям.

Граница устойчивости этого течения может быть найдена с помощью линейной теории, основанной на рассмотрении малых возмущений [1-4]. В линейной теории рассматривается возмущенное движение $\psi_0 + \psi'$, $T_0 + T'$, где ψ' и T' — малые нормальные возмущения вида

$$\psi', T' \sim \exp(-\lambda t + iky) \quad (2.3)$$

Здесь k — вещественное волновое число возмущений, а λ — характеристический декремент.

Исследование спектров характеристических возмущений [2-4] показало, что при конечных значениях числа Грассхофа G возможны малые возмущения двух типов: монотонные (им соответствуют вещественные λ) и колебательные (комплексные λ). Оказывается, неустойчивость возникает в результате развития монотонных возмущений. Граница устойчивости в этом случае определяется из условия обращения в нуль вещественного декремента $\lambda = 0$. Это условие определяет нейтральную кривую устойчивости $G(k)$; число Прандтля P будет параметром. На фиг. 2 приведена нейтральная кривая для $P = 1$ по данным работы [4].



Фиг. 2

Ниже нейтральной кривой расположена область устойчивости стационарного конвективного движения относительно малых возмущений. В области выше нейтральной кривой малые возмущения монотонно нарастают. Судьба нарастающих возмущений, а также их предельное состояние (если оно существует) определяются нелинейными уравнениями движения (1.1), (1.2).

3. Для решения нелинейной задачи воспользуемся методом конечных разностей. Область, в которой происходит конвективное движение, имеет бесконечную протяженность вдоль оси y , а граничные условия и коэффициенты уравнений не зависят от y , поэтому можно искать периодические вдоль оси y решения. Таким образом, задача сводится к нахождению численного решения в ограниченной области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq l$ (фиг. 1), где l — безразмерная (в единицах толщины слоя d) длина волны периодического решения.

Введем прямоугольную пространственную сетку с координатами узлов

$$x_i = ih_1; \quad i = 0, 1, 2, \dots, I; \quad h_1 = 1/I$$

$$y_k = kh_2; \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, K+1; \quad h_2 = l/K \quad (3.1)$$

и временную сетку

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1} \quad (3.2)$$

Обозначим значения функций в узлах пространственно-временной сетки следующим образом:

$$f(x_i, y_k, t_n) \equiv f_{i,k}^n \quad (3.3)$$

Запишем уравнения движения (1.1), (1.2) в конечно-разностной форме, используя центральные разности для аппроксимации пространственных производных

$$\Phi_{i,k}^{n+1} = \Phi_{i,k}^n + \left\{ \Delta \Phi_{i,k}^n + \frac{G}{2h_1} (T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n) + \frac{1}{4h_1 h_2} [(\Psi_{i+1,k}^n - \Psi_{i-1,k}^n) \times \right.$$

$$\left. \times (\Phi_{i,k+1}^n - \Phi_{i,k-1}^n) - (\Psi_{i,k+1}^n - \Psi_{i,k-1}^n) (\Phi_{i+1,k}^n - \Phi_{i-1,k}^n) \right\} \tau_n \quad (3.4)$$

¹ В работе [4] приведены лишь значения минимального критического числа Грассхофа. Авторы благодарят Р. Н. Рудакова за предоставление численных данных, необходимых для построения нейтральной кривой. Заметим, что, в отличие от [4], в данной работе числа Грассхофа определены через полную толщину слоя и полную разность температур и поэтому они в 16 раз больше соответствующих значений из [4].

$$T_{i,k}^{n+1} = T_{i,k}^n + \left\{ \frac{1}{P} \Delta T_{i,k}^n + \frac{1}{4h_1 h_2} [(\psi_{i+1,k}^{n+1} - \psi_{i-1,k}^{n+1})(T_{i,k+1}^n - T_{i,k-1}^n) - (\psi_{i,k+1}^{n+1} - \psi_{i,k-1}^{n+1})(T_{i+1,k}^n - T_{i-1,k}^n)] \right\} \tau_n \quad (3.5)$$

$$\Delta \psi_{i,k}^{n+1} = -\varphi_{i,k}^{n+1} \quad (3.6)$$

В этих уравнениях введено обозначение для вихря скорости

$$\varphi = (\text{rot } \mathbf{v})_z = -\Delta \psi \quad (3.7)$$

Оператор Лапласа Δ в конечно-разностной схеме определен формулой

$$\Delta f_{i,k} = \frac{1}{h_1^2} (f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}) + \frac{1}{h_2^2} (f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}) \quad (3.8)$$

Граничные условия на вертикальных границах прямоугольной области $x = 0$; 1 имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{0,k}^n &= \psi_{I,k}^n = 0; & T_{0,k}^n &= 0; & T_{I,k}^n &= 1 \\ \varphi_{0,k}^n &= -\frac{1}{h_1^2} \left(3\psi_{1,k}^n + \frac{h_1^2}{2} \varphi_{1,k}^n \right); & \varphi_{I,k}^n &= -\frac{1}{h_1^2} \left(3\psi_{I-1,k}^n + \frac{h_1^2}{2} \varphi_{I-1,k}^n \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Заметим, что при составлении граничного условия для вихря скорости на твердой границе в разложении функции тока в приграничной точке удерживались члены порядка h_1^3 [3]. Условия периодичности решения вдоль оси y запишем в виде

$$f_{i,k}^n = f_{i,0}^n, \quad f_{i,k+1}^n = f_{i,1}^n \quad (3.10)$$

Здесь f — любая из трех неизвестных функций: ψ , T , φ .

Если значения всех функций на n -м временном слое известны, то по (3.4) найдутся значения $\varphi_{i,k}^{n+1}$ во всех внутренних узлах: $1 \leq i \leq I-1$; $1 \leq k \leq K$. Условие периодичности (3.10) позволяет определить $\varphi_{i,0}^{n+1}$ и $\varphi_{i,K+1}^{n+1}$. Далее методом итераций решается уравнение Пуассона (3.6) и находятся значения $\psi_{i,k}^{n+1}$. Зная $\psi_{i,k}^{n+1}$ и $T_{i,k}^n$, можно по формуле (3.5) найти $T_{i,k}^{n+1}$ для $1 \leq i \leq I-1$; $1 \leq k \leq K$ и затем — по условиям периодичности — $T_{i,0}^{n+1}$ и $T_{i,K+1}^{n+1}$. Новые значения для вихря скорости на твердых границах определяются согласно (3.9). Далее процедура повторяется. Итерирование уравнения Пуассона проводилось по формуле (s — номер итерации)

$$\begin{aligned} \psi_{i,k}^{n,s+1} &= \psi_{i,k}^{n,s} + \omega_0 \left\{ \frac{1}{2(h_1^2 + h_2^2)} [(\psi_{i,k+1}^{n,s} + \psi_{i,k-1}^{n,s}) h_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\psi_{i+1,k}^{n,s} + \psi_{i-1,k}^{n,s}) h_2^2 + h_1^2 h_2^2 \varphi_{i,k}^{n+1}] - \psi_{i,k}^{n,s} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь ω_0 — параметр релаксации [6].

Шаг по времени на каждом этапе определялся, исходя из условия устойчивости счета, по формуле, которую можно получить из анализа устойчивости модельного уравнения [7].

$$\begin{aligned} \tau_n &= \min \left\{ \left[\left(\frac{1}{h_1} \max |\psi_{i+1,k}^n - \psi_{i,k}^n| \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{h_2} \max |\psi_{i,k+1}^n - \psi_{i,k}^n| \right)^2 \right]^{-1}; \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Основные результаты получены на сетке с параметрами: $I = 13$, $K = 24$.

Стационарное решение было получено при фиксированных параметрах G , P и l находилось методом установления. В качестве начального состояния выбиралось обычно линейное вдоль оси x распределение температуры с различными по величине начальными

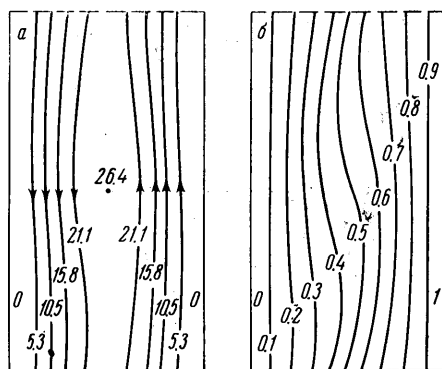
возмущениями вихря в центре области (узел $i = 7, k = 12$). Использовались также и другие формы начальных возмущений. Численные эксперименты показали, что получаемое в результате переходного процесса стационарное состояние не зависит от начальных условий.

4. Обсудим сначала результаты расчетов для фиксированного значения $l = 2$ (длина волны вдвое больше толщины слоя). Этому значению l соответствует безразмерное волновое число $k = \pi$. При $P = 1$ критическое число Грассхофа G_c , определяемое линейной теорией устойчивости, имеет для указанного волнового числа значение $G = 8.2 \cdot 10^3$ (фиг. 2).

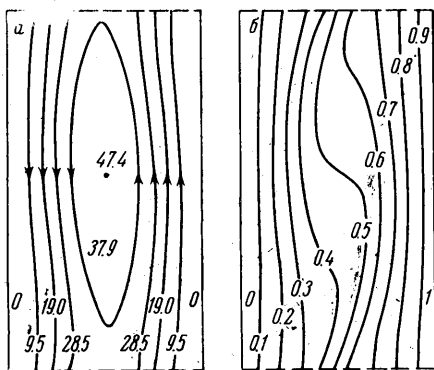
Численные расчеты показали, что при значениях числа Грассхофа, меньших некоторого критического значения G_c , любое начальное возмущение приводит в процессе установления к распределениям функции тока и температуры, соответствующим плоскопараллельному стационарному движению с кубическим профилем скорости (2.1). При значениях $G > G_c$ устанавливается стационарное движение иной структуры: траектории частиц жидкости в этом режиме не параллельны границам слоя, а распределение температуры отличается от линейного. Критическое значение G_c , найденное по данным численного эксперимента, оказывается равным $G_c = 8.8 \cdot 10^3$; способ определения G_c будет указан ниже.

На фиг. 3—5 приведены ¹ линии тока (а) и изотермы (б) для значений числа Грассхофа $G = 10 \cdot 10^3, 20 \cdot 10^3$ и $32 \cdot 10^3$ при значениях $P = 1$ и $l = 2$.

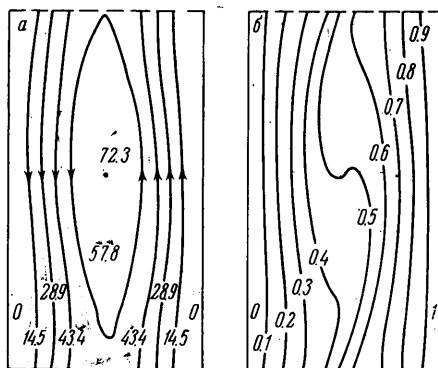
На фиг. 3 относящейся к значению числа Грассхофа, близкому к критическому, видно, что стационарное движение еще незначительно отличается от невозмущенного: поперечные скорости и соответствующие искажения изотерм еще невелики. С повышением числа Грассхофа (фиг. 4 и 5) в результате нелинейного развития вторичного стац-



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

нарного движения возникает течение, заметно отличающееся по форме от невозмущенного плоскопараллельного течения. Хорошо видно развитие сформировавшегося выше критической точки вихря на границе между встречными потоками. В области этого вихря образуется зона пониженного градиента температуры.

На фиг. 6—7 представлены распределения вертикальной скорости и температуры в сечении слоя при $G = 20 \cdot 10^3$ по двум наиболее интересным разрезам. Кривые а соответствуют разрезу, проходящему через центр вихря ($y = 13/12$); кривые б относятся к разрезу $y = 1/12$ на границе соседних вихрей, периодически повторяющихся вдоль вертикальной оси. Для сравнения пунктиром указаны распределения скорости и температуры, соответствующие невозмущенному течению при том же значении числа Грассхофа. Эти распределения построены по формулам (2.1), (2.2) (напомним, что при $G = 20 \cdot 10^3$ течение с кубическим профилем неустойчиво).

¹ Для удобства построения на фиг. 3—5 произведено незначительное сокращение масштаба по вертикали.

Зная поле температуры, можно вычислить полный поперечный тепловой поток через слой на участке длиной ld (на единицу длины вдоль оси z)

$$Q = \kappa \int_0^{ld} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dy \quad (4.1)$$

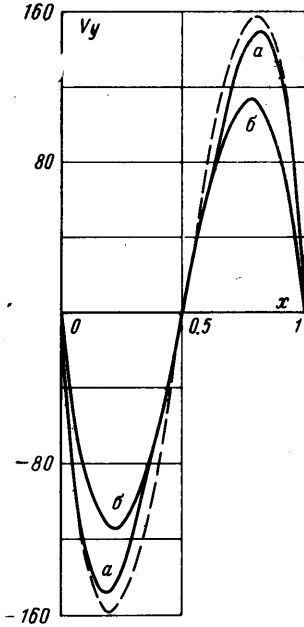
Здесь κ — коэффициент теплопроводности жидкости, и все величины размерные. В невозмущенном движении (2.1) скорость жидкости направлена вдоль изотерм, и потому поперечный тепловой поток Q_0 определяется только молекулярной теплопроводностью

$$Q_0 = \kappa \theta l \quad (4.2)$$

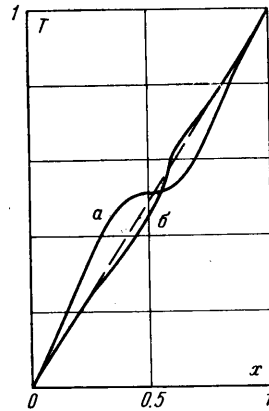
Здесь l по-прежнему безразмерная длина волны.

Определим безразмерный тепловой поток — число Нуссельта N — следующим образом:

$$N = Q / Q_0 \quad (4.3)$$

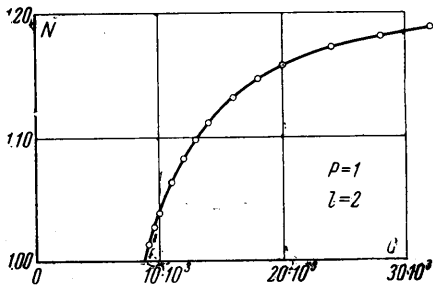


Фиг. 6



Фиг. 7

Тогда, очевидно, в режиме плоскопараллельного движения с кубическим профилем скорости $N = 1$, а отличие N от единицы может служить мерой интенсивности поперечного конвективного переноса тепла, связанного с возникновением вторичного движения.



Фиг. 8

На фиг. 8 представлена зависимость числа Нуссельта N от числа Грассхофа G для $P = 1$ и $l = 2$, построенная по результатам численных экспериментов. При $G < G_c$ реализуется плоскопараллельное течение с чисто теплопроводным поперечным переносом тепла: $N = 1$. Выше критической точки $N > 1$. Экстраполяция зависимости $N(G)$ на $N = 1$ позволяет определить значение критического числа G_c , которое оказывается равным $G_c = (8.8 \pm 0.2) \cdot 10^3$. Это значение примерно на 7% отличается от значения $8.2 \cdot 10^3$, даваемого линейной теорией; отличие, по-видимому, связано с недостаточно мелким шагом используемой пространственной сетки.

Вблизи критической точки зависимость $N(G)$ оказывается линейной

$$N = 1 + 3.3 \cdot 10^{-5} (G - G_c) \quad (4.4)$$

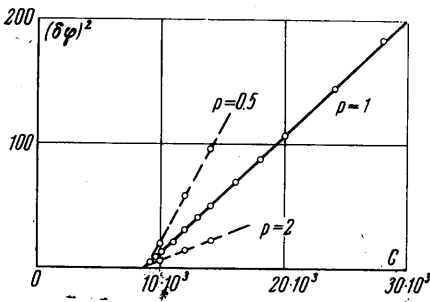
Линейная зависимость $N(G)$ в надкритической области, по-видимому, характерна для вторичных течений, обладающих периодичностью вдоль слоя. Так, в частности, обстоит дело в случае нелинейных движений, возникающих в результате кризиса равновесия в подогреваемом снизу бесконечном горизонтальном слое жидкости

[8, 9]. Иная ситуация имеет место при возникновении конвекции в замкнутой области; эксперимент [10] и численный расчет [11] дают в этом случае корневую зависимость в надкритической области.

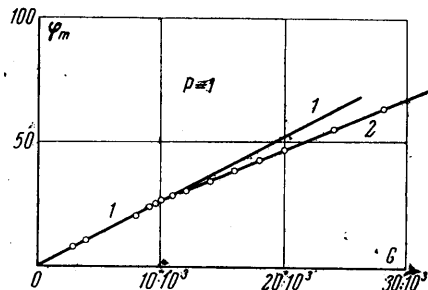
Удобной характеристикой интенсивности вторичного стационарного движения может служить величина $\delta\psi$, определяемая как разность максимального и минимального значений функции тока на осевой линии слоя $x = 1/2$

$$\delta\psi = \max \psi(1/2, y) - \min \psi(1/2, y) \quad (4.5)$$

В случае плоско-параллельного течения функция тока ψ_0 не зависит от y (2.1), и $\delta\psi_0 = 0$. Отличие $\delta\psi$ от нуля связано с изменением рельефа функции ψ , обусловленного возникновением в надкритической области вихрей на границе встречных



Фиг. 9



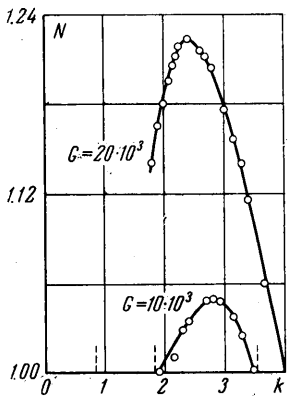
Фиг. 10

потоков. Экстраполяция зависимости $\delta\psi$ от G на нуль позволяет найти критическое значение числа Грассхофа, которое оказывается совпадающим со значением, найденным с помощью зависимости $N(G)$. Интересно, что в надкритической области $\delta\psi$ растет с увеличением G по корневому закону, справедливому во всей обследованной области изменения G , вплоть до $G \approx 4G_c$. Зависимость $(\delta\psi)^2$ от G изображена на фиг. 9 для $l = 2$ и трех значений числа Прандтля: $P = 0.5; 1; 2$. Как видно, с ростом P при фиксированном значении G интенсивность вторичного движения уменьшается. Критические числа G_c для трех указанных значений P близки, что согласуется с результатами линейной теории устойчивости [4].

Представляет интерес также зависимость максимального значения функции тока ψ_m от G . Величина ψ_m , очевидно, дает расход жидкости по сечению одного из встречных потоков на уровне центра вихря. Зависимость $\psi_m(G)$ для $P = 1$ и $l = 2$ представлена на фиг. 10. В подкритической области полученные численные значения ψ_m лежат на прямой $\psi_m = G/384$, что соответствует плоско-параллельному движению (2.1) (прямая 1 на фиг. 10). При высоких G численные значения ψ_m лежат на прямой 2. Таким образом, возникновение вторичного движения приводит к уменьшению расхода через сечение каждого из встречных потоков. Снижение интенсивности продольного течения в надкритической области отчетливо видно также и по распределениям продольной скорости (фиг. 6).

5. Приведенные результаты относились к фиксированному значению длины волны вторичного течения $l = 2$. Для выяснения зависимости характеристик вторичного течения от l были проведены расчеты для двух фиксированных значений числа Грассхофа $G = 10 \cdot 10^3$ и $20 \cdot 10^3$ при различных значениях l и $P = 1$. Из результатов линейной теории (см. нейтральную кривую на фиг. 1) ясно, что при фиксированном значении числа Грассхофа $G > G_m$ область неустойчивости (а следовательно, и область существования вторичных движений) занимает определенный интервал значений волнового числа k .

На фиг. 11 приведена полученная в результате расчетов зависимость безразмерного волнового числа N от волнового числа k для указанных значений G . На этой же фигуре пунктиром указаны предельные значения k , между которыми расположены области неустойчивости, определяемые по нейтральной кривой линейной теории. Из фиг. 11 видно, что за пределами области неустойчивости $N = 1$ (реализуется



Фиг. 11

невозмущенное плоско-параллельное движение). Внутри интервала неустойчивости существуют вторичные стационарные движения, и число Нуссельта имеет максимум при определенном значении волнового числа. Значение k , при котором тепловой поток максимален, не совпадает с критическим волновым числом k_m , соответствующим минимуму на нейтральной кривой (при $P = 1$ минимум достигается в точке $k_m = 1.42$).

В соответствии с эмпирическим принципом Малкуса [12] можно думать, что в надкритической области при заданном G реализуется именно то вторичное течение, которому отвечает максимальный тепловой поток. Из фиг. 11 видно, что с ростом G происходит сдвиг волнового числа «предпочтительного» вторичного движения в сторону меньших k (т. е. в сторону длинных волн).

Интересно отметить, что численные расчеты не позволяют построить всю длинноволновую ветвь функции $N(k)$ при $G = 20 \cdot 10^3$. Именно при $k < 2$ в результате процесса установления формируется движение, содержащее на длине l два периода, хотя начальное возмущение задавалось в виде единственного вихря в центре области. Последнее обстоятельство, по-видимому, свидетельствует о неустойчивости самого длинноволнового вторичного движения при $G = 20 \cdot 10^3$.

Отметим в заключение, что переходный процесс, приводящий к установлению стационарного движения, имеет разный характер в подкритической и надкритической областях. При $G < G_c$ стационарное движение с кубическим профилем скорости достигается со временем в результате аperiodического переходного процесса. При $G > G_c$ вторичное стационарное движение устанавливается через затухающие колебания, частота которых возрастает с ростом числа Грассхофа.

Поступило 12 I 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 10.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О двух типах неустойчивости конвективного движения между параллельными вертикальными плоскостями. Изв. вузов, физика, 1958, № 4.
3. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. Том А., Эйплт К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.—Л., «Энергия», 1964.
6. Russel D. B. On obtaining solutions to the Navier — Stokes equations with automatic digital computers. Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem., 1962, No. 3331.
7. Чудов Л. А., Кускова Т. В. О применении разностных схем к расчету нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. Численные методы в газовой динамике. Сб. работ В. Ц. Моск. ун-та, 1963, № 2.
8. Malkus W., Veronis G. Finite amplitude cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, p. 3.
9. Schneek P., Veronis G. Comparison of some recent experimental and numerical results in Benard convection. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 5.
10. Овчинников А. П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости. ПМТФ, 1967, № 3.
11. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖТ, 1966, № 6.
12. Malkus W. V. R. The heat transport and spectrum of thermal turbulence. Proc. Roy. Soc., 1954, A 225, No. 1161.