

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ ПОСЛЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В. И. ПОЛЕЖАЕВ (Москва)

Исследованию движения и переноса тепла при естественной конвекции жидкости и газа после потери устойчивости равновесия под действием внешних сил посвящен ряд работ [1, 2], выполненных на основе приближенных уравнений. Изучение структуры течения и поля температуры развитой конвекции возможно, по-видимому, лишь путем численного решения нестационарных уравнений Навье — Стокса. Такое исследование, исходя из уравнений несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, начато в работах [3–6].

Здесь приводятся результаты исследования естественной конвекции в замкнутой области, подогреваемой снизу, исходя из нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа с помощью численного метода, развитого в работе [7].

Рассматриваются способы вывода системы из состояния равновесия, развитие начальных возмущений во времени, структура поля течения и температуры для ветвей стационарных решений за порогом устойчивости. Показаны особенности возникновения и развития конвекции в сжимаемом газе. Приводятся некоторые результаты расчета конвекции при промежуточных направлениях внешней силы.

1. Рассматривается течение и перенос тепла при конвекции сжимаемого газа в замкнутой прямоугольной области под действием внешней массовой силы F , направленной под углом θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) к вертикальной оси области (фиг. 1). Боковые поверхности поддерживаются при постоянных по высоте H температурах T_{w_2} и T_{w_1} ($T_{w_2} > T_{w_1}$), верхнее и нижнее основания области теплоизолированы. Газ предполагается совершенным, удельные теплоемкости и число Прандтля — постоянными; вязкость и теплопроводность газа изменяются в зависимости от температуры по закону Сатерленда. Стационарное решение исходной системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа находится в результате установления при $t \rightarrow \infty$ и определяется критериями подобия [7]

$$G, P, H/L, C_{Fx}, C_{Fy}, \kappa, T_{w_2}/T_{w_1}, C^+ \quad (1.1)$$

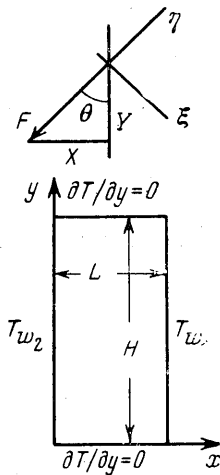
Здесь

$$G = \frac{|F|L^3\rho w_2^2}{\mu w_1^2} \frac{T_{w_2} - T_{w_1}}{T_{w_1}}, \quad P = \frac{\mu w_1 c_p}{k w_1}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad C^+ = \frac{C}{T_{w_1}}, \quad C_F = \frac{|F|L}{a w_1^2}$$

$$C_{Fx} = \frac{XL}{a w_1^2} = C_F \sin \theta, \quad C_{Fy} = \frac{YL}{a w_1^2} = C_F \cos \theta,$$

$$|F| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad a w_1 = \sqrt{\kappa R T_{w_1}}$$



Фиг. 1

Здесь G — число Грассхофа, P — число Прандтля, κ — отношение теплоемкостей; C — константа Сатерленда, T — температура, ρ — плотность, X, Y — проекции внешней силы F на оси x, y — соответственно, μ — коэффициент динамической вязкости, k — коэффициент теплопроводности, c_p, c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно, R — газовая постоянная. Детали разностного метода и численной реализации подобного типа задач даны в работе [7].

Из условий гидростатического равновесия (записанных в безразмерном виде в системе координат η, ξ связанных с внешней силой (фиг. 1)

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = -\kappa C_F, \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad (1.2)$$

следует, что в стационарном тепловом поле неподвижного газа при заданных граничных условиях гидростатическое равновесие возможно лишь в случаях $\theta = 1/2\pi$ и $\theta = 3/2\pi$, когда выполнены необходимые условия равновесия $p = p(\eta)$, $T = T(\eta)$, $\rho = \rho(\eta)$ причем при $\theta = 3/2\pi$ равновесие абсолютно устойчиво (нагретый газ выше холодного), а при $\theta = 1/2\pi$ неустойчиво.

Возникновение конвекции в сжимаемом газе в последнем случае возможно лишь при определенных значениях критерия сжимаемости C_F и отношения температур T_{w_2} / T_{w_1} . Уменьшение плотности в направлении действия силы за счет нагревания стенки компенсируется при больших значениях C_F увеличением плотности под действием внешней силы, и равновесие может быть устойчивым. Оценка необходимого условия возникновения конвекции в предположении, что элемент газа, адиабатически смещенный из состояния равновесия, не вернется обратно, имеет вид [8, 9].

$$|dT/dx| > |F| / C_p$$

или в принятой нормировке

$$T_{w_2} / T_{w_1} > 1 + (\kappa - 1) C_F \quad (1.3)$$

Таким образом, если условие (1.3) выполнено, то существует критическое число Грассхофа, при котором устойчивость теряется, и возникает конвективное движение.

Ниже показано, (п. 4) как в действительности зависит критическое число Грассхофа от критерия сжимаемости C_F . Приводимые далее в п. 2—4 результаты расчетов выполнены при фиксированных значениях

$$T_{w_2} / T_{w_1} = 1.5, \quad \kappa = 1.405 \\ P = 0.71, \quad C^+ = 0.37$$

и различных значениях $G, C_F, H/L, \theta$. В большинстве расчетов использовалась разностная сетка с фиксированным числом узлов 11×11 и шагом по времени $\tau = \min\{h, l\}$ (h, l — шаги сетки по координатам x, y соответственно).

2. Для возбуждения конвективного движения за порогом устойчивости в начальное поле газа нужно внести возмущения, которые имели вид: (а) внезапное приложение внешней силы в неподвижном газе, предварительно находившемся в гидростатическом равновесии при отсутствии внешней силы; (б, в) поворот внешней силы из положения $\theta \neq 1/2\pi$, в котором газ находился в гидродинамическом равновесии, в положение $\theta = 1/2\pi$: (г, д) подогрев или охлаждение нагретой стенки $T_{w_2} = T_{w_2}^0 \pm \Delta T$, где $T_{w_2}^0$ — начальная температура стенки в неподвижном газе при гидростатическом равновесии (1.2); при $T_{w_2}^0 = 1.5, \Delta T = 0.01$.

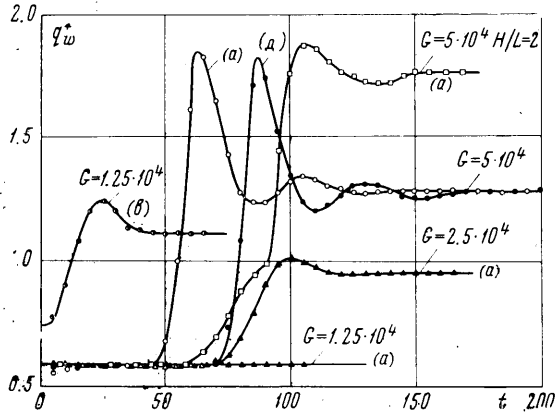
Отметим, что при расчете, исходя из состояния равновесия (1.2) без внесения дополнительных возмущений, конвективное движение за порогом устойчивости возбудить не удается. Это может быть связано как с конечностью пространственного шага сетки (довольно крупного в этих расчетах), так и со значительной длительностью развития возмущений очень малой амплитуды. Кроме того, амплитуда и спектр ошибок округления могут не соответствовать неустойчивым гармоникам.

На фиг. 2 показано изменение во времени среднего потока тепла на нагретой стенке, иллюстрирующее возникновение и развитие возмущений вплоть до установления стационарного состояния. Эти и следующие ниже результаты получены при $H/L = 1, \theta = 1/2\pi$ и $C_F = 0.05$, т. е. в случае, когда выполнено необходимое условие возникновения конвекции в сжимаемом газе (1.3). Масштаб времени равен L/a_w .

На кривой q_w^+ виден начальный (напоминающий вблизи $G = G_*^1$ экспоненциальный) рост возмущений, далее заметно влияние нелинейных членов, приводящее к замедлению роста возмущений, образование характерного максимума q_w^+ и затухание колебаний, приводящее к установлению гидродинамического равновесия.

Время затухания колебаний здесь, как правило, выше, чем в случае подогрева сбоку; движение обладает как бы большими «степенями свободы» ввиду отсутствия стабилизирующего воздействия градиента температуры в направлении, поперечном к направлению силы. Характерно, что во всех случаях развития движения за порогом устойчивости средний поток тепла в некоторый момент времени принимает значение, превышающее его значение на стационарном режиме.

При уменьшении разности $G - G_*$, время начала развития конвективного движения значительно увеличивается. Это существенно отличает конвективные процессы, возникающие после потери устойчивости от конвективных процессов, в которых движение вызывается отсутствием равновесия в поле внешней силы и поэтому быстро устанавливается при уменьшении числа Грассхофа.



Фиг. 2

¹ G_* — критическое число Грассхофа.

Время начала развития конвективного движения за порогом устойчивости увеличивается также при малой амплитуде начального возмущения (ϑ) (фиг. 2), однако, максимальная амплитуда развитого конвективного движения при этом практически не изменяется. На фиг. 2 показано для сопоставления также развитие конвективного движения за порогом устойчивости в случае начального поворота внешней силы из состояния $\theta = \pi/4$.

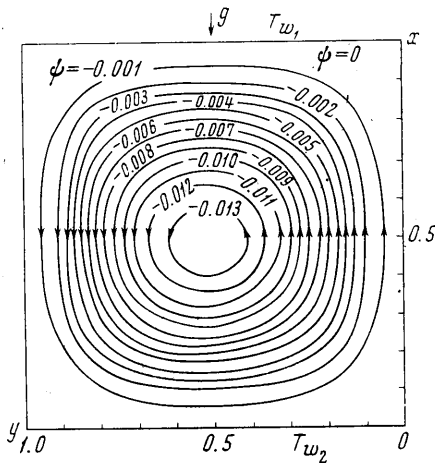
Ввиду указанных особенностей развития начальных возмущений, численное изучение зависимости стационарного конвективного движения от числа Грассхофа оказывается эффективным проводить путем последовательного перехода по числу Грассхофа исходя из стационарного решения, полученного вдали от порога устойчивости.

При одних и тех же критериях подобия (1.1) и граничных условиях стационарное решение зависит от вида начальных возмущений. В случае несимметричных возмущений типа (β , ϵ) на стационарном режиме реализуется конвективное движение с одним вихрем. Существуют два таких движения, различающихся направлением вращения и соответственно местными характеристиками течения и теплообмена, однако, значения средних потоков тепла q_w^+ у них одинаковы. Области притяжения этих двух движений разделяются начальным поворотом внешней силы: (β) — вращение по часовой стрелке и (ϵ) — вращение против часовой стрелки.

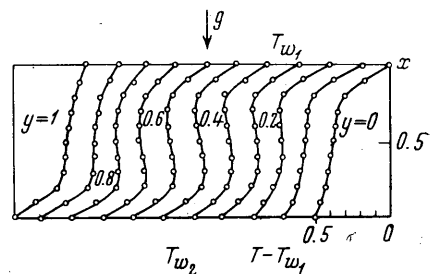
Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Грассхофа для стационарных решений при начальных возмущениях (β , ϵ), (a) и (ϵ , ϑ) показаны на фиг. 3. Здесь

$$N^+ = \frac{q_w^+ L}{k_{w_1}(T_{w_2} - T_{w_1})}, \quad q_w^+ = \frac{L}{H} \int_0^{H/L} k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w dy$$

В отличие от асимптотического развития конвективного движения по числу Грассхофа при подогреве сбоку [7, 8, 10], в случае подогрева снизу конвекция развивается внезапно при $G > G_*$; при увеличении $G - G_*$ происходит довольно быстрая смена режимов теплопроводности и промежуточного режима; в режиме пограничного слоя устанавливается характерная степенная зависимость $N^+ \sim G^n$ с показателем степени $n \approx 0.3$. Картина линий тока и поле температу-



Фиг. 4



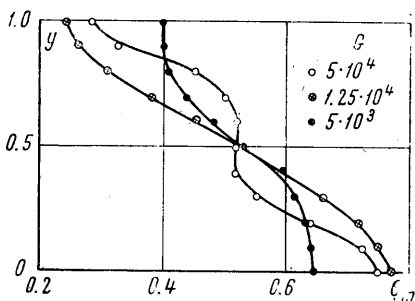
Фиг. 5

ры для ветви (ϵ) при числе $G = 5 \cdot 10^4$ показаны на фиг. 4, 5 соответственно. Развитое конвективное движение приводит к формированию температурного пограничного слоя на нагретой и холодной стенках.

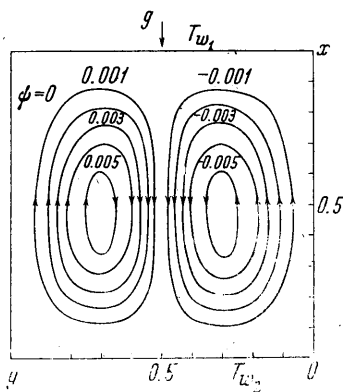
Распределение температуры по оси y при $x = 0.5$ и различных G показано на фиг. 6; здесь $\theta_m = (T_m - T_{w_1}) / (T_{w_2} - T_{w_1})$, где T_m — температура по оси y при $x = 0.5$. Как видно из фиг. 5, 6, в режиме пограничного слоя внутри области выделяется ядро с равномерной температурой в отличие от случая подогрева сбоку [7], когда вдоль оси y формируется вертикальный градиент, который стабилизируется при увеличении G . Зависимость $N^+(GP)$, полученная для ветви (β , ϵ), удовлетворительно согласуется с аналогичной зависимостью, полученной в работе [8], исходя из

уравнений несжимаемой жидкости. Значение $G_1P = 3.3 \cdot 10^3$ для этой ветви оказывается выше значения $G_1P = 2.48 \cdot 10^3$, которое получено в работе [9], что связано с влиянием сжимаемости и переменной теплопроводности и вязкости (в случае, приведенном на фиг. 3, при отсутствии движения среды $N^+ = 1.18$). На характер зависимости $N^+(G)$ существенно будет влиять также вид граничных условий при $y = 0, H/L$. При линейном распределении температуры на этих границах (в отличие от условий теплоизоляции, принятых здесь и в работе [6]), зависимость $N^+(G)$, как следует из работы [5], выходит на постоянное значение.

При симметричных начальных возмущениях типа (а), (з, д) на стационарном



Фиг. 6



Фиг. 7

режиме реализуется конвективное движение с двумя вихрями; существуют два таких движения, различающиеся направлением вращения. При начальных возмущениях (а) и (д) в установившемся движении газ опускается в центре области и поднимается на периферии. На фиг. 7 показана картина линий тока для этого случая при $G = 5 \cdot 10^4$. Стационарные решения с начальными данными (а) и (д) не различаются (фиг. 2). Механизм возбуждения движения в этих случаях связан с распространением гравитационных и температурных волн, увлекающих основное движение в центре области в направлении, совпадающем с направлением действия силы. Структура одномерных волн такого типа рассматривалась в работе [11]. При начальном повышении температуры нагретой стенки (з) возникает волна, перемещающаяся в направлении, обратном направлению действия силы, и на стационарном режиме реализуется движение, в котором газ поднимается в центре области и опускается на периферии. Области притяжения этих двух движений разделены, таким образом, начальными возмущениями, вызывающими подъем или опускание газа в центральной части области. Зависимости $N^+(G)$ и критические значения G (или GP) для ветвей с двумя вихрями сдвинуты в стороны больших чисел G , чем аналогичные значения ветви (б, в) с одним вихрем (фиг. 3), причем ветви (з) и (д) в сжимаемом газе неравноправны. Здесь следует отметить, что из-за погрешности сетки имеется систематическая невязка в потоках тепла на нагретой и холодной стенках, причем для ветвей (з) и (д) эта невязка разного знака, поэтому при эквивалентности ветвей (з) и (а, д) должно бы быть $N_{w_1}^+(з) \approx N_{w_2}^+(а, д)$. Результаты расчетов (фиг. 3) показывают, что значение G_* ветви (з) выше, чем ветви (а, д).

На фиг. 8 показано поле температуры на стационарном режиме для ветви (а, д) при числе $G = 5 \cdot 10^4$. При этом у нагретой и холодной стенок заметно образование температурного пограничного слоя внутри каждой из вихревых ячеек, взаимодействующих через разделяющую линию тока. На нагретой стенке в месте разветвления линий тока местный поток тепла имеет максимум. Распределения местных потоков тепла на нагретой стенке для ветвей (з) и (а, д) при различных числах Грасгофа приведены на фиг. 9.

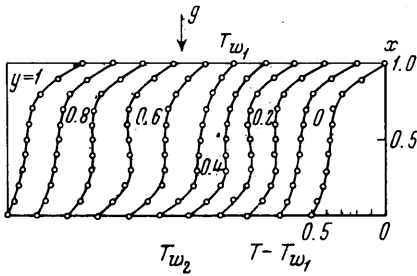
Для случая конвекции несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от температуры, в замкнутой области, подогреваемой снизу, стационарные решения типа (з) и (а, д), как следует из работы [5], оказываются метастабильными и с течением времени, теряя симметрию, переходят в одновихревые решения типа (б, в); устойчивое стационарное решение такого типа выделяется при наложении дополнительных условий симметрии [12]. В приведенных здесь расчетах для сжимаемого газа решения типа (з) и (а, д) были всегда устойчивыми, и симметрия вычисляемых значений скорости, плотности и температуры сохранялась с точностью 8—9 знаков. Кроме того, в специальных расчетах на симметричное решение типа (а, д) накладывалось несимметричное возмущение (внезапный отвод около 0.1 q_w^+ тепла через стенку $y = 0$, которая затем снова становилась теплоизолированной); при этом восстанавливалась прежняя структура течения. В непосредственной близости

сти от порога устойчивости при $G = (1.4-1.5) C_*$ для ветвей (б, в), (а, д) и (з) подтверждается установленная в работах [5, 12, 13] зависимость

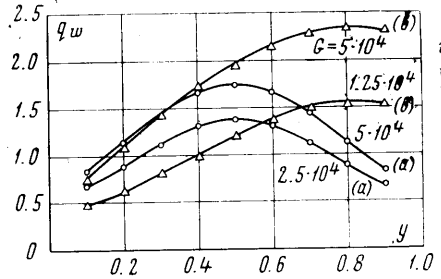
$$(N^+ - 1)^2 = C(GP - (GP)^*) \tag{2.1}$$

Здесь постоянная C и значение $(GP)^*$ характеризуют конкретный случай.

3. При отношении сторон $H/L = 2$ также выделяются два устойчивых стационарных решения, состоящих из одного и двух вихрей. Картины линий тока для этих



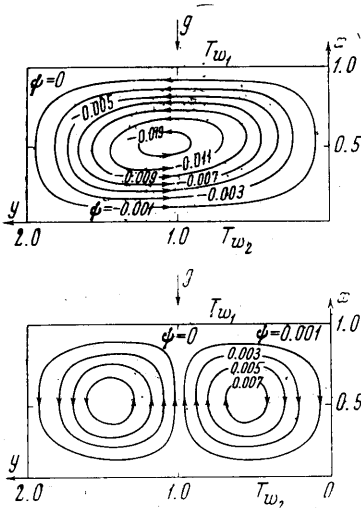
Фиг. 8



Фиг. 9

решений при $G = 5 \cdot 10^4$ показаны на фиг. 10; решение с одним вихрем при $H/L = 2$ получено исходя из начального поля, соответствующего стационарному решению (в) (фиг. 4, 5), а решение с двумя вихрями — исходя из начального поля неподвижного газа, аналогичного (а), но при $H/L = 2$.

Отметим, что в отличие от случая $H/L = 1$ при $H/L = 2$ и 3 на стационарном режиме при начальном возмущении (а) всегда устанавливается симметричное движение, в котором газ поднимается в центре области и опускается на периферии (фиг. 10). Развитие нестационарного процесса в этом случае (фиг. 2), вдали за порогом устойчивости отличается от всех рассмотренных ранее и состоит из двух участков медленного и быстрого роста возмущений с точкой излома, соответствующей перестройке течения и формированию основного движения, в котором газ поднимается в центре области. Как видно из фиг. 3, это движение при $H/L = 1$ имеет критическое число Грассхофа G_2 , меньшее, чем критическое число G_3 для обратного ему движения и при $H/L = 2$ является преобладающим.



Фиг. 10

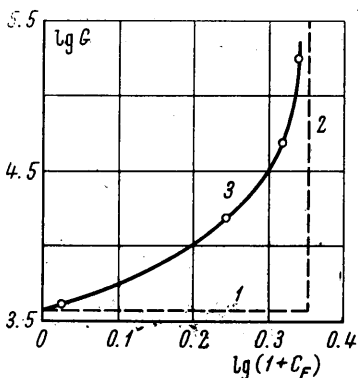
Наконец, при отношении сторон $H/L = 3$ удается выделить стационарные решения с одним, двумя и тремя вихрями, причем в последнем случае в начальное поле неподвижного газа вносилось периодическое возмущение скорости $v(y)$. Вопрос о течении и теплообмене подогреваемого снизу слоя газа при больших отношениях сторон H/L требует, конечно, проведения дополнительных исследований.

4. Влияние критерия сжимаемости C_F на течение и перенос тепла исследовалось для стационарного движения (в) при $H/L = 1$, различных числах Грассхофа и значениях других критериев, соответствующих (1.4); начальными были значения скорости, плотности и температуры при $C_F = 0.05$ для ветви (в). При увеличении C_F плотность в направлении действия силы увеличивается, что компенсирует уменьшение плотности за счет нагревания стенки, поэтому интенсивность циркуляционного движения и переноса тепла уменьшается, в отличие от случая конвекции при боковом подогреве, когда влияние сжимаемости приводит к увеличению передачи тепла от нагретой стенки к холодной [10]. Пересечение зависимостей $N^+(C_F)$ при различных числах Грассхофа со значением N^+ в случае, когда движение среды отсутствует, дает значения критических чисел Грассхофа при различных значениях критерия сжимаемости. Зависимость $G_1(C_F)$ показана на фиг. 11. При $C_F \approx 0$ конвекция возникает при некотором $G > G_1$, что соответствует на фиг. 11 области над пунктирной линией 1. Если рассматривается

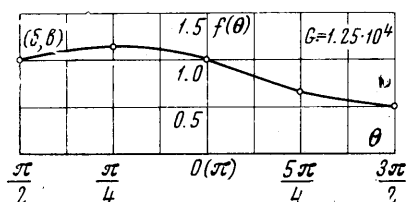
только влияние сжимаемости, а вязкость и теплопроводность газа не учитываются, то граница возникновения конвекции соответствует оценке (1.3) и показана на фиг. 11 вертикальной пунктирной линией 2. Найденная в расчетах действительная граница возникновения конвекции, полученная с учетом как вязкости и теплопроводности, так и сжимаемости газа, показана на фиг. 11 сплошной линией 3. Отсюда видно, что оценка (1.3) справедлива лишь при достаточно больших числах Грассхофа и при $G \approx 5 \cdot 10^5$ является достаточным условием возникновения конвекции для ветки (б, в).

5. В случае $\theta = \pi/2$, когда направление внешней силы совпадает с направлением градиента температуры, гидростатическое равновесие устойчиво, и при всех значениях критериев подобия (1.1) перенос тепла на стационарном режиме осуществляется путем теплопроводности. При направлениях внешней силы $\pi < \theta < 2\pi$, ориентированных в эту сторону, конвективное движение ослабевает, и перенос тепла уменьшается. Наоборот, при направлениях внешней силы, ориентированных в сторону неустойчивого равновесия, движение и перенос тепла интенсифицируются.

Функция $f(\theta) = N^+(\theta) / N^+(0)$, учитывающая зависимость средней теплопередачи от угла поворота внешней силы, показана на фиг. 12. Эта зависимость получе-



Фиг. 11



Фиг. 12

на при $H/L = 1$, $G = 1,25 \cdot 10^4$ и значениях других критериев подобия, соответствующих (1.4). Как следует из фиг. 12, максимальное значение средней теплопередачи имеется при $\theta \approx \pi/4$. Этот результат объясняется взаимным влиянием двух основных типов конвекции — при подогреве снизу и сбоку.

В заключение автор благодарит Т. Д. Пирумову за большую помощь в проведении расчетов.

Поступило 16 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxf., Clarendon Press, 1961.
2. М о н и н А. С., Я г л о м А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. Deardorff W. A. A numerical study of two dimensional parallel plate convection. J. Atmosph. Sci., 1964, vol. 21, No. 4.
4. Fromm J. E. Numerical solution of the nonlinear equations for heated fluid layer. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 10.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Таруни Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, нагреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Samuels M. R., Churchill S. V. Stability of a fluid in rectangular region heated from below. A. I. Ch.Engeneering J., 1967, vol. 13, No. 1.
7. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
9. Сорокин В. С. Об устойчивости неравномерного нагретого газа в поле силы тяжести, ПММ, 1953, т. 17, № 2.
10. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. Тр. III Всес. совещ. по тепло- и массообмену, Минск, 1968, т. 1.
11. Полежаев В. И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
12. Таруни Е. Л. О численном исследовании ветвлений при свободной конвекции в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
13. Овчинников А. П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости. ПМТФ, 1967, № 3.