самом деле как при простом, так и при вращательном ламинарном течении жидкости с умеренными числами R в трубе экспериментально обнаруживается некоторая, хотя и более слабая, чем в турбулентном течении, зависимость $N(R)$. Согласно [13], эту зависимость можно описать формулой (6) с величиной параметра m, равной 0.5.

Ламинарное течение закрученной жидкости по трубе, в отличие от турбулентного, экспериментально изучено недостаточно. Известна лишь одна работа, содержащая результаты измерений гидравлического сопротивления и теплоотдачи в ламинарном вращающемся потоке (в [10] изучалось винтовое движение в трубе вязкого трансформаторного масла с $P \gg 1.0$).

В соответствии с (5) оказалось, что при ламинарном поступательно-вращательном движении гидравлическое сопротивление, как и при одномерном течении, можно описать зависимостью $\xi \sim R^{-1.0}$, но в первом случае коэффициент сопротивления (если его определять по формуле (4)) в $(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)$ раз больше, чем во втором.

В заключение автор благодарит К. И. Щелкина за обсуждение проблемы и замечания.

Поступило 29 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans S. I., Sarjant R. I. Heat transfer and turbulence in gases flowing inside tubes. J. Inst. Fuel, 1951, No. 139.
2. Ибрагимов М. Х., Номофилов Е. В., Субботин В. И. Теплоотдача и гидродинамическое сопротивление при винтовом движении жидкости в трубе. Теплоэнергетика, 1961, № 7.
3. Алимов Р. З. Конвективный массоперенос при испарительном охлаждении сильно нагреваемой поверхности закрученным двухфазным потоком. Инж.-физ. ж., 1967, т. 12, № 5.
4. Ермолин В. К. Интенсификация конвективного теплообмена в трубе в условиях закрученного потока с постоянным по длине шагом. Инж.-физ. ж., 1960, т. 11, № 3.
5. Делягин Г. Н. Конвективный теплообмен в завихренном потоке под давлением. Сб. «Тепло- и массообмен» т. 3. Минск, 1963.
6. Kreith F., Margolis D. Heat Transfer and Friction in Turbulent Vortex Flow. Appl. Sci. Res., Sect. A, 1959, vol. 8, No. 6.
7. Гостинцев Ю. А., Зайцев В. М., Марголин А. Д., Похил П. Ф. О теплоотдаче в трубе с разрушающимися стенками при течении вращающегося газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
8. Мигай В. К. Трение и теплообмен в закрученном потоке внутри трубы. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 5.
9. Смитберг Е., Лэндис Ф. Трение и характеристики теплообмена при вынужденной конвекции в трубах с завихрителями. Теплопередача. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1964, № 1.
10. Зозуля Н. В., Шкуратов Н. Я. Влияние спиральных вставок на теплоотдачу при движении вязкой жидкости внутри трубы. Сб. Теплофизика и теплотехника, Киев, «Наукова думка», 1964.
11. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М., Машгиз, 1962.
12. Koch R. Druckverlust und Wärmeübergang Strömung. VDI — Forschungshetf 469, ser. B, 1958, vol. 24.
13. Михеев М. А. Расчетные формулы конвективного теплообмена. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 5.

ОБ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ, СОВЕРШАЮЩЕЙ НЕМАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

В. И. СТОЛБЕЦОВ, В. М. ФИШКИС

(Москва)

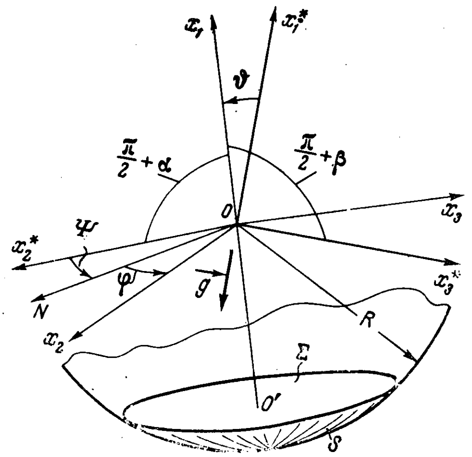
Строится система приближенных нелинейных уравнений, описывающих немалые колебания идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей сферическую полость. Эти уравнения получены для случая, когда полость совершает небольшие гармонические поступательные перемещения с частотой, близкой к частоте колебаний жидкости по основному тону, в направлении, перпендикулярном градиенту поля массовых сил, действующих на жидкость.

1. В данной работе используется дополнительная кинематическая гипотеза, смысл которой заключается в том, что свободная поверхность жидкости в процессе движения последней остается все время плоской.

Как показывает тщательное изучение многочисленных фотоснимков формы свободной поверхности жидкости, колеблющейся на частотах, близких к частоте основного тона ее колебаний, подобная кинематическая гипотеза является верной вплоть до значений амплитуд смещений свободной поверхности жидкости, составляющих 0.3—0.4 от радиуса невозмущенной свободной поверхности жидкости.

В пользу подобной кинематической гипотезы говорит также тот факт, что приближенные значения частот и присоединенных масс жидкости, характеризующих ее колебания на частотах основного тона, полученные на основе использования этой гипотезы, с точностью до 1—3% совпадают с известными точными значениями этих величин [1-3].

Подобная кинематическая гипотеза в конце сороковых годов была использована Г. С. Наримановым для составления приближенных линеаризованных уравнений возмущенного движения тела с жидкостью.



Фиг. 1

Рассмотрим колебания жидкости глубины h, частично заполняющей сферическую полость радиуса R ($h < 2R$). Будем предполагать, что на жидкость действует потенциальное поле массовых сил, имеющее градиент $\mathbf{g}$. Движение жидкости в начальный момент времени будем считать безвихревым. В соответствии с этими допущениями поле абсолютных скоростей частиц жидкости $\mathbf{V}$ будет обладать потенциалом скоростей Φ в любой момент времени [2].

Свяжем с центром сферы систему координат $Ox_1^*x_2^*x_3^*$, в которой

$$\mathbf{g} = -\mathbf{e}_1^* g, \qquad g = \text{const} > 0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{e}_1^*$ — орт оси x_1^*.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, ось x_1 которой совпадает с перпендикуляром OO', опущенным из точки O на плоскость Σ, аппроксимирующую возмущенную свободную поверхность жидкости. В состоянии покоя жидкости системы координат $x_1^*x_2^*x_3^*$ и $x_1x_2x_3$ совпадают (фиг. 1).

В дальнейшем в соответствии с принятым выше допущением будем отождествлять возмущенную свободную поверхность жидкости с плоскостью Σ. Поведение жидкости при принятых предположениях определяется положением жидкого вкладыша, ограниченного смоченной поверхностью полости S и плоскостью Σ.

Из уравнения неразрывности жидкости и очевидных кинематических условий следует:

$$\Delta\Phi = 0 bQ, \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_\Sigma = \mathbf{V}\mathbf{n} = V_n \tag{1.2}$$

Здесь Q — объем, занятый жидкостью; $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхностям $S+\Sigma$; V_n — проекция скорости перемещения элемента поверхности Σ на нормаль к этой поверхности.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости воображаемого тела, ограниченного поверхностями S и Σ. Последнему из условий (1.2) тогда можно придать вид

$$\partial\Phi / \partial n = \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \qquad \text{на } \Sigma \tag{1.3}$$

Здесь ω_k — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат $x_1x_2x_3$, вычисляемые по формулам

$$\omega_2 = \Psi^{\cdot} \sin\vartheta \sin\varphi + \vartheta^{\cdot} \cos\varphi, \qquad \omega_3 = \Psi^{\cdot} \sin\vartheta \cos\varphi - \vartheta^{\cdot} \sin\varphi \tag{1.4}$$

где Ψ, ϑ и φ — эйлеровы углы (угол нутации ϑ образован осями x_1^* и x_1, угол прецессии Ψ образован осью x_2^* и осью узлов ON, лежащей в плоскости $x_2^*x_3^*$, φ — угол чистого вращения).

Будем искать функцию Φ в виде

$$\Phi = \omega_2\varphi_3 - \omega_3\varphi_2 \tag{1.5}$$

где гармонические функции φ_2 и φ_3 удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\right|_S = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}\right|_\Sigma = x_3, \qquad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_\Sigma = x_2 \tag{1.6}$$

Оставляя временно в стороне вопрос о нахождении функций φ_2 и φ_3, вычислим кинетическую энергию жидкости T

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} \Phi(\omega_2 x_3 - x_2\omega_3)\, dS \tag{1.7}$$

(Здесь и в дальнейшем плотность жидкости принята за единицу.)

Используя свойства симметрии полости и вытекающее из этого свойство симметрии функций φ_2 и φ_3 относительно плоскостей x_1x_2 и x_1x_3, выражению (1.7) придадим вид

$$T = \frac{T_0}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2), \qquad T_0 = \int\limits_{\Sigma} \varphi_3 x_3\, dS = \int\limits_{\Sigma} \varphi_2 x_2\, dS \tag{1.8}$$

Выражение для потенциальной энергии жидкости П в поле массовых сил запишем в виде

$$\Pi = Ql_0 g(1 - \cos\vartheta), \qquad l_0 Q = \Omega = \int\limits_{\Sigma} x_3^2\, dS = \int\limits_{\Sigma} x_2^2\, dS \tag{1.9}$$

Здесь l_0 — расстояние от точки O до центра масс жидкости; Q — величина объема, занятого жидкостью.

2. Следуя Майлсу [4], вместо углов Ψ и ϑ будем использовать углы $(^1/_2\pi + \alpha)$ и $(^1/_2\pi + \beta)$, образованные осью x_1 с осями $x_2{}^*$ и $x_3{}^*$ соответственно.

Выражая все величины, входящие в уравнения (1.4), (1.8) и (1.9) через углы α и β, получим

$$T = \frac{T_0}{2}\,\frac{(\alpha^{\cdot}\cos\alpha)^2 + (\beta^{\cdot}\cos\beta)^2 - (\alpha^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta - \beta^{\cdot}\cos\beta\sin\alpha)^2}{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\Pi = \Omega g(1 - \sqrt{1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta}) \tag{2.1}$$

Заметим, что выражения (2.1) совпадают с уравнениями, полученными Майлсом [4], определяющими кинетическую и потенциальную энергию сферического маятника, если соответствующим образом выбрать длину этого маятника l. Ниже будет указан способ выбора этой длины.

В дальнейшем будем считать параметры α и β малыми. Поэтому в разложениях выражений (2.1) по степеням параметров α и β ограничимся членами не выше четвертой степени

$$T = \frac{T_0}{2}(\alpha^{\cdot 2} + \beta^{\cdot 2} + 2\alpha\beta\alpha^{\cdot}\beta^{\cdot}), \qquad \Pi = \frac{\Omega}{2} g\left[\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{2} - \frac{(\alpha^4 + \beta^4)}{12}\right] \tag{2.2}$$

Уравнения Лагранжа, описывающие изменение координат α и β во времени, полученные на основе использования выражений (2.2), имеют вид

$$\begin{gathered}\alpha^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2(\alpha - {}^1/_6\alpha^3 + {}^1/_2\alpha\beta^2) + \alpha\beta^{\cdot 2} + \alpha\beta\beta^{\cdot\cdot} = 0\\ \beta^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2(\beta - {}^1/_6\beta^3 + {}^1/_2\beta\alpha^2) + \beta\alpha^{\cdot 2} + \alpha\beta\alpha^{\cdot\cdot} = 0\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $\Omega_0^2 = \Omega g / T_0$.

Эти уравнения соответствуют случаю свободных колебаний жидкости. В случае, если полость совершает гармонические колебания вдоль оси $x_3{}^*$ по закону $x_3{}^* = x_{03}\cos\nu t$, первое из уравнений (2.3) сохраняет свой вид, а второе приобретает форму

$$\beta^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2\left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\beta\alpha^2}{2}\right) + \beta\alpha^{\cdot 2} + \alpha\beta\alpha^{\cdot\cdot} = \frac{\Omega x_{03}\nu^2}{T_0}\cos\nu t \tag{2.4}$$

Уравнения (2.3), (2.4) описывают вынужденные колебания жидкости при немалых деформациях ее свободной поверхности. Эти уравнения справедливы, если выполняется кинематическая гипотеза, положенная в основу их получения, т. е. до тех пор, пока величины αR и βR не превосходят 30—40% от радиуса свободной поверхности жидкости R_c.

3. Линеаризировав уравнения (2.3), (2.4), получим

$$\beta^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2\beta = \Omega x_{30}\nu^2\cos\nu t / T_0, \qquad \alpha^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2\alpha = 0 \tag{3.1}$$

Известно [2], что при достаточно больших расстройках $\Omega_0^2 - \nu^2$ уравнения (3.1) хорошо описывают малые колебания жидкости, если в качестве Ω_0 в них стоит частота основного тона колебаний жидкости $\varkappa_1$. Изучим связь между величинами Ω_0 и $\varkappa_1$. Для этого введем в рассмотрение последовательность функций χ_k и ψ_k, решающих задачу

$$\Delta\chi_k = 0bQ, \qquad \frac{\partial\chi_k}{\partial n}\bigg|_S = 0, \qquad \frac{\partial\chi_k}{\partial n}\bigg|_\Sigma = \frac{\varkappa_k^2}{g}\chi_k = \psi_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.2}$$

Здесь $\varkappa_k^2$ — квадрат частоты собственных колебаний жидкости по k-ому тону, являющийся собственным числом задачи (3.2) о малых колебаниях жидкости.

Известно, что система функций ψ_k обладает свойством полноты на поверхности Σ, в силу чего имеют место следующие равенства:

$$x_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{N_k^2}\psi_k, \qquad \Omega = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{N_k^2}, \qquad \lambda_k = \int_\Sigma x_3\psi_k\,dS, \qquad N_k^2 = \int_\Sigma \psi_k^2\,dS \tag{3.3}$$

Представляя функцию φ_3 в виде ряда

$$\varphi_3 = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + \ldots \tag{3.4}$$

из условий (1.6) и (3.3) найдем, что

$$d_k = \frac{\lambda_k}{N_k^2} \qquad \varphi_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k\chi_k}{N_k^2} \tag{3.5}$$

Используя полученные равенства, выражению, определяющему Ω_0^2 придадим следующий вид:

$$\Omega_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{N_k^2}\Bigg/\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{N_k^2}\varkappa_k^2 \tag{3.6}$$

Как показано в работе [3], числовые ряды, стоящие в выражении (3.6), являются быстро сходящимися, так что для большинства полостей вращения, встречающихся на практике, первые члены этих рядов составляют по величине 97—99% от величин соответствующих бесконечных сумм.

Оставляя в числителе и знаменателе (3.6) лишь по одному члену, получим равенство

$$\Omega_0^2 \approx \varkappa_1^2 \tag{3.7}$$

которое для сферической полости до глубин $h \leqslant 1.9\,R$ выполняется с точностью [3], не меньшей, чем 1.5%. На основании этого можно утверждать, что со степенью точности, приемлемой при проведении большинства практических расчетов, линеаризованные уравнения (3.1) совпадают с уравнениями, описывающими малые колебания жидкости, полученными на основе использования условия постоянства давления жидкости на ее возмущенной свободной поверхности.

4. Изучим установившиеся вынужденные колебания жидкости в сфере, когда последняя совершает малые гармонические колебания вдоль оси x_3^* по закону

$$x_3^* = x_{30}\cos\nu t, \qquad \nu \approx \Omega_0 \tag{4.1}$$

Как было показано, уравнения, описывающие поведение жидкости в этом случае, имеют вид

$$\begin{gathered}\beta^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2(\beta - {}^1/_6\beta^3 + {}^1/_2\beta\alpha^2) + \alpha\beta\alpha^{\cdot\cdot} + \beta\alpha^{\cdot 2} = \Omega x_{03}\nu^2 T_0^{-1}\cos\nu t\\ \alpha^{\cdot\cdot} + \Omega_0^2(\alpha - {}^1/_6\alpha^3 + {}^1/_2\alpha\beta^2) + \alpha\beta\beta^{\cdot\cdot} + \alpha\beta^{\cdot 2} = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

Уравнения (4.2) описывают, как известно, немалые колебания сферического маятника, если длину его l выбрать из условия равенства частоты Ω_0 и частоты малых плоских колебаний этого маятника $\omega_0 = \sqrt{l / g}$.

Как отмечалось, безразмерная амплитуда смещения полости x_{03} / R считается малой, поэтому величина $\varepsilon = \Omega x_{03} / T_0 \ll 1$ может быть использована в качестве малого параметра в уравнениях (4.2). Используя асимптотический метод Крылова — Боголюбова, периодические решения системы уравнений (4.2) при $\nu \approx \Omega_0$ будем искать в виде

$$\alpha(t) = \alpha_0\cos\nu t + \alpha_0'\sin\nu t, \qquad \beta(t) = \beta_0'\cos\nu t + \beta_0\sin\nu t \tag{4.3}$$

В уравнениях (4.3) опущены высшие гармоники, так как подробный анализ показывает, что относительный вес их в этих уравнениях невелик и не превосходит 1—2%.

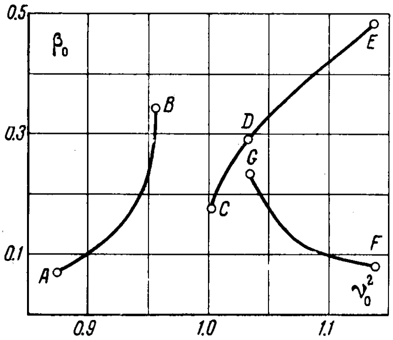
В более общем случае, когда величины α_0, α_0', β_0, β_0' являются медленно изменяющимися функциями времени, при помощи асимптотического метода можно получить четыре дифференциальных уравнения первого порядка относительно этих медленно изменяющихся функций. Полагая в этих уравнениях $\alpha_0^{\cdot}$, $\beta_0^{\cdot}$, $\alpha_0'^{\cdot}$ и $\beta_0'^{\cdot}$ равными нулю, получим систему алгебраических уравнений относительно амплитуд α_0, α_0', β_0, β_0', входящих в уравнения (4.3). Анализ этой системы алгебраических уравнений показывает, что периодические решения вида (4.3) возможны при $\alpha_0' = \beta_0' = 0$. Уравнения (4.3) в этом случае принимают вид

$$\alpha = \alpha_0 \sin \nu t, \qquad \beta = \beta_0 \cos \nu t \tag{4.4}$$

Подставляя выражения (4.4) в уравнения (4.2) и пренебрегая в полученных уравнениях высшими гармониками, получим уравнения

$$\begin{gathered}(\Omega_0^2 - \nu^2)\beta_0 - {}^1/_8\Omega_0^2\beta_0^3 + \\ + {}^1/_8\alpha_0^2\beta_0(\Omega_0^2 + 4\nu^2) = \varepsilon\nu^2 \qquad (4.5) \\ 8(\Omega_0^2 - \nu^2) - \Omega_0^2\alpha_0^2 + \beta_0^2(\Omega_0^2 + 4\nu^2) = 0\end{gathered}$$

определяющие величины амплитуд α_0 и β_0.



Фиг. 2

Известно [4], что возможны два режима колебаний, описываемых уравнениями (4.2), (4.4) и (4.5), первый из которых соответствует «плоским» колебаниям жидкости в полости. Значения α_0 и β_0 определяются в этом случае из уравнений

$$(1 - \nu_0^2)\ \beta_0 - {}^1/_8\beta_0^3 = \varepsilon\nu_0^2, \qquad \alpha_0 = 0, \qquad \nu_0^2\Omega_0^2 = \nu^2 \tag{4.6}$$

Второй режим вынужденных колебаний соответствует одновременному возбуждению параметров α_0 и β_0, которые в этом случае удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(1 - \nu_0^2)\beta_0 + {}^1/_2\nu_0^2\beta_0^3 = \varepsilon\nu_0^2 / 2(1 + 2\nu_0^2) \tag{4.7}$$
$$\alpha_0^2 = 8(1 - \nu_0^2) + (1 + 4\nu_0^2)\beta_0^2$$

Устойчивость периодических решений уравнений (4.2), определяемых уравнениями (4.4), (4.6) и (4.7), была подробно исследована Майлсом [4]. Ниже с учетом полученных в этой работе результатов приводится пример расчета амплитудно-частотных характеристик жидкости, совершающей вынужденные колебания в сфере.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов амплитуд β_0, соответствующие двум рассмотренным режимам вынужденных колебаний жидкости, для значения $\varepsilon = 0{,}01$. Кривые AB и GF соответствуют устойчивым колебаниям в режиме «плоских» колебаний, кривая CDE отвечает одновременному возбуждению параметров α и β.

Весьма важно отметить, что для области частот на оси ν_0^2, заключенной между частотами ν_B^2 и ν_C^2, соответствующими точкам B и C, невозможно построить устойчивых периодических решений типа (4.3), в то время как для частот больших частоты, соответствующей точке G, таких периодических решений можно построить два.

Картина изменения формы свободной поверхности жидкости, полученная на основе использования предложенных в этой работе приближенных нелинейных уравнений, согласуется с картиной, наблюдаемой при проведении соответствующих экспериментальных исследований.

Нелинейные свойства колеблющейся в различных полостях жидкости иногда априорно подменяются нелинейными свойствами, присущими математическим маятникам. В работе [5] показано, что это не всегда справедливо в случае, когда жидкость колеблется в прямом круговом цилиндре. В данной работе показано, что сферическая полость является именно той полостью, для которой маятниковая модель достаточно хорошо описывает свойства жидкости, совершающей немалые колебания.

Поступило 29 III 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1965.
3. Столбецов В. И. Приближенный метод расчета коэффициентов уравнений возмущенного движения тела с жидкостью. ПМ АН УССР, 1967, т. 3, вып. 5.
4. Miles J. W. Stability of forced oscillations of a spherical pendulum. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 20, No. 1, April, 1962.
5. Столбецов В. И. О немалых колебаниях жидкости в прямом круговом цилиндре. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.