

О ТРЕХМЕРНЫХ ВОЛНАХ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН (Москва)

Как известно [1], в пограничном слое развиваются двумерные волны, которые при увеличении числа Рейнольдса R перерождаются в трехмерные волны. Так как Сквайр [2] доказал, что линейное развитие трехмерных волн менее интенсивно, чем развитие двумерных, то, естественно, что поведение трехмерных волн в пограничном слое объясняют [3] нелинейным взаимодействием. Однако Гастер [4] заметил, что хотя обычно рассматривают возмущения, растущие во времени, экспериментально наблюдаются возмущения, растущие по пространству. (Доказательство Сквайра на этот случай не распространяется.) Показано, что пространственно растущими возмущениями нельзя объяснить появление трехмерных волн (в линейной постановке).

Значительные трудности, которые возникают при решении рассматриваемой задачи, хорошо известны и объясняются наличием малого параметра при старшей производной в уравнении Орра — Зоммерфельда. Применяемый метод расчета представляет собой развитие метода, предложенного в работе [5]. Метод интегрирования дифференциальных уравнений, который при этом используется, можно трактовать как модификацию метода Рунге [6].

1. Задача об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое на продольно обтекаемой плоской пластинке сводится к решению задачи на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha_0^2 \varphi'' + \alpha_0^4 \varphi - i\alpha R [(U(y) - c)(\varphi'' - \alpha_0^2 \varphi) - U''(y)\varphi] = 0 \quad (1.1)$$

$$\delta = 5.2\sqrt{\nu x / U_\infty}, \quad \alpha_0^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad c = \gamma / \alpha$$

с однородными граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $U(y)$ — профиль скорости, вычисленный Блазиусом, $R = U_\infty \delta / \nu$ — число Рейнольдса, U_∞ — скорость набегающего потока, ν — коэффициент вязкости. Для определения остальных параметров функция тока возмущения ищется в виде

$$\psi(x, y, z, t) = e^{i(\alpha x - \gamma t + \beta z)} \varphi(y)$$

В дальнейшем будем считать R , γ и β заданными действительными числами, т. е. отыскивать будем комплексное число $a = \alpha + i\alpha_i$.

Уравнение (1.1) имеет четыре фундаментальных решения $\Phi_i(a, R, \gamma, \beta, y)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), из которых два решения Φ_3 и Φ_4 на бесконечности растут, а два убывают. Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, имеет вид

$$\varphi = c_1 \Phi_1 + c_2 \Phi_2 \quad (c_1 c_2 = \text{const})$$

Условия (1.2) приводят к характеристическому уравнению

$$\Phi_1(a, R, \gamma, \beta, 0) (\partial / \partial y) \Phi_2(a, R, \gamma, \beta, 0) - \Phi_2(a, R, \gamma, \beta, 0) (\partial / \partial y) \Phi_1(a, R, \gamma, \beta, 0) = 0 \quad (1.3)$$

Нетрудно видеть, что при $y \geq 1$ четыре фундаментальных решения уравнения (1.1) есть экспоненциальные функции

$$\Phi_1 = e^{-\beta_0 y}, \quad \Phi_2 = e^{-\alpha_0 y}, \quad \Phi_3 = e^{+\alpha_0 y}, \quad \Phi_4 = e^{+\beta_0 y}$$

$$(\beta_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 + i\alpha R(U_\infty - \gamma / \alpha_0), \quad \text{Re}(\beta_0) \geq 0)$$

Для отыскания функции Φ_1 достаточно для уравнения (1.1) решить задачу Коши на отрезке $[0; 1]$ с граничными условиями на правом конце

$$\Phi_1(1) = e^{-\beta_0}, \quad \Phi_1'(1) = -\beta_0 e^{-\beta_0}, \quad \Phi_1''(1) = \beta_0^2 e^{-\beta_0}, \quad \Phi_1'''(1) = -\beta_0^3 e^{-\beta_0} \quad (1.4)$$

Точно так же можно найти функцию $\Phi_2(y)$, учитывая, что

$$\Phi_2(1) = e^{-\alpha_0}, \quad \Phi_2'(1) = -\alpha_0 e^{-\alpha_0}, \quad \Phi_2''(1) = \alpha_0^2 e^{-\alpha_0}, \quad \Phi_2'''(1) = -\alpha_0^3 e^{-\alpha_0} \quad (1.5)$$

Зная Φ_1 и Φ_2 , можно подобрать a так, чтобы выражение $\Phi_1 \Phi_2' - \Phi_1' \Phi_2$ равнялось нулю (при фиксированных R , γ и β), решая, таким образом, задачу (1.1), (1.2).

Главная трудность, которая возникает при численной реализации этого метода, заключается в том, что функция $\Phi_1(y)$ растет при уменьшении y значительно быстрее, чем $\Phi_2(y)$. Это приводит (при достаточно больших числах R) к подавлению функции $\Phi_2(y)$ функцией $\Phi_1(y)$, например, из-за неизбежных ошибок округления.

Кроме того, наличие малого параметра при старшей производной обуславливает достаточно сложное поведение функций $\Phi_1(y)$ и $\Phi_2(y)$. Этим объясняются повышенные требования к точности применяемых разностных схем.

В работе [2] отмечено, что слабый рост функции Φ_2 объясняется, по-видимому, малостью выражения

$$|l(\Phi_2)| \equiv (U - c) (\Phi_2''(y) - \alpha^2 \Phi_2(y) - U''\Phi_2) |$$

В соответствии с этим предлагается на каждом шаге «подправлять» решение Φ_2 при помощи известного решения Φ_1 , так чтобы

$$l(\Phi_2 + c\Phi_1) = 0 \quad \text{при} \quad y = k/n (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.6)$$

Однако на самом деле $l(\Phi_2) \neq 0$ и остается непонятным, почему именно такие исправления должны приводить к цели, так как малые неправильные исправления Φ_2 с помощью Φ_1 при $y = 0$ «испортят» окончательный результат (при $y = 1$).

Весьма существенно и то, что, описываемый в работе [5] подход нельзя применить к более сложным случаям. Например, когда уравнение имеет несколько сильно растущих и заметно отличающихся по степени роста фундаментальных решений.

Как будет показано ниже, условие (1.6) будет правильным, но не единственным и может быть заменено довольно произвольным, например, условием $l(\Phi) \equiv \Phi$. Рассмотрим применяемый алгоритм более подробно.

Отрезок $[0; 1]$ разобьем на n равных частей. Обозначим через $\psi_1(y, \alpha, R, \gamma, \beta)$ решение уравнения (1.1) на отрезке $[(n-1)/n, 1]$, удовлетворяющее начальным условиям (1.4).

Через $\psi_k(y, \alpha, R, \gamma, \beta)$ обозначим решение уравнения (1.1) на отрезке $[(n-k)/n, (n-k+1)/n]$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} \psi_k \left(\frac{n-k+1}{n} \right) &= 0, \quad \psi_k' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) = \psi_{k-1}' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) - c_k \Phi_1' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \\ \psi_k'' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) &= \psi_{k-1}'' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) - c_k \Phi_1'' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \\ \psi_k''' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) &= \psi_{k-1}''' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) - c_k \Phi_1''' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \\ c_k &= \frac{\psi_{k-1}((n-k+1)/n)}{\Phi_1((n-k+1)/n)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Через ψ_k^0 обозначим решение задачи (1.1) с начальными условиями (1.4), полученное некоторым численным методом (т. е. приближенное решение задачи); аналогично через ψ_k^0 — приближенное решение задачи (1.1) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \psi_k^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) &= 0, \quad \left[\psi_k^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]' = \\ &= \left[\psi_{k-1}^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]' - c_k^0 \Phi_1' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \\ \left[\psi_k^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]'' &= \left[\psi_{k-1}^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]'' - \\ &- c_k^0 \Phi_1'' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \left[\psi_k^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]''' = \\ &= \left[\psi_{k-1}^c \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \right]''' - c_k^0 \Phi_1''' \left(\frac{n-k+1}{n} \right) \\ c_k^0 &= \frac{\psi_{k-1}^c((n-k+1)/n)}{\Phi_1((n-k+1)/n)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Допустим, что

$$\alpha_1^0 \left(\frac{n-1}{n} \right) = \psi_1 \left(\frac{n-1}{n} \right) + \varepsilon \Phi_1 \left(\frac{n-1}{n} \right).$$

Тогда,

$$c_1^{\circ} = \frac{-\psi_1((n-1)/n)}{\Phi_1((n-1)/n)} - \varepsilon$$

$$\left[\psi_2^{\circ} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right]' = \psi_1' \left(\frac{n-1}{n} \right) - c_1 \Phi_1 \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$\left[\psi_2^{\circ} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right]'' = \psi_2'' \left(\frac{n-1}{n} \right), \quad \left[\psi_2^{\circ} \left(\frac{n-1}{n} \right) \right]''' = \psi_2''' \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

т. е. начальные условия для ψ_2° совпадают с начальными условиями для ψ_2 .

Аналогично, если $\psi_{k-1}^{\circ} = \psi_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \Phi_1$, то начальные данные для ψ_k° воспроизводятся в том же виде, что и для точного решения. Таким образом, рассматриваемый рекуррентный процесс позволяет подавлять возникающие в процессе счета случайные ошибки, причем самые «опасные» — случайные ошибки, так как вклад остальных фундаментальных решений Φ_3 и Φ_4 в совокупность погрешностей несуществен.

Хотя приведенные рассуждения относятся к случаю $l\Phi \equiv \Phi$, они легко переносятся на более общие случаи. Следует отметить, что выбор оператора $l\varphi$ может иметь решающее значение.

Например, если $\Phi_1 = e^{-100(y-1)}$ и $\Phi_2 = e^{(y-1)}$, то условие $l\Phi \equiv \Phi' = 0$ предпочтительнее условия $l\Phi \equiv \Phi = 0$. В самом деле, если $\Phi_2(0) + c_1 \Phi_1(0) = 0$, то

$$\Phi_2' + c_1 \Phi_1' = -e^{-(y-1)} - 100e^{-100-100(y-1)}$$

и при $y = 0$ производная от Φ_2 по y входит несущественным образом в линейную комбинацию $\Phi_2' + c_1 \Phi_1'$; и наоборот, если $\Phi_2'(0) + c_1 \Phi_1'(0) = 0$, то Φ_2 входит существенным образом в линейную комбинацию $\Phi_2(0) + c_1 \Phi_1(0)$.

Примененный в данной работе метод интегрирования уравнения (1.1) с начальными данными вида (1.4) представляет собой модификацию метода Рунге [8]. Интервал, на котором ищется решение, разбивается на n равных промежутков, на каждом из которых профиль скорости заменяется постоянным

$$U_n = U(k/n), \quad (k-1)/n < y \leq k/n$$

Затем на каждом из интервалов $(k/n, (k+1)/n)$ приближенное решение φ_k представляют в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$\varphi_n = c_1 \operatorname{sh} \alpha \left(y - \frac{k+1}{n} \right) + c_2 \operatorname{ch} \alpha \left(y - \frac{k+1}{n} \right) +$$

$$+ c_3 \operatorname{ch} \beta_k \left(y - \frac{k+1}{n} \right) + c_4 \operatorname{sh} \beta_k \left(y - \frac{k+1}{n} \right)$$

$$\beta_k^2 = \alpha^2 \beta^2 + i\alpha R \left[U \left(\frac{k+1}{n} \right) - \frac{\gamma}{\alpha} \right]$$

Постоянные c_k ($k = 0, 1, 2, 3$) определяют из начальных условий, условий непрерывности решения, его первых двух производных по y и условия непрерывности некоторой функции

$$\mu(y)\mu(y) = \left(U_n \frac{\gamma}{\alpha} \right) \varphi_n' - W_n \varphi_n + \frac{i}{\alpha R} (\varphi_n''' + \alpha^2 \varphi_n')$$

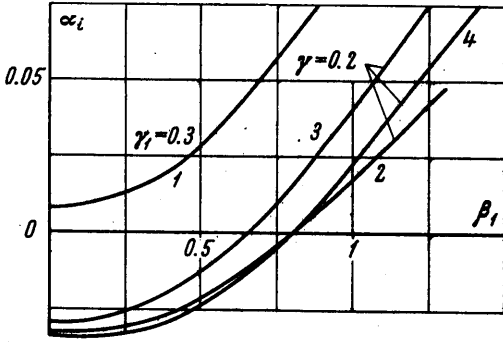
$$W_n = U' \frac{k}{n}, \quad \frac{(k-1)}{n} < y \leq \frac{k}{n} \quad (k = n, n-1, \dots, 1)$$

Последнее условие компенсирует отбрасывание в уравнении (1.1) второй производной от $U(y)$ по y при замене профиля скоростей $U(y)$ кусочно-постоянным.

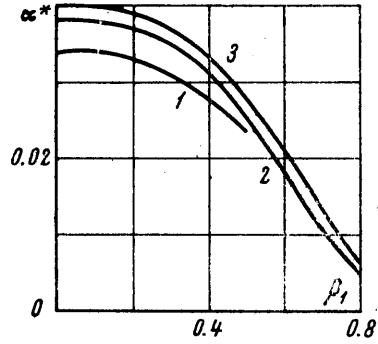
Замечание 1. Процесс подавления сильно растущих решений при вычислении слабо-растущих решений легко распространяется на более общие уравнения.

Например, если дифференциальное уравнение имеет три сильно растущих и заметно отличающихся по степени роста решения Φ_1, Φ_2, Φ_3 , то определение самого быстро растущего решения и ближайшего к нему по степени роста решения Φ_2 проводится по аналогии с предыдущим. Наименее растущее решение Φ_3 на первом шаге интегрирования находится обычным способом из известных начальных данных. На втором шаге ищется функция $\psi_2 = \Phi_3 + a_2 \Phi_1 + b_2 \Phi_2$, на третьем шаге — $\psi_3 = \psi_2 + a_3 \Phi_1 + b_3 \Phi_2$ и т. д. Постоянные a_k и b_k можно определить из условий $\psi_i((i-1)/n) = 0$ и $\psi_i'((i-1)/n) = 0$.

Замечание 2. Выбранный путь интегрирования справа налево, помимо безусловных преимуществ при подавлении сильно растущего решения, дает возможность значительно упростить характеристическое уравнение, так как в характеристическое уравнение теперь не входят третьи производные $\Phi_1'''(y)$ и $\Phi_2'''(y)$, а входят лишь первые производные $\Phi_1'(y)$ и $\Phi_2'(y)$.

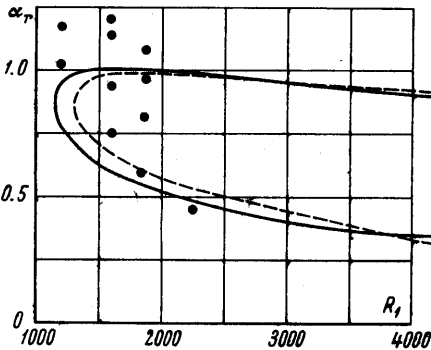


Фиг. 1

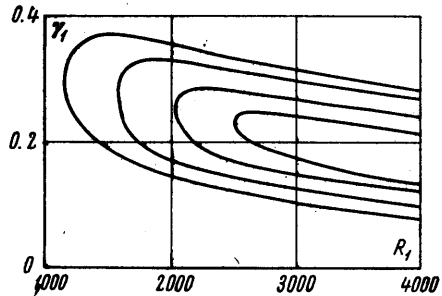


Фиг. 2

Замечание 3. При составлении программы и исследовании свойств уравнения (1.1) удобно выбрать в качестве модельного уравнения уравнение (1.1) с постоянным профилем скорости. При этом, например, выясняется, что при $y = 0$ целесообразно минимизировать выражение $|(\Phi_1\Phi_2' - \Phi_1'\Phi_2) / (\Phi_1\Phi_2)|$, а не $|\Phi_1\Phi_2' - \Phi_1'\Phi_2|$. Это объясняется тем, что выражение $\Phi_1(0)\Phi_2'(0) - \Phi_1'(0)\Phi_2(0)$ имеет вид $e^{\lambda_1 e^{\lambda_2}}(\lambda_1 - \lambda_2)$ и изменение параметра α приводит, главным образом, к изменению произведения $e^{\lambda_1 e^{\lambda_2}}$, а не разности $\lambda_1 - \lambda_2$, хотя интересует именно разность $\lambda_1 - \lambda_2$.



Фиг. 3



Фиг. 4

2. В эксперименте, описанном в статье [1], при помощи вибрирующей ленты задавалась определенная частота возмущений; вследствие чего в потоке наблюдались трехмерные возмущения с определенной длиной волны поперек пластины. Если поведение этих возмущений описывается линеаризованными уравнениями, то следует ожидать [8], что наблюдаемые трехмерные волны нарастают более интенсивно, чем двумерные.

Проведенные расчеты при числе Рейнольдса $R_1 = 4753$ ($R_1 = U_\infty \delta_1 / \nu$, $\delta_1 = 5.0\sqrt{\nu x / U_\infty}$; в дальнейшем за характерный размер принимается величина δ_1) и $\gamma_1 = \gamma \delta_1 / \delta = 0.3$ (данные взяты в соответствии с экспериментом [1]) показали, что в линейной постановке двумерные возмущения более «опасны», чем трехмерные. На фиг. 1 показана полученная зависимость коэффициента нарастания α_i^1 от длины волны возмущений поперек пластины (кривая 1). Был проведен также контрольный просчет при $\gamma_1 = 0.2$, $R_1 = 4753$ ($\alpha_i^2 = \alpha \delta_1 / \delta$). Кривые 2, 3 и 4 (фиг. 1) получены при различных способах разбиения отрезка $[0, 1]$ (соответственно при $n = 25$, $n = 50$ и $n = 100$).

Если в потоке отсутствуют искусственно возбуждаемые возмущения, то среди всевозможных возмущений выделяются возмущения с максимальным коэффициентом

том нарастания [6]. На фиг. 2 показана зависимость $\alpha^* = \min \delta_1 \alpha^1(\gamma_1, \beta_1)$ от $\beta_1 = \beta \delta_1 / \delta$. Кривые 1, 2 и 3 получены, соответственно, при $n = 25$, $n = 50$ и $n = 100$.

Представленные на фиг. 1 и 2 зависимости показывают, что в линейной постановке, по-видимому, остается справедливой теорема Сквайра [2], независимо от того, какие возмущения рассматриваются (растущие во времени или по пространству). Тем самым эти зависимости показывают, что существование трехмерных волн объясняется нелинейным взаимодействием.

В данной заметке построены также нейтральная кривая, связывающая волновое число α_r^1 с числом Рейнольдса R_1 (фиг. 3) и кривые нарастания колебаний в плоскости $\gamma_1 R_1$ (фиг. 4). Представляет интерес сравнение полученных результатов с известными, так как известные результаты, полученные различными авторами при помощи асимптотических методов, весьма различны. Так, например, максимальная частота нейтральных колебаний, полученная А. И. Короткиным [4], почти в три раза выше, чем соответствующая частота, вычисленная Шлихтингом [8], а критическое число Рейнольдса у Цаата [9] примерно в два раза ниже, чем у Шлихтинга [8].

В данной работе значение максимальной безразмерной частоты для нейтральных колебаний $(\gamma_1)_{\max} = \gamma^* \delta_1 / U_\infty$ равно 0.374; критическое число Рейнольдса $R_1^* = 1156$; максимальное безразмерное волновое число $\alpha_{\max}^1 = \alpha^* \delta_1 = 1.02$. Можно отметить также довольно большую длину волн неустойчивых возмущений по сравнению с толщиной пограничного слоя $\lambda_{\min} \approx 6.25 \delta_1$.

Полученное здесь критическое число Рейнольдса ближе всего расположено к числу Рейнольдса, вычисленному Толмином [8] ($R_1^* = 1220$); минимальная длина волны нейтральных колебаний — к результатам Толмина [10] ($\alpha_{\max}^1 = 1.07$), а максимальная частота нейтральных колебаний лучше всего согласуется с выводами Шлихтинга [8] ($\gamma_{\max} = 0.343$). Отметим также, что экспериментальные данные [12], а именно $R_1 = 1160$, $\alpha_{\max}^1 \approx 1.16$, $(\gamma_1)_{\max} \approx 0.51$ довольно хорошо согласуются с приведенными результатами.

При больших числах R_1 совпадение с экспериментом будет более убедительным: например, $R_1 = 4200$ на нейтральной кривой имеем значения $\alpha_1 = 0.9$ и $\alpha_1 = 0.34$, а эксперимент дает $\alpha_1 = 0.93$ и $\alpha_1 \approx 0.43$; причем сравнение с экспериментом при высоких числах R_1 более обосновано, так как при низких числах R_1 производные $d\alpha_i / d\gamma$ и $d\alpha_i / d\alpha_r$ значительно меньше, чем при больших числах R_1 . Из-за чего экспериментальные данные при небольших числах R_1 сильно «размазаны». (На фиг. 3 нанесены эмпирические данные о волновых числах нейтральных возмущений.)

Изображенные зависимости на фиг. 3 и 4 получены при $n = 200$. Для того чтобы получить представление о точности окончательных результатов, были рассчитаны соответствующие зависимости при $n = 25$, $n = 100$ и проверены отдельные результаты при $n = 400$. При этом выяснилось, что полученные зависимости при $n = 100$ и $n = 200$ практически совпадают, а при $n = 25$ отличие весьма незначительно (на фиг. 4 проведена пунктиром нейтральная кривая при $n = 25$). Критические числа Рейнольдса при $n = 25$, 100, 200 и 300 равны соответственно 1300, 1180, 1165 и 1155; максимальные волновые числа — соответственно 0.987, 1.01, 1.03, 1.02, а минимальные частоты — 0.378, 0.36, 0.37, 0.374.

Автор благодарит своего научного руководителя Г. И. Петрова, а также А. А. Зайцева за обсуждение работы.

Поступило 31 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid. Mech, 1962, vol. 12, No. 1.
2. Squire H. B. On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls. Proc. Roy. Soc., 1933, A 142, No. 847, p. 621—628.
3. Benney D. J. Finite-amplitude effects in an unstable laminar boundary layer. Phys. Fluid, 1963, vol. 7, No. 3.
4. Гастер М. Об образовании пространственно растущих волн в пограничном слое. Механика № 3, Период. сб. перев. иностр. статей, 1966.
5. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flow. J. Fluid Mech., 1967, vol. 77, No. 3.
6. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 304.
7. Короткин А. И. Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
9. Zaat J. A. Numerische Beitrage zur Stabilitate der Grenzschichten, Grenzschichtforschung, Symposium, Freiburg, 1957.
10. Tollmien W. Uber die Entstehung der Turbulenz, 1 Mitteilung, Nachr. Ges. Wiss. bottingen, Math. Phys. Klass, 1929.
11. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow, 1947, J. Aeronaut. Sci., vol. 14, No. 2.