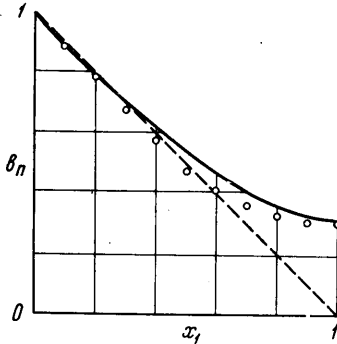


центра трубы. В области падения  $k_n$  ( $x_1 > 0.6$ ) его изменение незначительно по сравнению с предыдущим ростом, и поэтому можно считать, что коэффициент турбулентной вязкости практически постоянен, начиная с  $x_1 > 0.5$ . Как видно из графика, расчетная схема хорошо согласуется с опытными данными.



Фиг. 3

На фиг. 2 представлены профили членов уравнения для энергии турбулентности в трубе: порождения  $\varepsilon$ , диссипации  $T$  и диффузии  $D$

$$\varepsilon = -k_n \left( \frac{dv_n}{dx} \right)^2, \quad T = \frac{b_n^2}{k_n},$$

$$D = -\frac{\beta}{x} \frac{d}{dx} x k \frac{db_n}{dx}$$

Как видно из фигуры, в большей части трубы ( $x_1 < 0.6$ ) основной вклад в баланс энергии турбулентности приходится на долю порождения и диссипации, которые по величине приблизительно оказываются диффузия и диссипация, в то время как порождение уже мало. На фиг. 3 приводится профиль энергии турбулентности.

Удовлетворительное согласование решения задачи с надежными экспериментальными данными позволяет сделать вывод, что примененная модель отражает структуру турбулентного потока в трубе и может применяться при решении аналогичных задач в любом турбулентном пограничном слое.

Поступило 19 X 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1965.
2. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, № 1, 2.
3. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически стратифицированном планетарном пограничном слое. В кн. Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, 1965. Международн. коллоквиум, М., «Наука», 1967.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
5. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow, Natl. Advisory Commpt. Aeronaut., Tech. Rep. 1954, No. 1174.
6. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. N. Y. — Cambridge, Univ. Press, 1956. (рус. перев. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959).
7. Hinze J. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory, N. Y. Mc Graw — Hill, 1959. (рус. перев. Хинце Н. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963).

### К РАСЧЕТУ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА ПЛОХО ОБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Г. ХУДЕНКО

(Москва)

Рассматривается обтекание тела с острыми кромками плоско параллельным потоком реальной жидкости с достаточно большой, однако существенно дозвуковой скоростью (при числах Маха  $M < 0.5$  и числа Рейнольдса  $R > 10^4$ ).

Структура потока в этих условиях определяется возмущением набегающего потенциального потока и турбулентным движением жидкости за кормой обтекаемого тела.

Деформация набегающего потока может быть рассчитана по схеме потенциального течения идеальной жидкости с разрывом скорости на кромках обтекаемого тела [1-4], однако попытки получить характеристики реального следа, ограничиваясь

лишь анализом такой идеализированной схемы [5, 6], т. е. игнорируя турбулентные пограничные слои (Фиг. 1), которые обнаруживаются экспериментом [7-9], не обеспечивая расчет распределения скоростей, давлений и других параметров потока в закормовой области.

Теоретический анализ течения в циркуляционной зоне с учетом турбулентного пограничного слоя получен для потока в канале с уступом [10, 11]. Эти работы не учитывают деформацию потенциального потока, в котором развивается пограничный слой, что не позволяет распространить полученные результаты на обтекание тел в условиях, отличных от рассмотренных.

В основу дальнейших расчетов потенциального течения идеальной жидкости положена схема «с возвратной струей» [1, 2].

Для обтекания пластинки, установленной перпендикулярно неограниченному потоку, расчетные формулы этой схемы предложены в [12]. Результаты расчета линий разрыва скорости (границ «мертвой зоны») для различных значений числа кавитации  $Q$  представлены на Фиг. 2.

Здесь  $Q = (p^0 - p_m) / \rho q^0$ ,  $p^0$  и  $p_m$  — статическое давление в невозмущенном набегающем потоке и в «мертвой зоне»,  $q^0$  — скоростной напор набегающего потока.

Значение  $Q = 0$  соответствует равенству статического давления за пластинкой и в набегающем потоке. При этом схема «с возвратной струей» переходит в схему Гельмгольца — Кирхгофа, при использовании которой для расчета границ «мертвой зоны» могут быть использованы соотношения [13]

$$x = \frac{1}{2 + \sqrt{1/2\pi}} [\sqrt{\varphi} \sqrt{\varphi - 1} + \ln(\sqrt{\varphi} - \sqrt{\varphi - 1})]$$

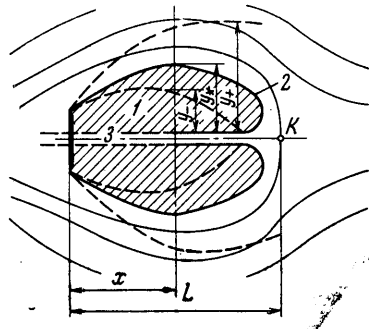
$$y = \frac{2\sqrt{\varphi} + \sqrt{1/2\pi}}{2 + \sqrt{1/2\pi}} \quad (\varphi \geq 1)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал течения в закормовой области пластинки.

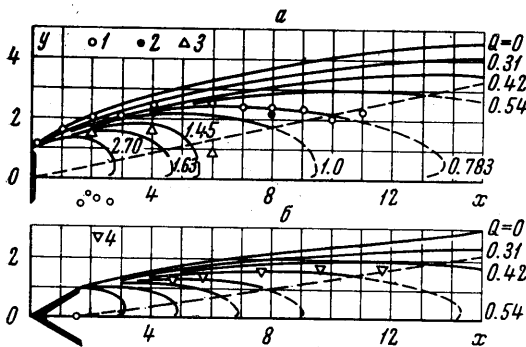
Длиной зоны обратных токов в схеме течения идеальной жидкости считается расстояние  $L$  от пластинки до точки встречи струй на оси потока (точка  $K$  Фиг. 1). По определению это расстояние соответствует значению  $x$  в «физической области» переменного  $z$  [12] при  $z_1 = k$ . Расчетная формула имеет вид

$$L = \text{Am} M \left\{ \ln \frac{1-k}{1+k} \left( \frac{1-ck}{1+ck} \right)^M \right\} + 8 \frac{kc^2}{1-c^4} \left( \frac{1}{k^2 - c^2} + \frac{M^2}{1 - c^2 k^2} \right)$$

Здесь  $A, m, M, k, c$  — функции числа кавитации  $Q$ . Характер функции  $L(Q)$  представлен на Фиг. 3.



Фиг. 1. Развитие пограничного слоя в закормовой области плохо обтекаемого тела: 1 — «мертвая зона», 2 — линия разрыва скорости (граница «мертвой зоны»), 3 — возвратная струя



Фиг. 2. Линии разрыва скорости при обтекании: а — пластинки, б — клина с  $\alpha = 30^\circ$ . Экспериментальные точки: 1 —  $u^\circ = 28$  м/сек,  $H/h = 15$ ; 2 —  $u^\circ = 3,8$  м/сек,  $H = 15$ , 3 —  $u^\circ = 28$  м/сек,  $H/h = 7,5$ , 4 —  $u^\circ = 28$  м/сек,  $H/h = 15$

В практических приложениях значительный интерес представляет турбулентный след за телом  $V$  — образной формы. Характеристики потенциального потока с разрывом скорости в этом случае получаются конформным отображением области переменного  $z$  (для пластинки) на область переменного  $t$  (для клина). При этом вся действительная ось полуплоскости должна отобразиться сама на себя (Фиг. 4).

Для удовлетворения условий однозначности из полуплоскости  $\text{Im} z$  должен быть исключен отрезок  $(0, 0 + i)$ , а из полуплоскости  $\text{Im} t$  — отрезок  $(0, \text{ctg} \alpha + i)$ , т. е. в математическом отношении задача сводится к отображению полуплоскости с разрезом, выброшенным на нее перпендикулярно, на полуплоскость с разрезом, выброшенным под углом  $\alpha$ .

Отображающая функция  $t = t(z)$  получена отображением (фиг. 4) областей  $z$  и  $t$  на полуплоскость  $z_0$ . При этом [14]

$$t = \frac{(\sqrt{z^2 + 1} - 1)^n}{\sin n\pi} \left( 1 + \frac{n}{1-n} \sqrt{z^2 + 1} \right)^{1-n}$$

где в интересных для практики случаях  $n = \alpha/\pi < 1$ .

Для аналитической связи областей  $z$  и  $t$  вводится в рассмотрение функции

$$z_0 = \sqrt{z^2 + 1}, \quad z_1 = z_0 - 1, \quad z_2 = 1 + \frac{n}{1-n} z_0$$

Координаты области  $t$

$$\xi = R_t \cos \Theta_t, \quad \eta = R_t \sin \Theta_t$$

Приводим расчетные зависимости для функций  $R_t(x, y)$  и  $\Theta_t(x, y)$

$$R_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}, \quad \Theta_t = \arctg(y_t/x_t), \quad (j = 0, 1, 2)$$

$$x_0 = \frac{xy}{y_0}, \quad y_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{2}[-(x^2 - y^2 + 1) + \sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2}]}$$

$$x_1 = x_0 - 1, \quad y_1 = y_0, \quad x_2 = 1 + \frac{h}{1-h} y_0, \quad y_2 = \frac{h}{1-h} y_0$$

Результаты расчетов даны на фиг. 2 и 5.

Как показывают расчеты, влияние формы тела на структуру потока существенно, в частности, длина зоны обратных токов при увеличении угла клина  $\alpha$  монотонно увеличивается.

Для реального потока анализ экспериментальных данных [7, 12] свидетельствует о том, что в сечениях, расположенных непосредственно за кормой обтекаемого тела, как и в схеме разрывного течения идеальной жидкости, имеются участки постоянного статического давления. Граница такого участка всегда лежит внутри пограничного слоя и совпадает с линией, на которой осевая составляющая скорости потока  $\bar{u}$  равна среднему арифметическому значению этой составляющей скорости на границах пограничного слоя, т. е. где  $u = u_* = (u_+ + u_-)/2$ . Линия, на которой  $u = u_*$ , характеризуется в дальнейшем координатой  $y_*(x)$ .

В схеме «с возвратной струей» [1, 2], разработанной для анализа кавитационных режимов обте-

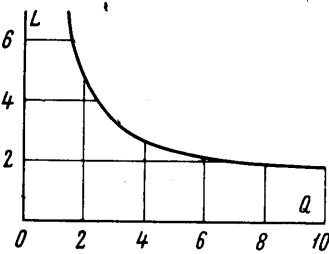
кания, система граничных условий задачи замыкается предположением о том, что статическое давление внутри «мертвой зоны» равно критическому давлению, при котором жидкость начинает испаряться, т. е. заданием числа кавитации  $Q$ .

Рассматривая эту схему как обобщение схемы Гельмгольца — Кирхгофа для произвольного разрежения в «мертвой зоне», необходимо отвлечься от физических свойств реальной жидкости (газа). Тогда давление в «мертвой зоне» становится неопределенным, а решение задачи — неоднозначным.

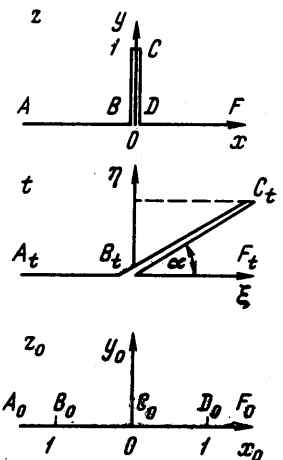
Однозначность решения восстанавливается использованием экспериментального значения коэффициента сопротивления обтекаемого тела  $s_x$ , которое однозначно связано с числом кавитации в схеме «с возвратной струей» [1].

Таким образом линия  $y_*(x)$  пограничного слоя в реальном потоке совпадает с той границей «мертвой зоны» в схеме «с возвратной струей», которая рассчитывается при числе кавитации  $Q$ , соответствующем экспериментальному значению  $s_x$  обтекаемого тела в конкретных условиях течения (форма тела и т. п.).

Распределение скорости в пограничном слое характеризуется функцией  $F = (u_+ - u) / (u_+ - u_-)$ , т. е. координата  $y_*$  соответствует условию  $F = 0.5$ . Положение точки внутри пограничного слоя определяется координатой  $\eta = y - y_- / (y_+ - y_-)$ .



Фиг. 3. Длина зоны обратных токов за пластинкой



Фиг. 4. Конформное преобразование области обтекания пластинки на область обтекания клина

По экспериментальным данным [7, 10] в закормовой области наряду с пограничным слоем имеет место обратное течение с постоянной скоростью (ядро обратного течения). Профиль скорости в пограничном слое универсален  $F = F(\eta)$ . Выводы об отсутствии подобия течения в непосредственной близости от обтекаемого тела [9, 15] связаны с методической неточностью при обработке и анализе экспериментальных данных, поскольку подобие течения исследовалось в этих работах непосредственно по толщине всего следа, а не по толщине пограничного слоя, т. е. принципиальная неоднородность структуры течения в закормовой области при этом не учитывалась.

Толщина пограничного слоя  $\delta = y_+ - y_-$  линейно возрастает при удалении от кромки обтекаемого тела [7, 10]

$$\delta = ax \tag{1}$$

В [10] из решения уравнения движения для турбулентного пограничного слоя с использованием гипотезы о том, что интенсивность нарастания пограничного слоя определяется значениями скорости на его границах, получено теоретическое значение коэффициента  $a$  для случая, когда на границах слоя векторы скорости противоположны по направлению, что соответствует физическим условиям развития пограничного слоя в следе за плохо обтекаемым телом, однако это решение связано с постоянством статического давления в поперечном сечении пограничного слоя:  $p(y) = \text{const}$ , в то время как изменение статического давления на толщине пограничного слоя по экспериментальным данным при обтекании, например, пластинки, превышает величину скоростного напора набегающего потока [7]. Решение уравнения движения для пограничного слоя с изменяющимся по толщине статическим давлением требует учета нормальных составляющих тензора турбулентных напряжений [16, 17], для оценки которых в настоящее время надежных данных нет. Поэтому коэффициент  $a$  необходимо рассматривать пока как эмпирическую константу, сохраняющуюся при изменении формы тела и степени загромождения канала в достаточно широких пределах [7] и вместе с тем существенно отличную по величине от ее теоретического значения, полученного в предположении о постоянстве статического давления [10].

Функция  $F$  в этих условиях достаточно хорошо аппроксимируется выражением  $F = (1 - \eta^{3/2})^2$ . Учитывая, что при расчете скорости по этой формуле справедливо  $y_* - y_- = 0.441 \delta$ , границы слоя определяются как

$$\begin{aligned} y_- &= y_* - 0.441 \delta \\ y_+ &= y_* + 0.559 \delta \end{aligned} \tag{2}$$

Условие сохранения расхода при течения в прямоугольном канале с размерами сечения  $2H \times B$  имеет вид:

$$\int_0^{H-\delta^*} u \, dy = \frac{BH}{B-2\delta^*} u_0 \tag{3}$$

где

$$u = \begin{cases} u_- & \text{при } 0 < y < y_- \\ u_+ - (u_+ - u_-) F & \text{при } y_- < y < y_+ \end{cases}$$

и определяется условиями потенциального течения идеальной жидкости на участке  $y_+ < y < H - \delta^*$ .

Условие (3) при известных  $B$ ,  $H$  и  $\delta^*$  (толщина вытеснения) определяет скорость обратного потока в каждом сечении  $u_-(x)$ .

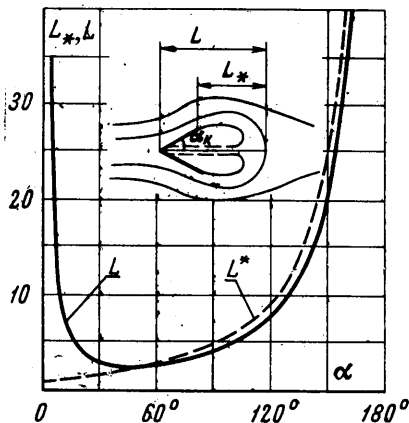
Скорость  $u_+(x)$  определяется как скорость потенциального потока при  $y = y_+$ .

Статическое давление в закормовой области может быть принято в первом приближении постоянным в области  $0 < y < y_*$ , соответствующей «мертвой зоне» в схеме «с возвратной струей». Оно связано с сопротивлением тела соотношением [1]:

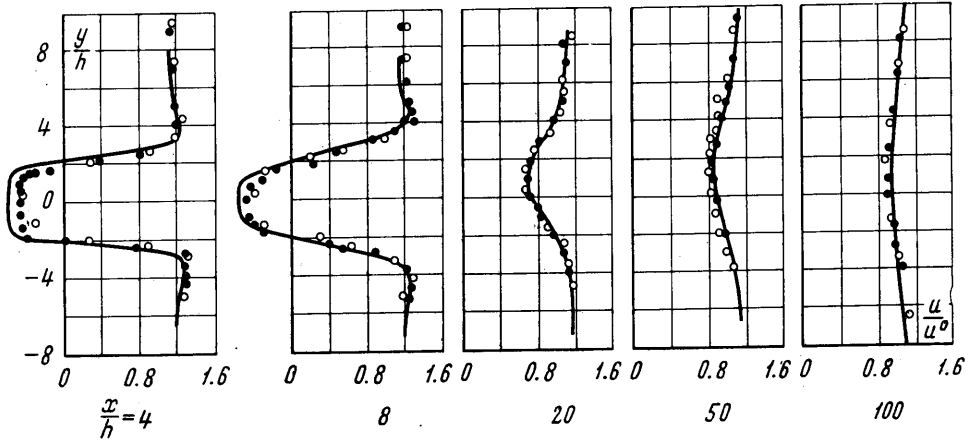
$$c_x = (1 + Q)c_x(0)$$

где  $c_x(0)$  — сопротивление тела в схеме Гельмгольца — Кирхгофа (при  $Q = 0$ ). Для пластинки, установленной перпендикулярно набегающему потоку (формула Рейлея)

$$c_x(0) = \frac{\pi}{2 + 1/2\pi}$$



Фиг. 5. Длина зоны обратных токов за клином,  $Q = 2$

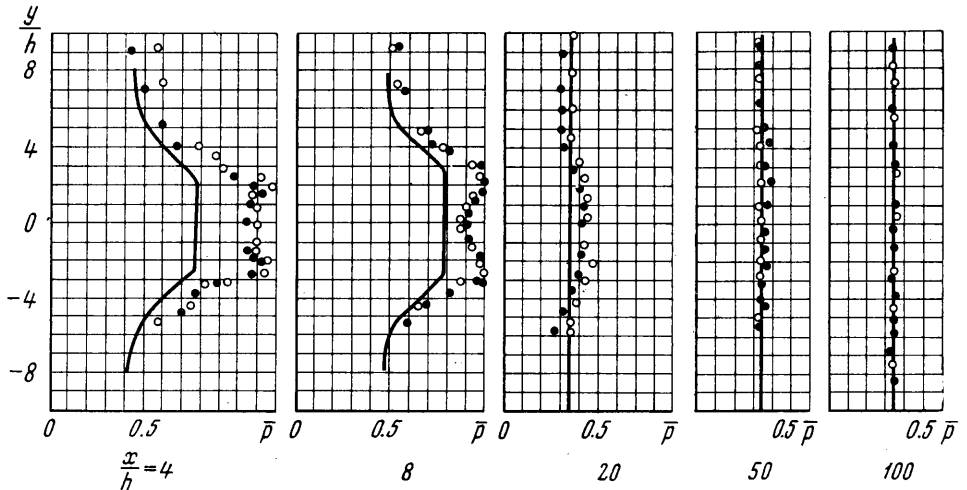


Фиг. 6. Распределение скоростей за пластинкой. Сплошные линии — расчет при  $Q = 0.783$ ,  $a = 0.38$  (для начального участка),  $a = 0.58$  (для основного участка); экспериментальные точки:  $H/h = 15$ ,  $1 - u^\circ = 28$  м/сек,  $2 - u^\circ = 38$  м/сек

При  $y > y_*$  статическое давление определяется условиями течения идеальной жидкости вне «мертвой зоны».

По экспериментальным данным [7] статическое давление, оставаясь примерно постоянным для каждого фиксированного сечения области  $0 < y < y_*$ , вместе с тем изменяется от сечения к сечению. В [12] предложен метод, позволяющий учитывать это продольное изменение давления в «мертвой зоне» изменением величины числа кавитации  $Q$  (расчетного параметра схемы  $c$ ) в различных сечениях закормовой области. Такое усложнение схемы в практических приложениях, по-видимому, не является оправданным.

Для обтекания пластинки, установленной в канале, математически строгое решение задачи получено с использованием принципа наложения [1, 2], однако если размеры пластинки по сравнению с размером канала невелики ( $H/h > 5$ ,  $h$  — полуширина обтекаемого тела),



Фиг. 7. Поля статического давления за пластинкой. Обозначения те же, что и на фиг. 6

влияние канала на границу «мертвой зоны» достаточно точно может быть учтено изменением величины коэффициента сопротивления  $c_x$  или числа кавитации  $Q$ , связанных в этом случае соотношением [1, 2]:

$$c_x = (1 + Q) \cdot c_x^*$$

По данным тех же источников величина  $c_x^*$  остается практически постоянной в широких пределах изменения  $H/h = 5-10^4$  и близка к величине коэффициента сопротивления, определенной по формуле Рейлея, т. е.  $c_x^* \approx c_x(0)$ .

На фиг. 2 сопоставлены результаты расчета линий разрыва скорости по схеме «с возвратной струей» для неограниченного потока с результатами экспериментального определения линий  $y_*(x)$  для пластинок в условиях различного загромождения [7]. Сравнение свидетельствует о независимости расчетного значения числа кавитации  $Q$  идеальной схемы от скорости невозмущенного набегающего потока (постоянство  $c_x$  в этом диапазоне изменения скорости) и об его увеличении при увеличении загромождения канала пластинкой (т. е. при увеличении  $c_x$ , определенного по скорости невозмущенного потока).

Изменение статического давления в потенциальном набегающем потоке в условиях ограниченного канала учитывается достаточно строго при расчете течения по схеме разрывного обтекания пластинки в канале [1, 2], однако такой расчет сложен. Вместе с тем для практических целей оказывается возможным учитывать дополнительное разрежение (по сравнению со схемой обтекания пластинки неограниченным потоком) по суммарному увеличению скорости потенциального потока при уменьшении пластинкой проходного сечения канала [12].

Изложенный расчет относится к области потока в непосредственной близости за обтекаемым телом, к начальному участку следа [7, 10]. Концом этого участка удобно считать сечение, в котором пограничный слой достигает оси потока, т. е. где  $y_- = 0$ . Тогда из (2) следует, что длина начального участка определяется с учетом (1) условием  $y_* = 0.441ax$ . На фиг. 2 пунктирная линия, соответствующая этому условию, ограничивает для каждого значения  $Q$  длину начального участка следа.

Расчет остальной части следа, его основного участка, для обтекания тел в каналах изложен в [18].

На фиг. 6 и 7 приведено сравнение расчета для обоих участков следа с экспериментальными данными при обтекании пластинки в канале. Здесь  $\bar{p} = (p^0 - p) / q^0$  — коэффициент разрежения.

Поступило 30 X 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
3. Лаврентьев М. А. Вариационный метод в крайних задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
5. Бажанова В. В., Силантьев Б. А. Экспериментальная проверка гипотезы постоянного завихренности в зоне отрыва. ПМТФ, 1966, № 1.
6. Силантьев Б. А. Экспериментальное исследование турбулентного обмена на границе зоны отрыва. ПМТФ, 1966, № 5.
7. Абрамович Г. Н., Макаров И. С., Худенко Б. Г. Турбулентный след за плохо обтекаемым телом в ограниченном потоке. Изв. вузов, Авиационная техника, 1961, № 1.
8. Солохин Э. Л. Исследование распространения и стабилизации пламени за корытообразным стабилизатором. Кн.: Стабилизация пламени и развитие процесса сгорания в турбулентном потоке. М., Оборонгиз, 1961.
9. Илизарова Л. И. Структура потока за плохо обтекаемым телом. Сб.: Промышленная аэродинамика, вып. 27, М., «Машиностроение», 1966.
10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
11. Oiknine Claude, Sananes Fabien. Structure de l'écoulement à l'aval d'une paroi en fôgme de marche. C. r. Acad. Sci., 1966, АВТ.262, No. 17.
12. Худенко Б. Г. Использование схемы потенциального потока идеальной жидкости для расчета течения воздуха с зоной обратных токов. Изв. вузов, Авиационная техника, 1961, № 3.
13. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1964.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1951.
15. Уханова Л. Н. Статистические характеристики плоского турбулентного следа на небольшом расстоянии от цилиндра. Сб.: Промышленная аэродинамика, вып. 27, М., Машиностроение, 1966.
16. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
17. Miller D. R., Comings E. W. Static pressure distribution in the free turbulent jet. J. Fluid Mech., 1957, pt. 1, vol. 3.
18. Худенко Б. Г. Расчет основного участка аэродинамического турбулентного следа в закрытом потоке. Инж.-физ. ж., 1960, т. 3, № 12.