

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Лесохин А. Ф., Симонов Л. А. Расчет колеса типа Каплана по выбранному распределению вихрей. М., Оборонгиз, 1939.
3. Лесохин А. Ф. Расчет лопастей рабочих колес осевых турбин. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Энергомашиностроение, 1953, № 5.
4. Валландер С. В. О применении метода особенностей к расчету течений жидкости в радиально-осевых турбинах. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 3.
5. Czibere T. Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen. Ing.-Arch., 1964, bd. 33, hft. 4.
6. Гохман А. М., Рао Е. В. Н. Поле скоростей от особенностей в тонком слое переменной толщины. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 5.
7. Киселев К. А. Профилирование лопастей рабочего колеса радиально-осевой турбины методом особенностей. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем. механ. и астроном., 1958, вып. 1.
8. Hoffmeister M., Ein Beitrag zur Berechnung der incompressiblen reibungsfreien Strömung durch ein unendlich dünnes Schaufelgitter in einem Rotationshohlraum. Maschinenbautechnik, 1961, Bd. 10, No. 8.
9. Мурата Сусума, Кикай-но кэнкю, Science of Machine, 1963, vol. 15, No. 3.
10. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
11. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
12. Крылов В. И., Шувльгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В ТРУБЕ

Б. Г. ВАГЕР, Д. Л. ЛАЙХТМАН

(Ленинград)

Решается задача о турбулентном потоке в прямой круглой трубе. Рассматривается система, состоящая из уравнения движения, уравнения для энергии турбулентности, выражения, связывающего коэффициент турбулентности с масштабом турбулентности и интегральной формулы для определения масштаба турбулентности. Приводится численное решение этой замкнутой системы уравнений турбулентного потока. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим прямую круглую трубу радиуса R . Расположим систему координат таким образом, что ось z будет проходить по оси трубы, а в плоскости, перпендикулярной оси z , введем полярную систему r и φ . Течение будем рассматривать лишь на достаточно больших расстояниях от входа в трубу, так чтобы условия у входа уже не сказывались. Предположим далее, что течение стационарное и полностью турбулентное. В этом случае отличной от нуля будет лишь одна компонента средней скорости $v = v_z(r)$, и все характеристики потока будут зависеть от единственной координаты r , где r — расстояние от оси трубы.

При этих предположениях из системы уравнений Рейнольдса [1] получим только одно уравнение для искомой компоненты $v_z(r)$

$$\frac{d}{dr} rk(r) \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.1)$$

Здесь $k(r)$ — коэффициент турбулентной вязкости, $\partial p / \partial z$ — градиент давления. Уравнение (1.1) можно проинтегрировать. Учитывая, что в силу симметрии $dv/dr = 0$ в центре трубы, после интегрирования получим

$$k \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.2)$$

Следуя А. Н. Колмогорову [2], выразим коэффициент турбулентной вязкости через масштаб турбулентности $l(r)$ и энергию турбулентности $b(r)$

$$k = l\sqrt{b} \quad (1.3)$$

Запишем уравнение для энергии турбулентности в цилиндрических координатах [1]

$$k \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 - c \frac{b^2}{k} + \frac{a_b}{r} \frac{d}{dr} rk \frac{db}{dr} = 0 \quad (1.4)$$

Для определения масштаба турбулентности обычно используется формула Кармана¹

$$l_0(r) = \kappa c^{1/4} \frac{dv/dr}{d^2v/dr^2} \quad (1.5)$$

Для дальнейшего изложения удобно представить (1.5) в виде

$$l_0(r) = \kappa c^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv/dr}{d^2v/dr^2} \delta(r-y) dy$$

где δ — дельта функция.

При пренебрежении диффузионным членом ($a_b = 0$) в уравнении (1.4) формула (1.5) может быть переписана в виде (см., например, [8])

$$l_0 = \kappa c^{1/4} \frac{\psi}{d\psi/dr} \quad \left(\psi = \frac{b}{k} \right) \quad (1.6)$$

Обе эти формулы предполагают, что средний размер вихрей в данной точке определяется характеристиками потока в этой точке. Такая локальная концепция не согласуется с представлением о диффузии вихрей. Кроме того, поскольку в центре трубы $dv/dr = 0$, $d^2v/dr^2 \neq 0$, то масштаб турбулентности и коэффициент турбулентности оказываются тоже равными нулю, что противоречит элементарным физическим соображениям и не согласуется с экспериментальными данными. В действительности масштаб турбулентности определяется не только локальными характеристиками, но и диффузией вихрей из некоторой окрестности вокруг рассматриваемой точки, причем размер области влияния растет с увеличением среднего размера вихрей в данной точке. Это может быть учтено «размазыванием» δ -функции в (1.5). Тогда

$$l(r) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \int_{-R}^R l_0(y) \exp \frac{-(r-y)^2}{\epsilon l_0^2(r)} \frac{du}{\sqrt{\epsilon l_0^2(r)}}, \quad l_0(r) = \kappa c^{1/4} \frac{\psi}{d\psi/dr} \quad (1.7)$$

Здесь ϵ — безразмерная константа, значение которой выбиралось на основании экспериментальных данных, а ось y направлена по радиусу. При $\epsilon = 0$ формула (1.7) совпадает с формулой (1.5). Запишем граничные условия. Очевидно, что

$$v \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow R \quad (1.8)$$

В качестве граничного условия для энергии турбулентности примем

$$b = \frac{R}{2\sqrt{c}} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{при } r \rightarrow R \quad (1.9)$$

Это соотношение вытекает из уравнений (1.4), (1.2). В центре трубы в силу симметрии можно считать, что $db/dr = 0$. Введем безразмерные переменные:

$$v_n = \frac{\kappa}{u_*} v, \quad x = \frac{r}{R}, \quad l_n = \frac{l}{\kappa c^{1/4} R}, \quad k_n = \frac{k}{\kappa R u_*}, \quad b_n = \frac{bc^{1/2}}{u_*^2} \quad (1.10)$$

$$\left(u_*^2 = \frac{\tau}{\rho} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (1.11)$$

Система уравнений (1.2)–(1.4), (1.7) в новых переменных примет вид

$$k_n \frac{dv_n}{dx} = -x \quad (1.12)$$

$$k_n \left(\frac{dv_n}{dx} \right)^2 - \frac{b_n^2}{k_n} + \frac{\beta}{x} \frac{d}{dx} x k_n \frac{db_n}{dx} = 0 \quad (1.13)$$

$$k_n = l_n \sqrt{b_n}, \quad l_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \int_{-1}^1 \frac{l_{0n}(y)}{\sqrt{\epsilon l_{0n}^2(x)}} \exp \frac{-(x-y)^2}{\epsilon l_{0n}^2(x)} dy \quad (1.14)$$

$$\beta = \frac{a_b \kappa^2}{\sqrt{c}}, \quad l_{0n}(x) = \frac{b_n/k_n}{d(b_n/k_n)/dx}$$

¹ Формула (1.5) отличается от обычной записи формулы Кармана множителем $\frac{4}{\sqrt{c}} = \sqrt{0.046}$, так как для k принято $k = l\sqrt{b}$, а не $k = l^2 |dv/dr|$.

Граничные условия

$$b_n|_{x=1} = 1, \quad v_n|_{x=1} = 0, \quad k_n|_{x=1} = 0, \quad \frac{db_n}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (1.15)$$

2. Приведем аналитическое решение задачи без учета диффузии энергии турбулентности. Если масштаб турбулентности определить по (1.5) и положить $\beta = 0$, то система уравнений (1.12)–(1.14) значительно упрощается. Из (1.12), (1.13) видно, что $b_n = x$, а из уравнений (1.12)–(1.14) получим для коэффициента турбулентной вязкости

$$\frac{dk_n}{dx} = \frac{k_n}{x} - \sqrt{x}$$

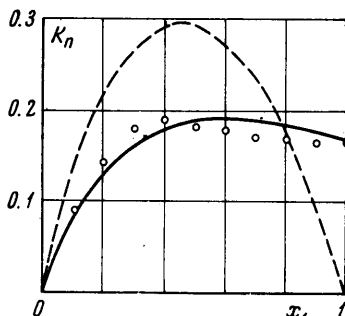
Отсюда

$$k_n = 2x(1 - \sqrt{x}) \quad (2.1)$$

Решая уравнение движения, получим известную формулу для профиля скорости

$$v_n = \ln(1 - \sqrt{x}) + \gamma x \quad (2.2)$$

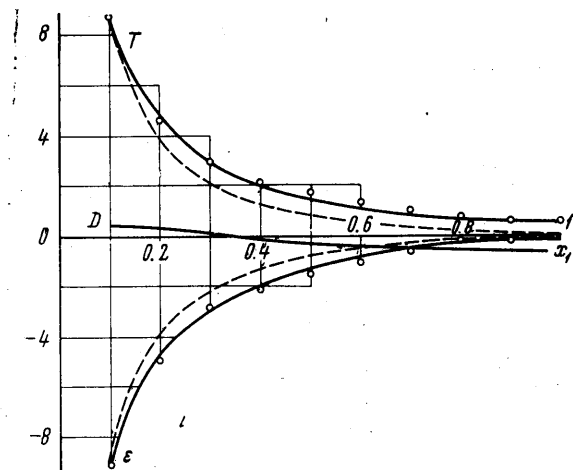
3. Перейдем к решению задачи с использованием интегральной формулы для масштаба турбулентности. В случае учета диффузии турбулентной энергии ($\beta \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$) уже не удастся получить аналитического решения. Нелинейная система (1.12)–(1.14) аппроксимировалась конечными разностями, а полученная система интегрировалась методом последовательных приближений. В качестве функции, относительно которой производились итерации, была выбрана $b_n(x)$. Нелинейный член в уравнении (1.13) записывается в виде $b_j(b_{j-1}/k)$, где j — индекс итерации. Линеаризованное таким образом уравнение (1.13) интегрировалось на каждом шаге методом прогонки [4]. Как показали расчеты, описанный выше метод последовательных приближений сходится довольно быстро. Значение коэффициента β при диффузии турбулентной энергии выбиралось в соответствии с известными данными [5], равным 0.54 (l^2), а значение параметра $\varepsilon = 1$.



Фиг. 1

4. Перейдем к анализу полученных результатов. К настоящему времени опубликовано много результатов измерений скорости и характеристик турбулентности в трубе. Подробное изложение, качественный анализ и обширная библиография по этому вопросу имеются в монографиях [1, 6, 7].

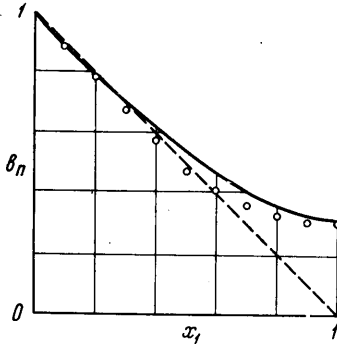
Наиболее надежные и полные измерения характеристик турбулентности в трубе были произведены Лауфером [5]. Именно поэтому для проверки полученных теоретических кривых использовались результаты вычислений работы [5]. На фиг. 1–3 сплошными линиями нанесены результаты, пунктиром — аналитическое решение ($\beta = 0$, $\varepsilon = 0$), а точки соответствуют экспериментальным данным Лауфера. По оси абсцисс отложена величина $x_1 = 1 - x$.



Фиг. 2

Рассмотрим профиль коэффициента турбулентной вязкости (фиг. 1). В области, близкой к стенке ($x_1 < 0.2$), коэффициент турбулентной вязкости линейно возрастает с увеличением $x_1 = 1 - x$. Этот закон изменения коэффициента турбулентной вязкости в пристеночной области соответствует логарифмическому профилю скорости и подтвержден многочисленными экспериментами. В этой области из-за малости $l_0 n$ диффузионные эффекты малы, в связи с чем обычно используемое предположение $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$, на котором основаны формулы (2.1)–(2.2), удовлетворительно согласуется с экспериментом. Резкое расхождение «бездиффузионного решения» наблюдается в центральной области ($x_1 > 0.3$). Максимум коэффициента достигается в диапазоне ($0.4 < x_1 < 0.6$), а затем он несколько убывает вплоть до

центра трубы. В области падения k_n ($x_1 > 0.6$) его изменение незначительно по сравнению с предыдущим ростом, и поэтому можно считать, что коэффициент турбулентной вязкости практически постоянен, начиная с $x_1 > 0.5$. Как видно из графика, расчетная схема хорошо согласуется с опытными данными.



Фиг. 3

На фиг. 2 представлены профили членов уравнения для энергии турбулентности в трубе: порождения ε , диссипации T и диффузии D

$$\varepsilon = -k_n \left(\frac{dv_n}{dx} \right)^2, \quad T = \frac{b_n^2}{k_n},$$

$$D = -\frac{\beta}{x} \frac{d}{dx} x k \frac{db_n}{dx}$$

Как видно из фигуры, в большей части трубы ($x_1 < 0.6$) основной вклад в баланс энергии турбулентности приходится на долю порождения и диссипации, которые по величине приблизительно оказываются диффузия и диссипация, в то время как порождение уже мало. На фиг. 3 приводится профиль энергии турбулентности.

Удовлетворительное согласование решения задачи с надежными экспериментальными данными позволяет сделать вывод, что примененная модель отражает структуру турбулентного потока в трубе и может применяться при решении аналогичных задач в любом турбулентном пограничном слое.

Поступило 19 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1965.
2. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, сер. физ., 1942, № 1, 2.
3. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически стратифицированном планетарном пограничном слое. В кн. Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн, 1965. Международн. коллоквиум, М., «Наука», 1967.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
5. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow, Natl. Advisory Commpt. Aeronaut., Tech. Rep. 1954, No. 1174.
6. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. N. Y. — Cambridge, Univ. Press, 1956. (рус. перев. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959).
7. Hinze J. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory, N. Y. Mc Graw — Hill, 1959. (рус. перев. Хинце Н. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963).

К РАСЧЕТУ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА ЗА ПЛОХО ОБТЕКАЕМЫМ ТЕЛОМ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. Г. ХУДЕНКО

(Москва)

Рассматривается обтекание тела с острыми кромками плоско параллельным потоком реальной жидкости с достаточно большой, однако существенно дозвуковой скоростью (при числах Маха $M < 0.5$ и числа Рейнольдса $R > 10^4$).

Структура потока в этих условиях определяется возмущением набегающего потенциального потока и турбулентным движением жидкости за кормой обтекаемого тела.

Деформация набегающего потока может быть рассчитана по схеме потенциального течения идеальной жидкости с разрывом скорости на кромках обтекаемого тела [1-4], однако попытки получить характеристики реального следа, ограничиваясь