

частицами и т. д., а с другой стороны, приводит к появлению дополнительного турбулентного переноса импульса самими частицами. Первый эффект обуславливает некоторое снижение эффективной турбулентной вязкости смеси, второй — ее повышение. Снижение сопротивления будет, очевидно, иметь место, если суммарное изменение турбулентной вязкости смеси по сравнению с потоком чистой жидкости отрицательно, чего можно ожидать именно в тех случаях, когда плотности фаз достаточно близки.

Авторы благодарны А. Х. Мирзаджанзаде и В. М. Сафраю за советы и полезное обсуждение работы.

Поступило 23 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х., Мирзоян А. А., Гевинян Г. М., Сеид-Рза М. К. Гидравлика глинистых и цементных растворов. «Недра», 1966.
2. Кутателадзе С. С., Стырикович М. А. Гидравлика газо-жидкостных систем. Госэнергоиздат, 1958.
3. Schultz-Grunow F. Zur Rheologie der Suspensionen. Chem.—Ing. Techn., 1962, № 3.
4. Krieger I. M., Dodge J. S. The Laminar—Turbulent Transition in Suspensions of Rigid Spheres. Soc. Petrol Engrs. J., 1967, vol. 7, № 3.
5. Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смеси жидкости с песком в скважине и трещине при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОН, 1958, № 11.
6. Бувевич Ю. А., Сафрай В. М. К теории ранней турбулизации дисперсных систем. ПМТФ, 1968, № 3.
7. Blatch N. S. Letter as Part of Discussion on «Water Filtration» at Washington. Trans. Amer. Soc. Civil Engrs, 1906, vol. 57, p. 400.
8. Vanoni V. A. Transportation of Suspended Sediment by Water. Trans. Amer. Soc. Civil Engrs., 1946, vol. 111, p. 67.
9. Bobkovich A. J., Gauvin W. H. The Turbulent Flow Characteristics of Model Fibre Suspensions. Can. J. Chem. Engng., 1965, vol. 43, № 2.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ТОКА В ПЕРЕМЕННОМ СЛОЕ

Г. В. ВИКТОРОВ, Г. М. МОРГУНОВ

(Москва)

Излагается реализованное на ЭВМ решение задачи построения телесного профиля вращающейся решетки на осесимметричной поверхности тока, основанное на исследовании течения от периодической системы распределенных вихресточников в переменном слое общего вида. Жидкость считается идеальной и несжимаемой, а течение — безвихревым.

В постановке [1] стационарная задача построения пространственной лопасти турбомашинны приближенно может быть сведена к совместному решению двух двумерных обратных задач — осесимметричного течения и течения на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины.

Рассмотрим решение второй предельной задачи методом особенностей, который широко применяется в гидромашиностроении при расчетах новых лопастных систем и сводится к определению течения от прямой решетки распределенных вихресточников и поступательного потока.

В работах [2, 3] разработан метод решения для слоя постоянной толщины. Обобщению этого метода на условия переменного слоя посвящены работы [4–6]. Эффективность практического применения [4–6] не исследована. В работе [7] рассматривается обратная задача для прямой решетки в случае параболического и гиперболического слоев. По существу аналогичный подход предложен в статье [8]. Известно также решение для круговой решетки, когда толщина слоя меняется по логарифмическому закону [9]. Заметим, что путем конформного преобразования областей решение [9] приводится к [7]. При конкретных расчетах из-за приближенности аппроксимаций действительного слоя методы [7–9] дают погрешность.

1. На плоскости $z = x + iy$, конформно связанной с осесимметричной поверхностью тока, рассмотрим течение от вихресточников, непрерывно распределенных на произвольно взятой бесконечной периодической системе гладких кривых (скелетных линиях) S_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (фиг. 1).

Вне линий особенностей течение описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \left(h = \frac{\delta(x)}{\delta(0)} \right) \quad (1.1)$$

Здесь u, v — скорости по осям; $\delta(x)$ — толщина слоя на поверхности.

Введем комплексно-сопряженную скорость $\bar{w}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$. Воспользуемся интегральным представлением второго рода для обобщенных аналитических функций

$$\bar{w}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{w}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

Здесь D — произвольная область с границей $C, z \in D$. Учитывая равенства

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{w} = -\frac{1}{2} \frac{h'}{h} u, \quad q(s) = w_n^+ - w_n^-, \quad \gamma(s) = w_s^- - w_s^+$$

и следуя Н. Е. Кочину [14], для периодической области прямой решетки, получим

$$\begin{aligned} \bar{w}(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{G_\infty} \frac{\bar{w}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2t} \int_{S_0} [q(s) - i\gamma(s)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta_s) ds - \\ & - \frac{1}{2t} \iint_{G_0} \frac{h'}{h} u(\xi, \eta) \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь w_n^+, w_n^- — нормальные, w_s^+, w_s^- — касательные слагающие комплексно-сопряженной скорости соответственно слева и справа от основной скелетной линии S_0 ; $q(s), \gamma(s)$ — плотности источников и вихрей; t — шаг решетки; G_0 — полоса основного периода; G_∞ — расширяющийся контур, охватывающий решетку.

Определим предельные значения $\bar{w}(z)$ на бесконечностях. В условиях рассматриваемой задачи первый интеграл в (1.2) по теореме Лиувилля равен нулю. Полагая, что h'/h — финитная функция, при $z \rightarrow \pm\infty$ получим

$$\begin{aligned} \bar{w}(\pm\infty) = & \pm \frac{1}{2it} \int_{S_0} \gamma(s) ds \pm \\ & \pm \frac{1}{2t} \left[\int_{S_0} q(s) ds - \iint_{G_0} \frac{h'}{h} u(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \end{aligned}$$

Можно показать, что если при наложении поступательного потока одна из линий тока охватывает S_0 , образуя замкнутый контур, то

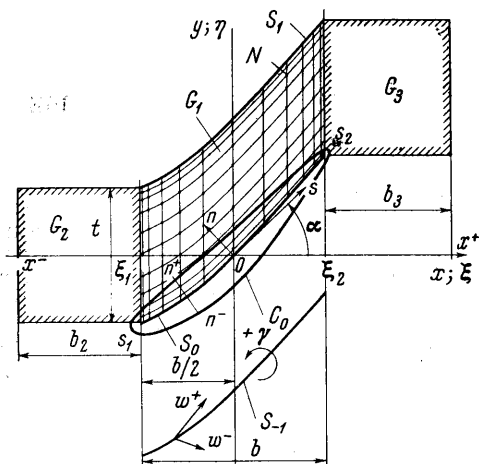
$$\int_{S_0} q(s) ds - \iint_{G_0} \frac{h'}{h} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (1.3)$$

В дальнейшем условие (1.3) считается выполненным. Имеем

$$\bar{w}(\pm\infty) = \pm \frac{\Gamma}{2it} \quad \left(\Gamma = \int_{S_0} \gamma(s) ds \right) \quad (1.4)$$

2. Скорость $\bar{w}(z)$ определяется методом итераций по схеме предложенной в работах [5, 10] для аналогичных уравнений. Ниже для улучшения сходимости итерационного процесса $\bar{w}(z)$ будет представлена в виде суммы трех слагаемых, из которых первые два остаются неизменными в ходе приближений и как показали расчеты оказываются близкими к истинному значению скорости, а третий итерированный член мал. Запишем расходную составляющую скорости в виде

$$u(\xi, \eta) = u_+(\xi) + \Delta u(\xi, \eta), \quad u_+(\xi) = \frac{1}{t} \int_{\nu(\xi)}^{\nu(\xi)+t} u(\xi, \eta) d\eta \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Вводя, как и в [5]

$$q^*(\xi) = q(s) \left[1 + \left(\frac{d\eta_s}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \gamma^*(\xi) = \gamma(s) \left[1 + \left(\frac{d\eta_s}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2}$$

из уравнения неразрывности получим

$$u_+(\xi) = \frac{1}{ht(\xi)} \int_{\xi_1}^{\xi} h(\xi) q^*(\xi) d\xi = - \frac{1}{ht(\xi)} \int_{\xi}^{\xi_2} h(\xi) q^*(\xi) d\xi \quad \text{при } \xi_1 < \xi < \xi_2 \quad (2.2)$$

При $\xi \leq \xi_1$ и $\xi \geq \xi_2$ $u_+(\xi) = 0$. Здесь ξ_1, ξ_2 — границы области, занятой решеткой (фиг. 1). Обозначим

$$\bar{w}_1(z) = \frac{1}{2t} \int_{\xi_1}^{\xi_2} [q^*(\xi) - i\gamma^*(\xi)] \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta_s) d\xi \quad (2.3)$$

Средняя расходная составляющая скорости $\bar{w}_1(z)$ равна

$$u_{1+}(\xi) = \frac{1}{2t} \left[\int_{\xi_1}^{\xi} q^*(\xi) d\xi - \int_{\xi}^{\xi_2} q^*(\xi) d\xi \right] \quad (2.4)$$

Итак, для средней расходной составляющей скорости, вызванной переменностью слоя, имеем

$$u_{2+}(\xi) = - \frac{1}{2t} \int_{G_0} \int \frac{h'}{h} u_+(\xi) \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta) d\xi d\eta = u_+(\xi) - u_{1+}(\xi) \quad (2.5)$$

Введем

$$\bar{w}_3(z) = - \frac{1}{2t} \int_{G_0} \int \frac{h'}{h} \Delta u(\xi, \eta) \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta) d\xi d\eta \quad (2.6)$$

Окончательно получаем следующую расчетную формулу

$$\bar{w}^{(j)}(z) = \bar{w}_1(z) + u_{2+}(z) + \bar{w}_3^{(j-1)}(z) \quad (2.7)$$

где $(j) = 1, 2, \dots$ — номер итерации. Остановимся на определении скорости $\bar{w}_3(z)$.

Используя «принцип подобия» для обобщенных аналитических функций [10] и следуя [1], можно показать, что при удалении от решетки $\Delta u(\xi, \eta)$ быстро уменьшается. Поэтому при вычислениях $\bar{w}_3(z)$ для $\xi_1 < x < \xi_2$ с достаточной для приложений степенью точности вместо бесконечной области G_0 можно рассматривать область $G_0' = G_1 + G_2 + G_3$ (фиг. 1), ограниченную слева и справа координатами $x^- \approx -(t + 1/2b)$, $x^+ \approx t + 1/2b$. Здесь b — проекция скелетной линии на ось x .

Зададим плотность вихрей и источников в виде известных рядов

$$\gamma^*(\xi) = A_0 \left[\frac{1/2b - \xi}{1/2b + \xi} \right]^{1/2} + [1/4b^2 - \xi^2]^{1/2} \sum_{k=0}^{k_1} A_{k+1} \xi^k \quad (2.8)$$

$$q^*(\xi) = B_0 \left[\frac{1/2b - \xi}{1/2b + \xi} \right]^{1/2} + [1/4b^2 - \xi^2]^{1/2} \sum_{k=0}^{k_2} B_{k+1} \xi^k + B_0 + \left[\frac{1/2b + \xi}{1/2b - \xi} \right]^{1/2} \quad (2.9)$$

Тогда несобственный двойной интеграл (2.6) по области G_0' сходится всюду для $z \in G_0'$, так как

$$\left| \frac{h'}{h} \Delta u \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta) \right\} \right| < \frac{M_1}{|z - \zeta|^\mu}$$

$$\left| \frac{h'}{h} \Delta u \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t}(z - \zeta) \right\} \right| < \frac{M_2}{|z - \zeta|^\mu} \quad \left(\begin{array}{l} \mu < 2 \\ 0 < M_{1,2} < \infty \end{array} \right)$$

3. Для определения составляющих $u(x, y)$ и $v(x, y)$ разработаны алгоритмы и программа применительно к ЭВМ Минск-2. Методы вычисления гармонических функций $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ по формуле (2.3) известны (соответствуют случаю $h \equiv 1$).

Интеграл (2.2) отыскивался в узлах квадратурной формулы Мелера, для чего с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа найдены и протабулированы интегральные коэффициенты. Интегрирование в (2.4) производилось аналитически.

Для вычислений двойной интеграл (2.6) представлялся в виде повторного с конечными пределами. Выделение особенностей производилось мультипликативным и аддитивным методами совместно. Для точек области G_0' вне линии особенностей S_0

$$u_3(x, y) = -\frac{1}{2t} \int_{x^-}^{x^+} \frac{h'}{h} d\xi \int_{v(\xi)}^{v(\xi)+t} [\Delta u(\xi, \eta) - \Delta u(x, y)] \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right\} d\eta - \frac{1}{2} \Delta u(x, y) \ln \frac{h^2(x)}{h(x^-)h(x^+)} \quad (3.1)$$

$$v_3(x, y) = -\frac{1}{2t} \int_{x^-}^{x^+} \frac{h'}{h} d\xi \int_{v(\xi)}^{v(\xi)+t} [\Delta u(\xi, \eta) - \Delta u(x, y)] \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) \right\} d\eta \quad (3.2)$$

На линии S_0 слагающая скорости u имеет разрыв, равный $q \sin \alpha + v \cos \alpha$, где α — текущий угол наклона S_0 к оси ξ . Поэтому для точек $s_0(x_0, y_0)$ на линии S_0 имеем

$$u_3(x_0, y_0) = -\frac{1}{2t} \int_{x^-}^{x^+} \frac{h'}{h} d\xi \int_{v(\xi)}^{v(\xi)+t} K(x_0, y_0, \xi, \eta) d\eta - \frac{1}{2} \Delta u(s_0) \ln \frac{h^2(x_0)}{h(x^-)h(x^+)} \quad (3.3)$$

где

$$\Delta u(s_0) = \left[\frac{u^-(s_0) + u^+(s_0)}{2} - u_+(x_0) \right]$$

причем $K(x_0, y_0, \xi, \eta) = [\Delta u(\xi, \eta) - \Delta u(s_0)] \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (z_0 - \zeta) \right\}$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \int_{v(\xi)}^{v(\xi)+t} K(x_0, y_0, \xi, \eta) d\eta = \frac{t\alpha(s_0)}{\pi} [u^+(s_0) - u^-(s_0)]$$

Аналогично

$$v_3(x_0, y_0) = -\frac{1}{2t} \int_{x^-}^{x^+} d\xi \int_{v(\xi)}^{v(\xi)+t} N(x_0, y_0, \xi, \eta) d\eta + \frac{1}{4\pi} \frac{h'(x_0)}{h(x_0)} [u^-(s_0) - u^+(s_0)] \times \left\{ \int_{x^-}^{x^+} \ln \frac{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - y(\xi))^2}{[(x_0 - \xi)^2 + (y_0 + t - y(\xi))^2] (x_0 - \xi)^2} d\xi + \right. \quad (3.4)$$

$$\left. + 2[(x^+ - x_0) \ln(x^+ - x_0) + (x_0 - x^-) \ln(x_0 - x^-) - (x^+ - x^-)] \right\}$$

где

$$N(x_0, y_0, \xi, \eta) = \frac{h'(\xi)}{h(\xi)} [\Delta u(\xi, \eta) - (u^+(s_0) - u_+(x_0))] \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{cth} \frac{\pi}{t} (z_0 - \zeta) \right\} - \frac{t}{\pi} \frac{h'(x_0)}{h(x_0)} [u^-(s_0) - u^+(s_0)] \frac{y_0 + t - \eta}{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 + t - \eta)^2}$$

Кубатурная формула численного интегрирования получена последовательным применением квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности [12].

По переменной η применялась квадратурная формула с двумя заранее заданными узлами на линиях $\eta = y(\xi)$, $\eta = y(\xi) + t$ и постоянной весовой функцией [12]. Для области G_1 принято число узлов $p = 11$ (фиг. 1), а для областей G_2 и G_3 $p = 9$.

По переменной ξ использовалась формула Мелера для $p = 11$ в G_1 и $p = 7$ в G_2 и G_3 . В результате численных расчетов получены слагающие скорости слева (u^+ , v^+) и справа (u^- , v^-) от скелетной линии для трех приближений.

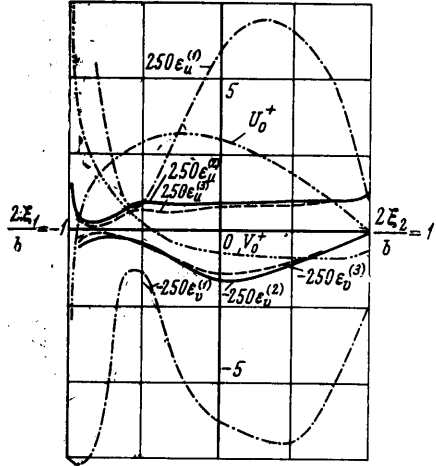
Точность метода оценивалась сопоставлением с решением, полученным на основе работы [7] для прямой решетки источников в параболическом слое $h_1 = (1 + \beta_1 x)^2$ и вихрей в гиперболическом слое $h_2 = (1 + \beta_2 x)^{-2}$. Сравнение проводилось для решетки, имеющей $t = 1$, $b = 2$; $b_2 = b_3 = 1$ (фиг. 1). Особенности распределялись по законам (2.8), (2.9) вдоль прямолинейных скелетных линий, наклоненных под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси ξ . Из (2.8) и (2.9) были взяты только два первых члена, для которых принято $A_0 = B_0^- = 2$, $A_1 = B_1 = -4.831728$. Выбор коэффициентов B_0^- и B_1

проводился так, чтобы выполнялось условие (1.3), которое равноценно

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) q^*(\xi) d\xi = 0 \tag{3.5}$$

При этом принималось $\beta_1 = -\beta_2 = -0.2$. Скорости вычислялись на линии S_0 в 11 узловых точках по переменной ξ (фиг. 1).

На фиг. 2 приведены результаты расчетов течения от решетки источников в параболическом слое для слагающих скорости u^+, v^+ слева от скелетной линии. Здесь U_0^+, V_0^+ — скорости полученные на основе работы [7]; $\varepsilon_u^{(j)} = |U_0^+ - u^{+(j)}|$, $\varepsilon_v^{(j)} = |V_0^+ - v^{+(j)}|$ — модули разностей. Видно, что совпадение удовлетворительно. Такой же порядок разностей в процессе приближений имел место и для слагающих $u^{-(j)}, v^{-(j)}$. При сопоставлении решений для решетки распределенных вихрей в гиперболическом слое наблюдалась аналогичная картина. Кроме того, проведена серия расчетов течений от распределенных вихреисточников для ряда характерных слоев с целью относительной оценки величин слагаемых в формуле (2.7). В качестве типичного примера (фиг. 3) даны результаты расчетов для слоя, имеющего минимум в области решетки. Здесь принято $A_0 = B_0 = 2$, $A_1 = -6$, коэффициент B_1 отыскивался из условия (3.5), геометрия решетки указана выше. Видно, что слагаемое $\bar{w}_3(z) = u_3(x, y) - iv_3(x, y)$ является малым.



Фиг. 2

Анализ полученных данных позволяет сделать следующие качественные выводы.

1) Последовательные приближения сходятся достаточно быстро, поскольку первое приближение оказывается близким к истинному значению скорости $\bar{w}(z)$. Третье приближение незначительно отличается от второго.

2) Величины кубатур по областям G_2 и G_3 для $z \in G_1$, как правило на порядок ниже значений интеграла по области G_1 .

4. На основе предыдущих результатов решена обратная задача для вращающейся решетки на осесимметричной поверхности в следующей постановке.

Заданы: Γ, t, ξ_1, ξ_2 , угловая скорость ω , функции изменения слоя $h(x)$ и текущего радиуса осесимметричной поверхности $r(x)$, параметры поступательного потока u_0, v_0 , а также характер эпюры скоростей на профиле и его толщина относительно S_0 .

Требуется построить телесный профиль в решетке (замкнутую линию тока в относительном движении), для чего необходимо определить линию S_0 на плоскости и найти соответствующие функции распределения особенностей.

Конкретно задавался характер эпюры скоростей только на стороне разряжения, что связано с практической направленностью разработанного метода на создание кавитационно устойчивых лопастей.

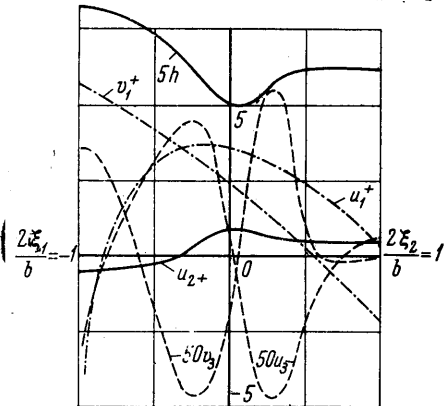
Ограничиваясь в выражении (2.7) первой итерацией, для комплексно-сопряженной относительной скорости течения от особенностей и поступательного потока

$$\bar{w}_0(x) = \frac{u_0}{h(x)} - iv_0$$

имеем следующую расчетную формулу:

$$\begin{aligned} \bar{W}(z) = U(x, y) - iV(x, y) = & \bar{w}_0(x) + \\ & + \bar{w}_1(z) + u_{2+}(x) + i\omega \frac{r^2(x)}{r(0)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Функции q^*, γ^* выбираются так, чтобы выполнялись следующие условия.



Фиг. 3

1) Замыкаемость профиля. Необходимые и достаточные условия замыкаемости профиля будут выполнены, если в относительном течении вокруг S_0 существует контур C_0 (фиг. 1), на котором функция тока $\psi = \text{const}$. Такие условия даются выражениями

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} hq^* d\xi = \int_0^{n^+} hW_s dn - \int_0^{n^-} hW_s dn, \quad \int_{\xi_1}^{\xi_2} hq^* d\xi = 0 \quad (4.2)$$

$$2 \int_{s_1}^s hW_{n^+} ds = \int_0^{n^+} hW_s dn + \int_0^{n^-} hW_s dn, \quad \int_{s_1}^{s_2} hW_{n^+} ds = 0 \quad (4.3)$$

Эти соотношения непосредственно следуют из выражения для функции тока

$$\psi = \int hU d\eta - hV d\xi + \text{const} \quad (4.4)$$

Здесь n, s — локальные декартовы координаты, связанные с линией S_0 ; s_1, s_2 — точки пересечения C_0 с продолжением S_0 ; n^+, n^- — координаты C_0 по оси n , причем $n^+ > 0, n^- < 0$ по условию; W_s — составляющая относительной скорости W по оси s ; $W_{n^+} = 1/2(W_{n^+} + W_{n^-})$ — средняя нормальная составляющая W на S_0 и ее продолжении.

При выполнении (4.2), (4.3) линия C_0 принимается за контур профиля.

2) Постулат Жуковского — Чаплыгина

$$W(s_2) = 0 \quad (4.5)$$

3) Циркуляция вокруг контура

$$\Gamma = \int_{C_0} v^*(\xi) d\xi \quad (4.6)$$

4) Характер эпюры скоростей задается соотношением

$$|W(s)| = cf(s) \quad (4.7)$$

где $f(s)$ — известная функция; c — некоторый коэффициент.

При переходе к формулам численных квадратов выражения (4.2) — (4.7) сводятся к определенной совместной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в формулах (2.8), (2.9), (4.7) и значений функции W_{n^+} в узлах скелетной линии S_0 .

Форма профиля отыскивается методом последовательных приближений. Угол наклона линии S_0 определяется из уравнения

$$\alpha^{(j+1)} = \arctg \frac{V_+^{(j)}}{U^{(j)}} - \arcsin \frac{W_{n^+}^{(j)}}{|W|^{(j)}} \quad (4.8)$$

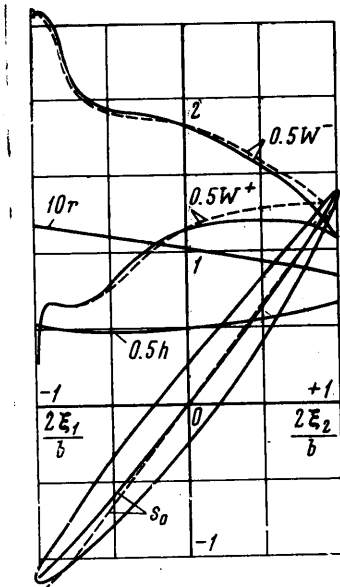
Здесь (j) — номер приближения. В качестве исходной принимается линия S_0 , полученная из расчета бесконечного числа бесконечно тонких лопастей. Для реализации решения задачи разработан алгоритм применительно к ЭВМ Минск-2, достаточная эффективность которого подтверждена расчетами. При допустимом расхождении $|\alpha^{(j)} - \alpha^{(j-1)}| \leq 30'$ в большинстве случаев $(j) \leq 6$, а машинное время счета одной решетки $5 \div 7$ мин. На фиг. 4 приведены результаты расчета турбинной решетки при $\omega = -30$ 1/сек, $\Gamma = 0.231$ м²/сек, $t = 0.0794$ м, $b = 0.0757$ м, $u_0 = 1.61$ м/сек, $v_0 = -1.547$ м/сек.

Пунктиром показана скелетная линия, а также эпюры относительных скоростей W^+ [м/сек] на стороне давления и W^- [м/сек] на стороне разряжения решетки, полученной для тех же исходных данных, но с $h = 1$.

В заключение заметим, что возможна иная постановка задачи, когда функции q^*, γ^*, W_{n^+} определяются исходя из предварительных расчетов (или имеющихся рекомендаций) с соблюдением условий (4.2) — (4.6), а уравнения (4.2), (4.3) решаются относительно n^+, n^- .

Авторы выражают благодарность Г. Ю. Степанову за полезные замечания и об-суждение данной работы.

Поступило 22 V 1967



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Лесохин А. Ф., Симонов Л. А. Расчет колеса типа Каплана по выбранному распределению вихрей. М., Оборонгиз, 1939.
3. Лесохин А. Ф. Расчет лопастей рабочих колес осевых турбин. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Энергомашиностроение, 1953, № 5.
4. Валландер С. В. О применении метода особенностей к расчету течений жидкости в радиально-осевых турбинах. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 3.
5. Czibere T. Über die Berechnung der Schaufelprofile und der Strömung um die Schaufeln von Strömungsmaschinen. Ing.-Arch., 1964, bd. 33, hft. 4.
6. Гохман А. М., Рао Е. В. Н. Поле скоростей от особенностей в тонком слое переменной толщины. Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 5.
7. Киселев К. А. Профилирование лопастей рабочего колеса радиально-осевой турбины методом особенностей. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем. механ. и астроном., 1958, вып. 1.
8. Hoffmeister M., Ein Beitrag zur Berechnung der incompressiblen reibungsfreien Strömung durch ein unendlich dünnes Schaufelgitter in einem Rotationshohlraum. Maschinenbautechnik, 1961, Bd. 10, No. 8.
9. Мурата Сусума, Кикай-но кэнкю, Science of Machine, 1963, vol. 15, No. 3.
10. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
11. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
12. Крылов В. И., Шувльгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М., «Наука», 1966.

СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА В ТРУБЕ

Б. Г. ВАГЕР, Д. Л. ЛАЙХТМАН

(Ленинград)

Решается задача о турбулентном потоке в прямой круглой трубе. Рассматривается система, состоящая из уравнения движения, уравнения для энергии турбулентности, выражения, связывающего коэффициент турбулентности с масштабом турбулентности и интегральной формулы для определения масштаба турбулентности. Приводится численное решение этой замкнутой системы уравнений турбулентного потока. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными.

1. Рассмотрим прямую круглую трубу радиуса R . Расположим систему координат таким образом, что ось z будет проходить по оси трубы, а в плоскости, перпендикулярной оси z , введем полярную систему r и φ . Течение будем рассматривать лишь на достаточно больших расстояниях от входа в трубу, так чтобы условия у входа уже не сказывались. Предположим далее, что течение стационарное и полностью турбулентное. В этом случае отличной от нуля будет лишь одна компонента средней скорости $v = v_z(r)$, и все характеристики потока будут зависеть от единственной координаты r , где r — расстояние от оси трубы.

При этих предположениях из системы уравнений Рейнольдса [1] получим только одно уравнение для искомой компоненты $v_z(r)$

$$\frac{d}{dr} rk(r) \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.1)$$

Здесь $k(r)$ — коэффициент турбулентной вязкости, $\partial p / \partial z$ — градиент давления. Уравнение (1.1) можно проинтегрировать. Учитывая, что в силу симметрии $dv/dr = 0$ в центре трубы, после интегрирования получим

$$k \frac{dv}{dr} = - \frac{r}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.2)$$

Следуя А. Н. Колмогорову [2], выразим коэффициент турбулентной вязкости через масштаб турбулентности $l(r)$ и энергию турбулентности $b(r)$

$$k = l\sqrt{b} \quad (1.3)$$

Запишем уравнение для энергии турбулентности в цилиндрических координатах [1]

$$k \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 - c \frac{b^2}{k} + \frac{a_b}{r} \frac{d}{dr} rk \frac{db}{dr} = 0 \quad (1.4)$$