

## РАЗВИТИЕ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. В. ЧЕРКЕСОВ (Севастополь)

Аналогичные задачи для установившегося движения бесконечно глубокой жидкости рассматриваются в работах [1-3], для жидкости конечной глубины в работах [4, 5], для неустановившегося движения бесконечно глубокой жидкости в работе [6].

1. Пусть к горизонтальной свободной поверхности невозмущенного потока жидкости, занимающей часть пространства  $0 > z > -H$  и текущей в положительном направлении оси  $x$  со скоростью  $u$  прикладываются, начиная с момента времени  $t = 0$ , давления вида

$$p(x, y) = p_0 f(x, y) \quad (1.1)$$

Предполагая движение жидкости безвихревым, а возмущения, создаваемые давлениями (1.1), малыми и учитывая, что при  $t = 0$  возмущения отсутствуют, получим аналогично тому, как это сделано в работе [6], такое выражение вида свободной поверхности

$$\zeta = \frac{p_0}{4\pi\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(m, n, t) \exp[i(mx + ny)] dm dn \quad (1.2)$$

$$\psi = f(m, n) \left[ \frac{2u^2 m^2}{u^2 m^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha}{um - \alpha} e^{ikh_1 t} + \frac{\alpha}{um + \alpha} e^{ikh_2 t} \right]$$

$$k_{1,2} = -um \pm \alpha, \quad \alpha = \sqrt{gr \operatorname{th} rH}, \quad r = \sqrt{m^2 + n^2}$$

Здесь  $f(m, n)$  — преобразование Фурье функции  $f(x, y)$ ;  $m$  и  $n$  — параметры преобразования Фурье по  $x$  и  $y$ .

Формула (1.2) представляет собой точное выражение вида волн на свободной поверхности для произвольной функции  $f(x, y)$ , представимой интегралом Фурье.

Для функции  $f(x, y)$ , симметричной относительно  $x$  и  $y$ , функция  $f(m, n)$  будет симметричной относительно  $m$  и  $n$ , и выражение (1.2) в этом случае можно представить в таком, более удобном для дальнейших исследований, виде

$$\zeta = \frac{p_0}{2\pi\rho g} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} I(r) dr \right] \quad (1.3)$$

$$I(r) = \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \xi_1(\theta) \exp[irR_1 \cos(\theta - \gamma)] d\theta \quad (1.4)$$

$$\xi_1(\theta) = \psi_1(\theta) \{ur \cos \theta - c\sqrt{r} \operatorname{th} r \exp[it/H(-ur \cos \theta + c\sqrt{r} \operatorname{th} r)]\}$$

$$\psi_1(\theta) = \frac{rf(r, \theta)}{(ur \cos \theta - c\sqrt{r} \operatorname{th} r)H^2}, \quad R_1 = RH^{-1}, \quad c = \sqrt{gH} \quad (1.5)$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta$$

Выражение (1.3) дает вид свободной поверхности для произвольных значений  $R$  и  $\gamma$  и симметричной относительно  $x$  и  $y$  функции  $f(x, y)$ .

2. Проведем исследование выражения (1.3) для больших значений  $R$  и функции  $f(x, y)$ , равной единице в квадрате  $|x| \leq b$ ,  $|y| \leq b$  и равной нулю вне этого квадрата, предполагая  $b$  малым,  $p_0$  достаточно большим, а  $P = p_0 b^2$  — конечным. При этом  $\psi_1(\theta)$  имеет вид

$$\psi_1 = \frac{4 \sin(br \cos \theta) \sin(br \sin \theta)}{\pi r (ur \cos \theta - c\sqrt{r} \operatorname{th} r) \sin 2\theta} \quad (2.1)$$

Функция  $\xi_1(\theta)$  не имеет особенностей на пути интегрирования  $-1/2\pi \leq \theta \leq 1/2\pi$  для любых  $r \geq 0$ . Поэтому можно, для удобства дальнейшего исследования, деформировать исходный путь интегрирования по  $\theta$  в путь  $(d)$ , обходящий точку  $\theta_1$  по малой полуокружности в нижней полуплоскости, а точку  $\theta_2$  — по малой полуокружности в верхней полуплоскости, а в остальном — совпадающий с исходным путем интегрирования. При этом

$$-1/2\pi \leq \theta_1 \leq 0, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1/2\pi, \quad \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \xi^{-1} \sqrt{r}^{-1} \operatorname{th} r, \quad \xi = u/c \quad (2.2)$$

Указанную деформацию пути интегрирования будем проводить для  $r > r_0$ , где  $r_0$  — единственный положительный корень уравнения

$$\xi^2 r_0 - \operatorname{th} r_0 = 0 \quad (2.3)$$

Очевидно, что для  $r > r_0$ ,  $\cos \theta_1$  и  $\cos \theta_2$  будут меньше единицы и на контуре  $(d)$  будет выполняться условие  $\operatorname{Re}[-ir \cos \theta] \leq 0$ . Интеграл (1.4) теперь можно записать так:

$$I = I_1 - I_2 \quad (2.4)$$

$$I_1 = \int_{(d)} \psi_1(\theta) u r \exp[irR_1 \cos(\theta - \gamma)] \cos \theta d\theta \quad (2.5)$$

$$I_2 = \int_{(d)} \psi_1(\theta) c \sqrt{r} \operatorname{th} r \exp[irR_1 M(\theta)] d\theta \quad (2.6)$$

$$M(\theta) = \cos(\theta - \gamma) - v(\cos \theta - \xi^{-1} \sqrt{r^{-1}} \operatorname{th} r), \quad v = utR^{-1}$$

Проводя исследование интегралов (2.5) и (2.6) методом стационарных фаз, получаем для больших  $R$  и  $r \geq r_0$

$$I_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad (2.7)$$

$$a_1 = \begin{cases} -2\pi i [\operatorname{res} \psi_2(\theta)]_{\theta_2} & (\cos \gamma > \xi^{-1} \sqrt{r^{-1}} \operatorname{th} r) \\ 0 & (\cos \gamma < \xi^{-1} \sqrt{r^{-1}} \operatorname{th} r) \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 2\pi i [\operatorname{res} \psi_2(\theta)]_{\theta_1} & (\cos \gamma > 0, -\cos \gamma < \xi^{-1} \sqrt{r^{-1}} \operatorname{th} r) \\ 0 & (-\cos \gamma > \xi^{-1} \sqrt{r^{-1}} \operatorname{th} r) \end{cases}$$

$$a_3 = R^{-1/2} d_1(r) \exp[iRq_1(r)]$$

где  $\psi_2(\theta)$  — подынтегральная функция выражения (2.5);  $d_1(r)$  — не имеющая особенностей при  $r \geq 0$ ;  $q_1(r)$  — вещественная при  $r \geq 0$

$$I_2 = b_1 + b_2 + b_3$$

$$b_1 = \begin{cases} 2\pi i [\operatorname{res} \psi_3(\theta)]_{\theta_1} & (v < v_1, 0 \leq \gamma \leq \pi) \\ 0 & (v > v_1, 0 \leq \gamma \leq \pi) \end{cases} \quad (2.8)$$

$$b_2 = \begin{cases} -2\pi i [\operatorname{res} \psi_3(\theta)]_{\theta_2} & (\cos \gamma > v > \cos \gamma - m_1(r) \sin \gamma, \cos \gamma > 0) \\ 0 & (v > \cos \gamma, v < \cos \gamma - m_1(r) \sin \gamma) \end{cases}$$

$$b_3 = R^{-1/2} d_2(r) \exp[iRq_2(r)]$$

где  $\psi_3(\theta)$  — подынтегральная функция выражения (2.6),  $d_2$  и  $q_2$  аналогичны  $d_1$  и  $q_1$

$$v_1 = \cos \gamma + m_1(r) \sin \gamma, \quad m_1(r) = [\xi^2 r (\operatorname{th} r)^{-1} - 1]^{-1/2} \quad (2.9)$$

Теперь из формул (1.3), (2.4), (2.7) и (2.8) находим

$$\zeta = \frac{2p_0}{\pi^2 \rho g} \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=3}^{11} I_k \right] \quad (2.10)$$

$$I_3 = \pi i \int_{r_0}^{\infty} \xi_2(r) \exp[iRN_1(r)] dr \quad (v > \cos \gamma > 0) \quad (2.11)$$

$$I_4 = \int_0^{r_0} \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} u r \psi_1(\theta) \cos \theta \exp[irR \cos(\theta - \gamma)] d\theta dr$$

$$I_5 = - \int_0^{r_0} \int_{-1/2\pi}^{3/2\pi} c \psi_1(\theta) \sqrt{r} \operatorname{th} r \exp[iRrM(\theta)] d\theta dr$$

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \pi i \int_{Q_1}^s \xi_2(r) \exp [iRN_1(r)] dr \quad (\cos \gamma < 0, s \geq Q_1) \\
 I_7 &= -\pi i \int_s^{Q_1} \xi_2(r) \exp [iRN_1(r)] dr \quad (\cos \gamma < 0, s \leq Q_1) \\
 I_8 &= \pi i \int_s^\infty \xi_2(r) \exp [iRN_2(r)] dr \quad (\cos \gamma > 0, v > 0) \\
 I_9 &= -\pi i \int_{Q_2}^\infty \xi_2(r) \exp [iRN_2(r)] dr, \quad (v > \cos \gamma, 0 \leq \gamma \leq 1/2\pi) \\
 I_{10,11} &= R^{-1/2} \int_{r_0}^\infty d_{1,2}(r) \exp [iRq_{1,2}(r)] dr \\
 \xi_2(r) &= \frac{\xi^2 \sin [\xi^{-1}b \sqrt{r \operatorname{th} r}] \sin [\xi^{-1}b \sqrt{r(\xi^2 r - \operatorname{th} r)}]}{\xi^2 r - \operatorname{th} r} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

$$N_{1,2} = \xi^{-1}(\sqrt{r \operatorname{th} r} \cos \gamma \mp \sqrt{\xi^2 r^2 - r \operatorname{th} r} \cdot \sin \gamma) \quad (2.13)$$

Здесь  $Q_{1,2}$  — положительные корни уравнений

$$v = \cos \gamma \pm [\xi^2 r (\operatorname{th} r)^{-1} - 1]^{-1/2} \sin \gamma \quad (2.14)$$

Так как функции  $d_1$  и  $d_2$  не имеют особенностей в области интегрирования, а подынтегральные функции выражений  $I_k$  ( $k = 6, 7, 8, 9$ ) не имеют стационарных точек на пути интегрирования, находим, что каждый из интегралов  $I_k$  ( $k = 4, \dots, 11$ ) имеет порядок не ниже  $R^{-1}$  и в силу этого

$$\sum_{k=4}^{11} I_k = O(R^{-1}) \quad (2.15)$$

Займемся теперь исследованием интеграла (2.11). Найдем асимптотическую оценку этого интеграла для больших значений  $R$  методом стационарных фаз. Стационарные точки представляют собой положительные корни уравнения  $N_1' = 0$ , которое можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \gamma = \psi(r) \quad (2.16)$$

$$\left( \psi(r) = \frac{\operatorname{th} r + r(\operatorname{ch} r)^{-2}}{2\xi^2 r - \operatorname{th} r - r(\operatorname{ch} r)^{-2}} \sqrt{\xi^2 \frac{r}{\operatorname{th} r} - 1} \right)$$

Так как функция  $\psi(r)$  ведет себя совершенно различно в зависимости от того  $\xi \geq 1$  или  $\xi < 1$ , что существенно сказывается на окончательное выражение интеграла (2.11), то проведем исследование этих случаев отдельно.

3. Случай  $\xi \geq 1$ . Анализ функции  $\psi(r)$  показывает, что при  $\xi \geq 1$  она монотонно убывает с ростом  $r$  ( $r \geq 0$ ), стремясь к нулю при  $r \rightarrow \infty$  и имея при  $r = 0$  наибольшее значение, равное

$$\psi(0) = \begin{cases} (\xi^2 - 1)^{-1/2} & (\xi > 1) \\ +\infty & (\xi = 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Таким образом, уравнение (2.16) для  $\xi = 1$  имеет один положительный корень для любых значений  $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1/2\pi$ ), а для  $\xi > 1$  имеет один положительный корень для  $\gamma \leq \gamma_1$  и не имеет положительных корней для  $\gamma > \gamma_1 < 1/2\pi$ , где

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = (\xi^2 - 1)^{-1/2} \quad (3.2)$$

Обозначим этот корень через  $r_1$  ( $r_1 = r_1(\gamma, \xi)$ ) и заметим, что при изменении  $\gamma$  от  $\gamma_1$  до нуля (при фиксированном  $\xi$ )  $r_1$  непрерывно возрастает от нуля до бесконечности. Так как в установившемся движении ( $t \rightarrow \infty$ ) нижний предел интеграла (2.11) равен нулю, а подынтегральная функция при  $\gamma \leq \gamma_1$  имеет одну стационарную точку  $r = r_1$ , а при  $\gamma > \gamma_1$  стационарных точек не имеет, то очевидно, что в установив-

шемся движении в случае  $\xi \geq 1$  основные возмущения, амплитуда которых для больших  $R$  имеет порядок  $R^{-1/2}$ , будут сосредоточены внутри угла

$$|\gamma| \leq \gamma_1 \quad (3.3)$$

где  $\gamma_1$  определяется равенством (3.2).

Отметим, что полученное выражение (3.2) для предельного угла волнового следа при  $\xi \geq 1$  совпадает с выражением предельного угла, полученным в работе [4], где рассматривалась аналогичная задача для установившегося движения методом суммирования волновых эффектов от сосредоточенных импульсов давления, приложенных вдоль курса «корабля».

Так как нижний предел  $Q_1$  интеграла (2.11) в неустановившемся движении представляет собой функцию от  $\gamma$ , то очевидно, что этот интеграл будет иметь порядок  $R^{-1/2}$ , когда стационарная точка  $r = r_1$  при выполнении условия (3.3) лежит на пути интегрирования, т. е. когда  $r_1 > Q_1$ . В остальных случаях, т. е. при  $r_1 < Q_1$  и  $\gamma \leq \gamma_1$  или при  $\gamma > \gamma_1$  интеграл (2.11) будет иметь порядок не ниже  $R^{-1}$ . Условие  $r_1 \cong Q_1$  можно, как это следует из (2.14), записать в таком виде

$$R \cong ub_1(\xi, \gamma, r_1)t, \quad b_1(\xi, \gamma, r_1) = \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\xi^2 r_1 (\operatorname{th} r_1)^{-1} - 1}} \quad (3.4)$$

Учитывая сказанное выше, находим такие асимптотические формулы для интеграла (2.11) при больших значениях  $R$

$$I_3 = \begin{cases} \pi i R^{-1/2} A_1 \exp\{i [RN_1(r_1) - 1/4\pi]\} & (0 < \gamma < \gamma_1) \\ O(R^{-1}) & (\gamma_1 < \gamma \leq \pi) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$A_1 = \begin{cases} \sqrt{-2\pi/N_1''(r_1)} \xi_2(r_1) & (R < ub_1 t) \\ O(R^{-1/2}) & (R > ub_1 t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Так как подынтегральная функция в (2.11) при  $r = 0$  (это соответствует  $\gamma = \gamma_1$ ) обращается в нуль, то несмотря на то, что  $N_1''(0) = 0$ , а  $N_1'''(0) \neq 0$ , интеграл  $I_3$  вдоль  $\gamma = \gamma_1$  имеет порядок более высокий, чем  $R^{-1/2}$ . Из формул (2.10), (2.15), (3.5) находим такое окончательное выражение

$$\xi = \begin{cases} \eta_1 & (0 \leq \gamma < \gamma_1) \\ O(R^{-1}) & (\gamma = 0, \gamma_1 \leq \gamma \leq \pi) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\eta_1 = -\frac{2p_0}{\rho g} A_2 \sin [RN_1(r_1) - 1/4\pi] \quad (3.8)$$

где  $A_1$  дается формулой (3.6).

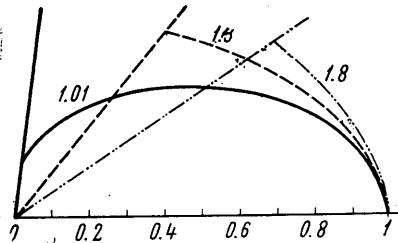
Итак, при  $\xi \geq 1$  основные возмущения свободной поверхности, представляющие собой только продольные волны вида (3.8), сосредоточены внутри угла  $|\gamma| < \gamma_1$  слева от кривой  $R = ub_1(\gamma)t$ , где  $\gamma_1$  и  $b_1$  даются формулами (3.2) и (3.4), а  $r_1$  — положительный корень уравнения (2.16).

Так как в общем случае найти выражение  $r_1$  как функцию от  $\gamma$  и  $\xi$  из уравнения (2.16) не представляется возможным, то для определения вида переднего фронта волнового следа ( $R = ub_1(\gamma, \xi)t$ ) были

проведены численные расчеты для значений  $\xi$ . Результаты этих расчетов для  $\xi = 1.01, 1.3, 1.8$  приведены в табл. 1 и на фиг. 1. Эти расчеты дают представление о процессе развития волн на свободной поверхности; из них, в частности, видно, что расстояние переднего фронта, от начала координат монотонно убывает с ростом  $\gamma$  (для фиксированного  $\xi$ ), и значение  $b_1(\gamma_1, \xi)$  будет тем меньше, чем меньше  $\xi$ , а  $b_1(0, \xi)$  равно единице независимо от  $\xi$ . В табл. 2 приведены значения предельного угла  $\gamma_1$  для различных значений  $\xi$ , рассчитанные по формуле (3.2).

Таблица 1

$\xi = u/c$	1.01	1.3	1.8
$\gamma$	$b_1(\gamma)$	$b_1(\gamma)$	$b_1(\gamma)$
81°56'	0.1404	—	—
64°44'	0.2644	—	—
50°17'	0.4034	0.6357	—
33°45'	0.6046	0.7342	0.8314
19°20'	0.8155	0.8546	0.8948
11°57'	0.9296	0.9322	0.9412
6°10'	0.9841	0.9848	0.9852
0°	1	1	1



Фиг. 1

4. Проведем анализ в случае  $\xi < 1$ . Функция  $\psi(r)$  при  $\xi < 1$  обращается в нуль при  $r = r_0 > 0$  и при  $r = \infty$  и имеет единственный экстремум (максимум) при  $r = r_4 (r_0 < r_4 < \infty)$ , представляющем собой положительный корень уравнения

$$\psi'(r_4) = 0 \tag{4.1}$$

В области  $r_0 \leq r < r_4$   $\psi(r)$  монотонно возрастает, а при  $r > r_4$  монотонно убывает с ростом  $r$ . Отсюда следует, что уравнение (2.16) для  $\gamma > \gamma_2$ , где

$$\gamma_2 = \arcs \operatorname{tg} \psi(r_4) \tag{4.2}$$

не имеет вещественных корней, а для  $\gamma < \gamma_2$  имеет два положительных корня, из которых один —  $r = r_2$  с убыванием  $\gamma$  убывает, а второй —  $r = r_3$  с убыванием  $\gamma$  возрастает ( $r_3 > r_2$ ). При  $\gamma = \gamma_2$  уравнение (2.16) имеет кратный корень  $r = r_4$ .

В установившемся движении нижний предел интеграла (2.11) равен  $r_0$ , поэтому в установившемся движении основные возмущения свободной поверхности, амплитуда которых имеет порядок  $R^{-1/2}$  и которые соответствуют стационарным точкам

Таблица 2  $r_2$  и  $r_3$  будут сосредоточены внутри угла

$\xi \geq 1$	$\gamma_1$	$\xi \leq 1$	$\gamma_2$	$ \gamma  \leq \gamma_2$
--------------	------------	--------------	------------	--------------------------

1	90°	1	90°	
1.005	84°	0.9983	80°43' (64°20')	
1.01	81°56'	0.9972	78° (61°3')	
1.039	75°	0.99	68°23' (51°15')	
1.175	60°	0.96	49°44' (37°54')	
1.414	45°	0.9378	42°30' (33°19')	
2.00	30°	0.92	38°19' (30°42')	
3.00	19°28'	0.8530	28°33' (24°55')	
4.00	14°28'	0.82	24°12' (23°18')	
5.00	11°32'	0.7	20°30' (20°17')	
10	5°44'	0.6	19°35' (19°34')	
20	2°52'	0.55	19°30' (19°30')	
141	0°24'	0.4739	19°28' (19°28')	
$\infty$	0°	0	19°28'	

где  $\gamma_2$  дается формулой (4.2) и зависит от величины  $\xi$ . Для определения зависимости предельного угла  $\gamma_2$  от величины  $\xi$  были проведены численные расчеты. Результаты этих расчетов приведены в табл. 2. В этой же таблице в скобках приведены соответствующие значения предельного угла  $\gamma_2$ , полученные [4] при решении установившейся задачи.

Как видно из сравнения этих значений при  $0 \leq \xi \leq 0.6$ , найденные и полученные в указанной работе значения

предельного угла фактически совпадают (расхождение не превышает одной минуты); при значениях  $0.6 < \xi \leq 0.82$  эти расхождения не превышают одного градуса, а при  $0.82 < \xi$  эти значения существенно различаются, при этом максимальное расхождение составляет около семнадцати градусов.

Такое расхождение значений объясняется, по-видимому, двумя причинами: во-первых, в работе [4] решение найдено путем суммирования возвышений, обусловленных концентрированными импульсами давления, прикладываемыми последовательно вдоль прямой линии на свободной поверхности, а выражение (1.3) представляет собой точное в линейной постановке решение для возвышения, обусловленного перемещающимся прямолинейно с постоянной скоростью поверхностным давлением (1.1); во-вторых, значение предельного угла в указанной работе получено в результате последовательного трехразового применения метода установившихся фаз к тройному интегралу, подынтегральная функция которого не содержит большого параметра, в то время как выражение (4.2) для предельного угла получено в результате однократного применения метода стационарных фаз к интегралу (2.11), содержащему большой параметр. Это дает, по мнению автора, известные основания полагать, что приведенные в табл. 2 значения угла  $\gamma_2$  более точны, чем полученные в работе [4].

Перейдем к дальнейшему анализу интеграла (2.11). В неустановившемся движении нижний предел  $Q_1$  этого интеграла представляет собой функцию от  $v (r_0 \leq Q_1(v) \leq \infty)$ , поэтому интеграл будет содержать вклад от стационарной точки  $r_k (k = 2, 3)$ , когда  $r_k > Q_1$  и не будет содержать этого вклада, когда  $r_k < Q_1$ . Условие  $r_k \leq Q_1$  можно записать в виде

$$R \leq ub_k(\xi, \gamma, r_k)t \tag{4.4}$$

где  $b_k$  дается формулой (3.4) с заменой индекса единица на индекс  $k$ .

Методом стационарных фаз для больших значений  $R$  находим

$$I_3 = \begin{cases} \pi i R^{-1/2} \sum_{k=2,3} A_k \exp \left\{ i \left[ RN_1(r_k) - 1/4\pi (-1)^k \right] \right\} & (0 < \gamma < \gamma) \\ \pi i R^{-1/2} A_4 \exp [iRN_1(r_4)] & (\gamma = \gamma_2) \\ O(R^{-1}) & (\gamma = 0, \gamma_2 < \gamma \leq \pi) \end{cases} \tag{4.5}$$

При этом коэффициенты  $A_2, A_3, A_4$  определяются формулами

$$A_k = \begin{cases} \sqrt{2\pi}/|N_1''(r_k)| \xi_2(r_k) & (R < ub_k t) \\ O(R^{-1/2}) & (R > ub_k t) \end{cases} \quad (k = 2, 3) \quad (4.6)$$

$$A_4 = \begin{cases} \xi_2(r_4) \Gamma(1/3) 3^{-1/2} 6^{1/3} [|N_1'''(r_4)|]^{-1/3} & (R < ub_4 t) \\ O(R^{-2/3}) & (R > ub_4 t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Из формул (2.10), (2.15), (4.5) получаем выражение для возвышения  $\zeta$

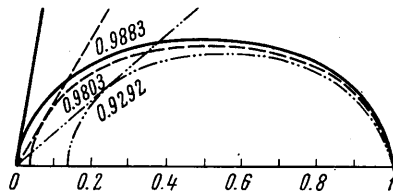
$$\zeta = \begin{cases} \eta_2 + \eta_3 & (0 < \gamma < \gamma_2) \\ \eta_4 & (\gamma = \gamma_2) \\ O(R^{-1}) & (\gamma = 0, \gamma_2 < \gamma \leq \pi) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\eta_k = -\frac{2p_0}{\pi \rho g} A_k \sin \left[ RN_1(r_k) - \frac{\pi}{4} (-1)^k \right] \quad (k = 2, 3), \quad \eta_4 = -\frac{2p_0}{\pi \rho g} A_4 \sin [RN_1(r_4)]$$

где  $A_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) даются формулами (4.6), (4.7).

Таким образом, основные возмущения свободной поверхности (волновой след) в рассматриваемом случае ( $\xi < 1$ ) сосредоточены внутри угла  $|\gamma| \leq \gamma_2$ , где  $\gamma_2$  дается формулой (4.2), слева от кривой  $R = ub_2(\gamma)t$ . Свободная поверхность внутри этого угла слева от кривой  $R = ub_3(\gamma)t$  ( $b_2 > b_3$ ) покрыта установившимися волнами, представляющими собой совокупность продольных  $\eta_3$  и поперечных  $\eta_2$  волн. Область свободной поверхности, заключенная между кривыми  $R = ub_2 t$  и  $R = ub_3 t$  ( $b_2(\gamma_2) = b_3(\gamma_2)$ ), покрыта только поперечными волнами, при этом передний фронт поперечных волн распространяется с большей скоростью, чем передний фронт продольных волн.

В общем случае найти  $r_2$  и  $r_3$  как функции от  $\gamma$  и  $\xi$  из уравнения (2.16) не представляется возможным, поэтому для определения вида переднего фронта поперечных волн ( $R_2 = ub_2 t$ ) и продольных ( $R = ub_3 t$ ) были проведены численные расчеты для ряда значений  $\xi$ . Результаты этих расчетов приведены в табл. 3 и на фиг. 2. Отсюда видно, что расстояние переднего фронта поперечных волн от начала координат монотонно возрастает с убыванием  $\gamma$  от  $\gamma_2$  до 0 и равно  $ut$  при  $\gamma = 0$  независимо от  $\xi$ ; расстояние от начала координат переднего фронта продольных волн при этом монотонно убывает и при  $\gamma = 0$  тем меньше, чем больше значение  $\xi$ .



Фиг. 2

Таблица 3

$\xi = u/c$	0.9983		0.9803		0.9292	
$\gamma$	$b_2 \cdot 10^{-2}$	$b_3 \cdot 10^{-3}$	$b_2 \cdot 10^{-1}$	$b_3 \cdot 10^{-2}$	$b_2 \cdot 10^{-1}$	$b_3 \cdot 10^{-1}$
80°43'	4.160	41.60	—	—	—	—
75°29'	11.446	13.52	—	—	—	—
59°59'	27.312	6.72	1.477	14.77	—	—
47°50'	41.147	4.98	3.705	6.478	—	—
40°21'	49.506	4.31	4.738	5.928	3.031	3.031
23°11'	75.264	3.62	7.474	4.257	7.279	1.541
6°58'	97.731	3.35	9.771	3.894	9.769	1.329
0°	100	3.30	10	3.861	10	1.324

5. Рассматривая задачу о затухании установившихся корабельных волн в жидкости конечной глубины, образованных давлениями вида (1.1), после прекращения действия давлений, находим такое выражение для возвышения жидкости

$$\zeta = \frac{2p_0}{\pi \rho g} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} I_2(r) dr \right]$$

где  $I_2$  дается формулой (2.8), а момент прекращения действия давлений принят за начальный ( $t = 0$ ). Учитывая результаты уже проведенного анализа интеграла  $I_2$ , получаем, что в случае  $\xi \geq 1$  вид свободной поверхности жидкости дается формулой (3.7), где  $A_1$  определяется формулой (3.6) с заменой знаков неравенств на обратные (там, где в формуле (3.7)  $R > ub_1t$ , нужно  $R < ub_1t$ , и наоборот). В случае  $\xi < 1$  вид свободной поверхности дается формулой (4.8), при этом  $A_2, A_3, A_4$  определяются формулами (4.6), (4.7) также с заменой знаков неравенств на обратные.

Отсюда видно, что в затухающем движении в жидкости конечной глубины основные возмущения при  $\xi \geq 1$  заключены внутри угла  $|\gamma| < \gamma_1$  справа от кривой  $R = ub_1t$ , а при  $\xi < 1$  внутри угла  $|\gamma| < \gamma_2$  справа от кривой  $R = ub_3t$ .

С увеличением времени  $t$  возвышение свободной поверхности в любой фиксированной точке стремится к нулю как величина порядка  $t^{-1}$ .

Приношу искреннюю благодарность Л. Н. Сретенскому за внимание к работе и В. С. Федосенко за помощь в проведении численных расчетов.

Поступило 26 VII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О волнах, поднимаемых кораблем при движении по круговому пути. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 1.
2. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению «мертвой воды». Ж. геофизики, 1934, т. 4, № 3.
3. Hogner E. Contribution to the theory of ship waves. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 1962, bd. 17, No. 12.
4. Havelock T. The Propagation of groups waves in dispersive media with application to waves on water produced by a travelling disturbance. Proc. Roy. Soc. (A), 1908, vol. 81, p. 398.
5. Scarpper G., Surface waves generated by a travelling pressure point. Proc. Roy. Soc. (A), 1964, vol. 282, No. 1391.
6. Черкесов Л. В. Развитие и затухание корабельных волн. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.

### ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА МАЛЫХ РАЗМЕРОВ В ВОДЕ ПРИ НАЛИЧИИ «ВНЕШНЕГО ПОТОКА»

С. С. ГРИГОРЯН, Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

При неустановившемся движении твердого тела в жидкости на тело действуют силы и моменты, обусловленные, с одной стороны, нестационарностью движения, которые действовали бы на тело при потенциальном движении жидкости (это — первая группа сил и моментов), и с другой стороны, силы чисто аэродинамической природы (сопротивление, подъемная сила и т. д.), обусловленные возникновением циркуляции и стеканием с поверхности тела вихревых следов (вторая группа сил). Силы второй группы существуют и при стационарном обтекании тела.

В работе даются общие формулы для сил и моментов, действующих со стороны жидкости на тело произвольной формы, движущееся произвольным образом в идеальной несжимаемой жидкости и порождающее потенциальное непрерывное движение жидкости, которое налагается на уже имеющееся в жидкости произвольное потенциальное движение (волны, течения). Они определяют первую группу сил и моментов из перечисленных выше.

Рассмотрим неустановившийся потенциальный поток несжимаемой идеальной жидкости, который может быть обусловлен как расположением особенностей в области движения, так и граничными условиями на поверхности  $\Sigma_i(x, y, z, t)$ , ограничивающих область движения.

Пусть  $U(x, y, z, t)$  — поле скоростей этого потока (назовем его внешним потоком), а  $\varphi_1(x, y, z, t)$  — его потенциал,  $\text{grad } \varphi = U$ . Предположим теперь, что в некоторую точку внешнего потока  $(x, y, z)$ , которая имела скорость  $U(x, y, z, t)$ , внесено тело, размеры которого  $L$  таковы, что выполняется неравенство

$$|L \text{ grad } |U|| \ll |V - U| \quad (1)$$

где  $V$  — скорость внесенного тела. Это неравенство означает, что скорости внешнего потока, которые были бы при отсутствии тела в этом месте, мало меняются на протяжении длины тела.

Решение задачи об определении потенциала скоростей движения жидкости, вызванного внешним потоком  $U$  и движением тела, будем искать в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_1(x, y, z, t) + \varphi_2(x, y, z, t) \quad (2)$$