

ГИДРОСТАТИКА В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. О КОЛЬЦЕОБРАЗНЫХ ФИГУРАХ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ И ОБ ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Л. А. СЛОБОЖАНИН

(Харьков)

Рассматривается задача о кольцеобразных фигурах равновесия вращающейся невесомой жидкости, обладающей поверхностным натяжением, и об их устойчивости. Данному вопросу посвящены работы Шаррюо (изложение полученных им результатов см. в [1]), который рассматривал эволюцию форм кольцеобразных фигур равновесия и показал, что существует семейство устойчивых равновесных форм. Однако эти исследования Шаррюо являются неполными, а заключение о существовании устойчивых форм справедливо только для осесимметричных возмущений.

Ниже рассматриваются свойства кольцеобразных фигур равновесия вращающейся жидкости. По результатам численного интегрирования на ЭЦВМ построено семейство форм равновесия и приведены данные, позволяющие по совокупности физических параметров, определяющих состояние равновесия, находить соответствующую равновесную форму. При исследовании устойчивости используется методика работ [2, 3]. Результаты численного счета и асимптотические представления показывают, что не существует устойчивых кольцеобразных фигур равновесия вращающейся жидкости.

1. Постановка задачи. Общие свойства решений уравнения равновесия. Пусть однородная несжимаемая жидкость плотности ρ и объема v , заполняющая область Ω , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг некоторой оси z . Будем считать, что внешнее силовое поле отсутствует, силы самогравитации пренебрежимо малы, а на свободной поверхности жидкости действуют силы поверхностного натяжения. Вводя подвижную цилиндрическую систему координат r, θ, z , равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг оси z , рассмотрим в этой системе осесимметричные кольцеобразные (замкнутые, не пересекающие ось вращения) равновесные формы свободной поверхности Σ жидкости.

Форма равновесной линии L (линии пересечения поверхности Σ с полуплоскостью $\theta = \text{const}$) определяется решением следующей системы уравнений (см., например, [3, 4]):

$$\begin{aligned} r'' &= -z' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right), & z'' &= r' \left(-pr^2 + c - \frac{z'}{r} \right) \\ \left(p &= \frac{\rho\omega^2}{2\sigma} \right), & \left(' &= \frac{d}{ds} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь p — параметр размерности (длина) $^{-3}$; σ — коэффициент поверхностного натяжения; s — длина дуги линии L , которую проходят так, чтобы область Ω осталась справа (фиг. 1); c — неизвестная постоянная. Выражение в скобках в (1.1) представляет собой кривизну равновесной линии; эта кривизна считается положительной, если выпуклость линии направлена в сторону жидкости и отрицательной в противном случае.

Перейдем к безразмерным величинам R, Z, S, C и V по формулам:

$$R = rp^{1/3}, \quad Z = zp^{1/3}, \quad S = sp^{1/3}, \quad C = cp^{-1/3}, \quad V = vp \quad (1.2)$$

Тогда система (1.1) переписывается в виде

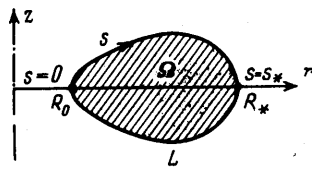
$$R'' = -Z' \left(-R^2 + C - \frac{Z'}{R} \right), \quad Z'' = R' \left(-R^2 + C - \frac{Z'}{R} \right) \quad \left(' = \frac{d}{dS} \right) \quad (1.3)$$

Можно показать, что решения системы (1.3) обладают следующими свойствами:

1. Функции $R(S), Z'(S)$ будут периодическими, дважды непрерывно дифференцируемыми функциями;

2. Все множество решений системы (1.3) исчерпывается (если отвлечься от несущественных сдвига вдоль оси z и начала отсчета дуги S) решениями с начальными условиями

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1 \quad (1.4)$$



Фиг. 1

Здесь R_0 , как и C — параметр решения (для определенности в дальнейшем будем считать, что R_0 — меньшее из двух значений, которые может принимать функция $R(S)$ в стационарных точках);

3. При условиях (1.4) функции $R(S) = R(-S)$, $Z(S) = -Z(-S)$.

Таким образом, имеется двухпараметрическое семейство решений системы (1.3) при начальных условиях (1.4). Для получения замкнутой интегральной кривой при заданном R_0 необходимо соответствующим образом подобрать значение C . Из результатов исследований, проведенных Шаррю, следует, что каждому значению R_0 соответствует одно и только одно значение $C = C_*(R_0)$, при котором интегральная кривая системы (1.3) будет замкнутой (при этом, конечно, не принимается во внимание

Таблица 1

| R_0 | C_* | R_* | V | $r_0 v^{-1/3}$ | $r_* v^{-1/3}$ | $\varphi_{21}(S_*)_{\lambda=0}$ | $\varphi_{22}'(S_*)_{\lambda=0}$ |
|-------|--------|-------|-------|----------------|----------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 0.01 | 1.189 | 2.077 | 8.579 | 0.005 | 1.015 | 121.493 | -105557 |
| 0.03 | 1.076 | 2.036 | 8.771 | 0.015 | 0.987 | 42.025 | -11274 |
| 0.05 | 0.977 | 2.001 | 8.854 | 0.024 | 0.967 | 25.821 | -3854 |
| 0.06 | 0.930 | 1.984 | 8.860 | 0.029 | 0.959 | 21.582 | -2602 |
| 0.07 | 0.885 | 1.968 | 8.859 | 0.034 | 0.951 | 18.474 | -1857 |
| 0.10 | 0.757 | 1.923 | 8.783 | 0.048 | 0.932 | 12.823 | -822.6 |
| 0.15 | 0.562 | 1.856 | 8.497 | 0.074 | 0.910 | 8.028 | -303.2 |
| 0.20 | 0.387 | 1.799 | 8.117 | 0.10 | 0.895 | 5.487 | -139.3 |
| 0.25 | 0.224 | 1.748 | 7.647 | 0.127 | 0.887 | 3.899 | -72.206 |
| 0.30 | 0.075 | 1.705 | 7.116 | 0.156 | 0.885 | 2.850 | -40.788 |
| 0.32 | 0.018 | 1.689 | 6.970 | 0.168 | 0.884 | 2.518 | -33.175 |
| 0.35 | -0.063 | 1.669 | 6.685 | 0.186 | 0.886 | 2.115 | -24.721 |
| 0.40 | -0.194 | 1.638 | 6.199 | 0.218 | 0.892 | 1.589 | -15.817 |
| 0.45 | -0.316 | 1.614 | 5.744 | 0.251 | 0.901 | 1.212 | -10.626 |
| 0.50 | -0.435 | 1.593 | 5.295 | 0.287 | 0.914 | 0.929 | -7.446 |
| 0.55 | -0.547 | 1.579 | 4.886 | 0.324 | 0.930 | 0.720 | -5.431 |
| 0.60 | -0.656 | 1.568 | 4.502 | 0.363 | 0.950 | 0.562 | -4.093 |
| 0.65 | -0.764 | 1.561 | 4.139 | 0.405 | 0.973 | 0.442 | -3.165 |
| 0.65 | -0.868 | 1.559 | 3.812 | 0.448 | 0.998 | 0.348 | -2.522 |
| 0.70 | -0.974 | 1.559 | 3.501 | 0.494 | 1.027 | 0.275 | -2.044 |
| 0.75 | -1.077 | 1.564 | 3.222 | 0.542 | 1.059 | 0.219 | -1.691 |
| 0.80 | -1.286 | 1.580 | 2.728 | 0.644 | 1.131 | 0.140 | -1.206 |
| 0.90 | -1.50 | 1.608 | 2.313 | 0.756 | 1.216 | 0.090 | -0.896 |
| 1.0 | -1.725 | 1.643 | 1.959 | 0.879 | 1.313 | 0.058 | -0.684 |
| 1.10 | -1.962 | 1.687 | 1.666 | 1.012 | 1.423 | 0.039 | -0.540 |
| 1.20 | -2.215 | 1.738 | 1.420 | 1.157 | 1.546 | 0.026 | -0.430 |
| 1.30 | -2.484 | 1.794 | 1.215 | 1.312 | 1.681 | 0.017 | -0.345 |
| 1.40 | -2.770 | 1.856 | 1.046 | 1.478 | 1.829 | 0.011 | -0.275 |
| 1.50 | -3.078 | 1.922 | 0.899 | 1.658 | 1.992 | 0.007 | -0.204 |
| 1.60 | -3.758 | 2.066 | 0.674 | 2.052 | 2.356 | 0.003 | -0.143 |
| 1.80 | -4.493 | 2.223 | 0.518 | 2.490 | 2.768 | 0.0018 | -0.103 |
| 2.0 | -5.840 | 2.473 | 0.351 | 3.260 | 3.505 | 0.0007 | -0.164 |
| 2.30 | -9.850 | 3.104 | 0.164 | 5.480 | 5.671 | 0.00008 | -0.019 |

не имеющий физического смысла случай, когда для каждого R_0 при $C = \pm\infty$ интегральная кривая вырождается в точку). Поэтому семейство кольцеобразных фигур равновесия вращающейся жидкости будет однопараметрическим. Из приведенных выше свойств следует, что для замкнутости интегральной кривой системы (1.3) при начальных условиях (1.4) необходимо, чтобы кривизна в начальной точке $R = R_0$, $Z = 0$ была отрицательной ($C < R_0^2 + R_0^{-1}$) и чтобы во второй стационарной точке функции $R(S)$ значение Z' равнялось минус единице.

Значения $C_*(R_0)$ определялись «методом выстрела» при помощи численного интегрирования на ЭЦВМ М-20 системы (1.3) при начальных условиях (1.4). Величины C_* для отдельных значений R_0 приведены в табл. 1.

Прежде чем переходить к свойствам кольцеобразных фигур равновесия, укажем сначала на свойства интегральных линий задачи (1.3), (1.4), для которых выполняются необходимые условия замкнутости. Умножив второе уравнение системы (1.3) на R и интегрируя обе части в интервале от нуля до S , получим

$$Z'R = -\frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{2}CR^2 + C_0, \quad C_0 \equiv \frac{1}{4}R_0^4 - \frac{1}{2}CR_0^2 + R_0 \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) совместно с соотношением $R'^2 + Z'^2 = 1$ представляют собой систему, эквивалентную системе (1.3). Используя соотношение (1.5), приходим к сле-

дующим выводам о свойствах интегральных кривых системы (1.3) для значений $C < R_0^2 + R_0^{-1}$ (при этом достаточно рассмотреть участки этих интегральных кривых, длина которых равна полупериоду функций $R(S)$, $Z'(S)$).

1. Если $R_0 < 2^{-1/3}$, то

а) для значений $C < C_1 \equiv [12(R_0^4 + R_0)]^{1/2} - 3R_0^2$ кривизна интегральных кривых всюду отрицательна и

$$Z' = 0 \quad \text{при} \quad R = R_1 \equiv (C + \sqrt{C^2 + 4C_0})^{1/2}$$

$$Z' = -1 \quad \text{при} \quad R = R_2 \equiv \frac{1}{3}R_0 + (-q + \sqrt{q^2 + t^3})^{1/3} + (-q - \sqrt{q^2 + t^3})^{1/3}$$

$$(q = -^{10}/_{27}R_0^3 + ^2/3R_0C - 2, \quad t = ^2/9R_0^2 - ^2/3C)$$

б) при $C_1 \leq C < C_2$, где

$$C_2 \equiv \frac{5}{6}R_0^2 + (-d + \sqrt{1/2(1/3R_0^3 + 9/2)^3})^{1/3} + (-d - \sqrt{1/2(1/3R_0^3 + 9/2)^3})^{1/3}$$

$$d = ^1/_{216}R_0^6 + ^5/4R_0^3 - ^{27}/4$$

рассматриваемые участки интегральных кривых имеют две точки перегиба

$$R = R_3 \equiv (1/3C - \sqrt{1/9C^2 - 4/3C_0})^{1/2}, \quad R = R_4 \equiv (1/3C + \sqrt{1/9C^2 - 4/3C_0})^{1/2}$$

на этих участках $Z' = 0$ при $R = R_1$, $Z' = -1$ при $R = R_2$

в) при $C_2 \leq C < R_0^2 + R_0^{-1}$ на интегральных кривых отсутствуют точки, в которых $Z' = -1$.

2. Если $R_0 \geq 2^{-1/3}$, то при $C < R_0^2 + R_0^{-1}$ кривизна интегральной кривой всюду отрицательна. В этом случае

$$Z' = 0 \quad \text{при} \quad R = R_1, \quad Z' = -1 \quad \text{при} \quad R = R_2 \quad (C \leq C_2)$$

$$R = R_5 \equiv \frac{1}{3}R_0 + 2\sqrt{|t|} \cos(^1/3\gamma_1) \quad (2^{-1/3} \leq R_0 \leq (4.5)^{1/3})$$

$$C_2 < C < (R_0^2 + R_0^{-1}) \cos \gamma_1 = -q|t|^{-3/2}$$

$$R = R_5 \quad (R_0 > (4.5)^{1/3}), \quad C_2 < C \leq \frac{5}{9}R_0^2 + 3R_0^{-1}$$

$$R = R_6 \equiv \frac{1}{3}R_0 + 2\sqrt{|t|} \cos[^1/3(\pi - \gamma_2)], \quad \cos \gamma_2 = q|t|^{-3/2}$$

$$(R_0 > (4.5)^{1/3}, \quad \frac{5}{9}R_0^2 + 3R_0^{-1} < C < R_0^2 + R_0^{-1})$$

2. Свойства кольцеобразных равновесных форм. В табл. 2 приведены величины C_1 для значений $R_0 \leq 2^{-1/3}$. Сравнивая C_1 и C_* , приходим к выводу, что меридианальные сечения кольцеобразных фигур равновесия представляют собой замкнутые всюду выпуклые кривые при $R_0 \geq 0.07$. Если $R_0 \leq 0.06$, то эти кривые имеют точки перегиба при $R = R_3$ и $R = R_4$.

Для любых значений R_0 положение точки, в которой $Z' = 0$, определяется одним и только одним значением $R = R_1$.

Величина R_* , которую принимает функция $R(S)$ во второй стационарной точке, для кольцеобразных фигур равновесия может быть определена аналитически как R_2 , R_5 или R_6 в зависимости от значения R_0 и C_* . Значения внешнего экваториального радиуса $R_* = R_*(R_0)$, полученные численным интегрированием системы (1.3), приведены в табл. 1. Из приведенных данных следует, что с ростом R_0 значение R_* уменьшается, достигая минимального значения при $R_0 = 0.75$, а затем непрерывно увеличивается, причем $(R_* - R_0) \rightarrow 0$ при $R_0 \rightarrow \infty$.

На фиг. 2 показаны характерные решения системы (1.3), соответствующие случаю кольцеобразных фигур равновесия (показана только верхняя часть каждой кривой). Из результатов вычислений следует, что сначала с увеличением R_0 происходит сжатие кольца: его меридианальное сечение, вначале довольно удлиненное вдоль оси R , принимает почти эллиптическую форму, которая в дальнейшем, по мере роста R_0 , стремится к круговой (см. п. 3).

Для определения формы кольцеобразной фигуры равновесия при известных значениях объема v жидкости и других физических параметров σ , ω , ρ , определяющих состояние равновесия, необходимо согласно (1.2) определить V . По величине V , значения которой для совокупности кольцеобразных фигур равновесия приведены

Таблица 2

| R_0 | C_1 | R_0 | C_1 |
|-------|-------|------------|-------|
| 0.01 | 0.346 | 0.30 | 1.653 |
| 0.03 | 0.597 | 0.40 | 1.780 |
| 0.05 | 0.767 | 0.50 | 1.848 |
| 0.06 | 0.838 | 0.60 | 1.879 |
| 0.07 | 0.902 | 0.70 | 1.889 |
| 0.10 | 1.066 | $2^{-1/3}$ | 1.892 |
| 0.20 | 1.435 | | |

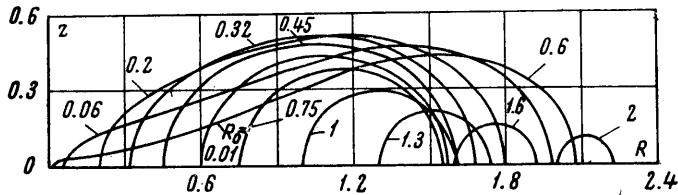
в табл. 1, находится соответствующая равновесная форма. Величина V с ростом R_0 вначале увеличивается от значения $V = 8.392$ при бесконечно малом R_0 до своего максимального значения, равного 8.66 при $R_0 = 0.06$, а затем убывает, стремясь к нулю при $R_0 \rightarrow \infty$. Если $V > 8.66$, то кольцеобразных фигур равновесия не существует.

Нетрудно видеть (см. (1.2)), что при заданном объеме v жидкости характер изменения V соответствует характеру изменения угловой скорости вращения.

Для определения истинных размеров кольца необходимо перейти от безразмерных величин R, Z к размерным r, z . Согласно (1.2)

$$r = R\sqrt[3]{v/V}, \quad z = Z\sqrt[3]{v/V}$$

В табл. 1 приведены с точностью до сомножителя $v^{-1/3}$ значения r_0 и r_* . Из этих данных следует, что с ростом R_0 значения r_0 монотонно возрастают, а r_* вначале убывают, достигая своего минимального значения при $R_0 = 0.32$, а затем возрастают.



Фиг. 2

При $R_0 \rightarrow 0$ кольцеобразные фигуры равновесия стремятся к предельной равновесной замкнутой форме жидкой вращающейся массы, пересекающей ось вращения (см., например, [4]).

3. Асимптотический вид формы кольца при $R_0 \rightarrow \infty$. Найдем асимптотическое выражение для формы кольцеобразной фигуры равновесия при $R_0 \rightarrow \infty$. Для этого проинтегрируем замену переменных

$$R = R_0 + \alpha + \alpha r^\alpha, \quad Z = \alpha z^\alpha, \quad S = \alpha s^\alpha, \quad \alpha = (R_0^2 - C_*)^{-1}$$

Здесь α — значение радиуса кривизны в начальной точке. Вводя полярные координаты P, ϑ

$$r^\alpha = -P(\vartheta) \cos \vartheta, \quad z^\alpha = P(\vartheta) \sin \vartheta$$

запишем уравнение (1.5) в виде

$$\frac{(P \sin \vartheta)'}{(P^2 + P'^2)^{1/2}} \left[1 + \alpha \frac{1 - P \cos \vartheta}{R_0} \right] = P \cos \vartheta - \left(\frac{\alpha}{2R_0} + \alpha^2 R_0 \right) \times \\ \times (1 - P \cos \vartheta)^2 - \alpha^3 (1 - P \cos \vartheta)^3 - \alpha^4 \frac{(1 - P \cos \vartheta)^4}{4R_0} \quad (3.1)$$

Значение α необходимо должно удовлетворять условию периодичности функции $P(\vartheta)$. Из (3.1) следует, что это условие имеет вид

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 + 2\pi} \frac{(P^2 + P'^2)^{1/2}}{1 + \alpha(1 - P \cos \vartheta)/R_0} \left[P \cos \vartheta - \left(\frac{\alpha}{2R_0} + \alpha^2 R_0 \right) (1 - P \cos \vartheta)^2 - \right. \\ \left. - \alpha^3 (1 - P \cos \vartheta)^3 - \alpha^4 \frac{(1 - P \cos \vartheta)^4}{4R_0} \right] d\vartheta = 0 \quad (\vartheta_0 \neq 0) \quad (3.2)$$

Принимая при $R_0 \rightarrow \infty$ величины $\beta = \alpha/R_0$ и $\varepsilon = \alpha^2 R_0$ малыми и разлагая $P(\vartheta)$ в степенной ряд по этим величинам

$$P(\vartheta) = P_0(\vartheta) + P_{10}(\vartheta)\beta + P_{01}(\vartheta)\varepsilon + \dots \quad (3.3)$$

из уравнения (3.1) находим

$$P_0 = 1, \quad P_{10} = A_1 \sin \vartheta - 1/2 \vartheta \sin \vartheta \quad (A_1, A_2 = \text{const}) \\ P_{01} = A_2 \sin \vartheta - 2(1 - \cos \vartheta) + \vartheta \sin \vartheta \quad (3.4)$$

Подставляя первое приближение для $P(\vartheta)$ в условие (3.2), находим, что $\beta = 2\varepsilon$. Таким образом, в первом приближении

$$\alpha = (2R_0^2)^{-1} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.3), а также используя условия $P'(0) = 0$, $P'(\pi) = 0$, получаем

$$P(\vartheta) = 1 - (1 - \cos \vartheta) / 2R_0^3 + O(R_0^{-6}) \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует, что при больших R_0 значение C_* равно $-R_0^2$ (можно показать, что погрешность такой оценки порядка R_0^{-1}).

Итак, при $R_0 \gg 1$ осевое сечение кольца с точностью до малых высшего порядка совпадает с кругом радиуса α . Тогда

$$V \sim 2\pi R_0 \alpha^2 \sim \pi^2 / 2R_0^3$$

Отсюда находится R_0 (а значит, и α) как функция $V R_0 \sim (\pi^2 / 2V)^{1/3}$.

4. Формулировка задачи об устойчивости кольцеобразных фигур равновесия. Исследуем вопрос об устойчивости рассмотренных кольцевых фигур. Будем считать жидкость вязкой. Кроме того, предполагается, что центр масс жидкости в возмущенном движении совпадает с ее центром масс в состоянии относительного равновесия.

Под устойчивостью состояния равновесия вращающейся жидкости будем понимать устойчивость равновесной формы ее свободной поверхности [5, 6].

В дальнейшем при решении задачи об устойчивости будем следовать методике работ [2, 3]. Исходя из известного принципа минимума потенциальной энергии (см., например, [5, 6]) и сводя задачу минимума к проблеме собственных значений некоторой линейной краевой задачи относительно нормальной составляющей $N(u, w)$ возмущения свободной поверхности, можно вопрос об устойчивости привести к определению знака наименьшего собственного значения этой задачи. Выбирая в качестве криволинейных координат u, w на поверхности Σ полярный угол θ и длину дуги S равновесной линии L и представляя $N(S, \theta)$ в виде ряда

$$N(S, \theta) = \varphi_0(S) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(S) \cos n\theta + \psi_n(S) \sin n\theta]$$

получим краевую задачу для $\varphi_0(S)$, бесконечную систему краевых задач для функций $\varphi_n(S)$ и эквивалентную систему задач для функций $\psi_n(S)$. Как показано в [2, 3], устойчивость осесимметричной равновесной поверхности определяется по знаку наименьшего собственного значения λ_{01} краевой задачи для функции $\varphi_0(S)$ (устойчивость относительно осесимметричных возмущений) и по знаку наименьшего собственного значения λ_{k1} задачи для $\varphi_k(S)$ (устойчивость относительно неосесимметричных возмущений), где $k \geq 1$ — минимальный порядок гармоник, соответствующих неосесимметричным возмущениям, допустимым условиями задачи.

В [4] показано, что то и только то семейство кольцеобразных фигур равновесия, в котором с ростом r_0 происходит одновременное уменьшение значений ω и r_* (т. е. семейство, отвечающее значениям $0.06 < R_0 < 0.32$), является устойчивым по отношению к осесимметричным возмущениям.

Рассмотрим вопрос об устойчивости осесимметричных кольцевых фигур равновесия по отношению к неосесимметричным возмущениям. Из-за связей, наложенных на положение центра масс жидкости, возмущения по первой гармонике исключаются, и самыми опасными из неосесимметричных возмущений являются возмущения, соответствующие второй гармонике ($k=2$). Для каждой кольцеобразной фигуры равновесия (см., например, [3]) вопрос об устойчивости по отношению к возмущениям, соответствующим второй гармонике, приводится к определению знака наименьшего значения λ , при котором уравнение

$$\varphi_2'' + \frac{R'}{R} \varphi_2' - \left(A + \frac{4}{R^2} - \lambda \right) \varphi_2 = 0, \quad A = 2RZ' - \left(-R^2 + C_* - \frac{Z'}{R} \right)^2 - \left(\frac{Z'}{R} \right)^2 \quad (4.1)$$

имеет ненулевое решение $\varphi_2(S)$, которое представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую периодическую функцию с периодом, равным безразмерной длине $2S_*$ линии L (если наименьшее собственное значение λ_{21} положительно, то фигура равновесия устойчива, если отрицательно — неустойчива).

Будем строить решения уравнения (4.1), исходя из начальной точки $S=0$ и двигаясь вдоль равновесной линии L в противоположных направлениях до экваториальной точки $S = \pm S_*$. Тогда условие получения периодического решения уравнения (4.1) выражается через условия склеивания обоих решений $\varphi_2(S)$ и $\varphi_2(-S)$ в точке $S = \pm S_*$

$$\varphi_2(S_*) - \varphi_2(-S_*) = 0, \quad \varphi_2'(S_*) - \varphi_2'(-S_*) = 0 \quad (4.2)$$

Общее решение уравнения (4.1) можно представить в виде

$$\varphi_2(S) = B_1 \varphi_{21}(S) + B_2 \varphi_{22}(S) \quad (4.3)$$

$$\varphi_{21}(0) = 0, \quad \varphi_{21}'(0) = 1; \quad \varphi_{22}(0) = 1, \quad \varphi_{22}'(0) = 0 \quad (4.4)$$

Здесь B_1, B_2 — произвольные постоянные. Подставляя (4.3) в (4.2), получим однородную систему уравнений для коэффициентов B_1 и B_2 , которая имеет нетривиальное решение при условии

$$\begin{vmatrix} \varphi_{21}(S_*) - \varphi_{21}(-S_*) & \varphi_{22}(S_*) - \varphi_{22}(-S_*) \\ \varphi_{21}'(S_*) - \varphi_{21}'(-S_*) & \varphi_{22}'(S_*) - \varphi_{22}'(-S_*) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

Учитывая, что равновесная линия L симметрична относительно оси r , легко видеть, что $\varphi_{21}(S)$ является нечетной функцией, а $\varphi_{22}(S)$ — четной. Поэтому условие (4.5) принимает вид

$$\varphi_{21}(S_*) \varphi_{22}'(S_*) = 0 \quad (4.6)$$

Таким образом, если наименьшее собственное значение λ_{21} задачи (4.1), (4.6) положительно, то кольцеобразная фигура равновесия устойчива, если отрицательно — неустойчива.

Ниже, не прибегая к вычислению величины λ_{21} , будет показано, что все кольцеобразные фигуры равновесия являются неустойчивыми.

5. Неустойчивость кольцевых фигур. Доказательство неустойчивости проведем в два этапа. Сначала покажем, что в непрерывном семействе всех кольцеобразных фигур нет границы, отделяющей область устойчивых равновесных состояний от области неустойчивых, т. е. либо все фигуры равновесия устойчивы относительно несимметричных возмущений, либо все неустойчивы. Затем рассмотрим некоторую конкретную равновесную фигуру и докажем, что она неустойчива относительно несимметричных возмущений.

Покажем, что для всех кольцеобразных фигур равновесия знаки λ_{21} задачи (4.1), (4.6) одинаковы. Для этого достаточно установить, что в непрерывном семействе кольцевых равновесных фигур нет такого равновесного состояния, для которого $\lambda = 0$ является собственным значением задачи (4.1), (4.6).

Положим в (4.1) $\lambda = 0$

$$\varphi_2'' + \frac{R'}{R} \varphi_2' - \left(A + \frac{4}{R^2} \right) \varphi_2 = 0 \quad (5.1)$$

Определим для какой кольцеобразной фигуры равновесия задача (5.1), (4.6) имеет решение. Для семейства кольцевых фигур уравнение (5.1) было проинтегрировано на ЭЦВМ от $S = 0$ при начальных условиях (4.4) до $S = S_*$. Полученные величины $\varphi_{21}(S_*)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(S_*)|_{\lambda=0}$ для равновесных форм со значениями $0.01 \leq R_0 \leq 3$ приведены в табл. 1. Из результатов вычислений следует, что для последовательности кольцеобразных фигур равновесия, характеризуемой возрастающими значениями R_0 , соответствующие значения $\varphi_{21}(S_*)|_{\lambda=0}$ положительны и монотонно убывают, а $\varphi_{22}'(S_*)|_{\lambda=0}$ отрицательны и также по модулю монотонно убывают.

Пользуясь приведенными в п. 3 асимптотическими выражениями для формы кольца, можно найти асимптотическое представление функций $\varphi_{21}(\vartheta)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(\vartheta)|_{\lambda=0}$ при $R_0 \rightarrow \infty$

$$\varphi_{21}(\vartheta)|_{\lambda=0} = \frac{1}{2} R_0^2 \sin \vartheta - \sin \vartheta (1 - \cos \vartheta) / 4 R_0^5 + O(R_0^{-9}) \quad (5.2)$$

$$\varphi_{22}'(\vartheta)|_{\lambda=0} = -2 R_0^2 \sin \vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta / R_0 + O(R_0^{-4}) \quad \left(= \frac{d}{dS} \right) \quad (5.3)$$

Так как $S = S_*$ при $\vartheta = \pi$, то из (5.2), (5.3) находим, что при $R_0 \rightarrow \infty$ соответствующие значения $\varphi_{21}(S_*)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(S_*)|_{\lambda=0}$ стремятся к нулю.

Из возможности асимптотического разложения по отрицательным степеням R_0 вытекает, что функции $\varphi_{21}(S_*)|_{\lambda=0}(R_0)$ и $\varphi_{22}'(S_*)|_{\lambda=0}(R_0)$ монотонны для достаточно больших R_0 , а поэтому (учитывая и результаты вычислений) являются монотонными для всех рассматриваемых значений R_0 .

Таким образом, приходим к выводу, что для последовательности кольцеобразных фигур равновесия значения $\varphi_{21}(S_*)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(S_*)|_{\lambda=0}$ никогда не переходят через нуль, т. е. ни для одной из кольцевых фигур $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.1), (4.6).

Теперь выберем некоторую конкретную равновесную форму и покажем, что она неустойчива. Для этого рассмотрим участок данной формы от $S = 0$ до $S = S_1$ и построим на нем краевую задачу, которая имеет вид уравнения (4.1) с граничным условием

$$\varphi_{21}(S_1) \varphi_{22}'(S_1) = 0 \quad (5.4)$$

Так как наименьшее собственное значение λ_{21}^* задачи (4.1), (5.4) является непрерывной функцией S_1 , то при непрерывном изменении S_1 от $S = 0$ до $S = S_*$ величина λ_{21}^* непрерывно изменяется от значения λ_{\min} , равного асимптотическому значению λ_{21}^* при $S_1 \rightarrow 0$, до значения λ_{21} задачи (4.1), (4.6). Если $\lambda_{\min} > 0$ и при непрерывном изменении S_1 от $S = 0$ до $S = S_*$ значение $D = \varphi_{21}(S_1)|_{\lambda=0} \varphi_{22}'(S_1)|_{\lambda=0}$ только один раз изменяет знак, то $\lambda_{21} < 0$ и кольцеобразная фигура равновесия неустойчива [3].

Найдем асимптотическое выражение λ_{\min} . При $S_1 \rightarrow 0$ уравнение (4.1) вырождается в уравнение

$$\varphi_2'' - (A_0 + 4R_0^{-2} - \lambda)\varphi_2 = 0 \quad (5.5)$$

Здесь A_0 — значение A в начальной точке $S = 0$. Учитывая условия (4.4), из (5.5) находим, что

$$\varphi_{21}(S) = \text{sh } \mu S, \quad \varphi_{22}(S) = \text{ch } \mu S, \quad \mu = \sqrt{A_0 + 4R_0^{-2} - \lambda}$$

Тогда условие (5.4) запишется в виде $\mu \text{sh}^2 \mu S_1 = 0$. Отсюда следует, что

$$\mu = i\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \text{т. е. } \lambda_k = A_0 + 4R_0^{-2} + \pi^2 k^2 S_1^{-2}$$

Таким образом, асимптотическое выражение для наименьшего собственного значения задачи (4.1), (5.4) при $S_1 \rightarrow 0$ имеет вид

$$\lambda_{\min} = A_0 + 4R_0^{-2} \equiv 2R_0 - (-R_0^2 + C_* - R_0^{-1})^2 + 3R_0^{-2} \quad (5.6)$$

При исследовании на устойчивость была выбрана кольцеобразная фигура равновесия с $R_0 = 0.2$. Подставляя в (5.6) значение $R_0 = 0.2$ и соответствующее значение $C_* = 0.387$, находим, что $\lambda_{\min} > 0$. Путем численного интегрирования уравнения (5.1) (при начальных условиях (4.4) вдоль линии L , соответствующей кольцеобразной фигуре равновесия с $R_0 = 0.2$, были построены функции $\varphi_{21}(S)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(S)|_{\lambda=0}$ ($0 \leq S \leq S_*$). Они представлены на фиг. 3. Из результатов вычислений видно, что на указанном интервале изменения S функция $\varphi_{21}(S)|_{\lambda=0}$ не меняет знак, а $\varphi_{22}'(S)|_{\lambda=0}$ изменяет знак только один раз. Следовательно, при непрерывном изменении S_1 от $S = 0$ до $S = S_*$ величина D только один раз изменяет знак и поэтому $\lambda_{21} < 0$. Значит, кольцеобразная фигура равновесия с $R_0 = 0.2$ неустойчива относительно неосесимметричных возмущений.

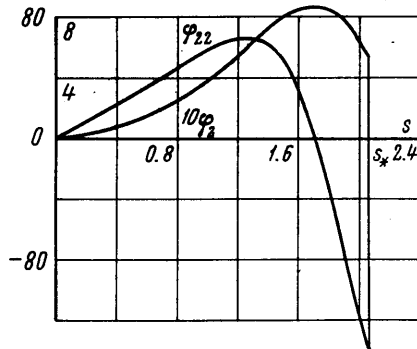
В качестве проверки аналогичные вычисления были проведены для равновесной фигуры с $R_0 = 0.01$. Для нее также $\lambda_{\min} > 0$, а поведение функций $\varphi_{21}(S)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_{22}'(S)|_{\lambda=0}$ ($0 \leq S \leq S_*$) качественно совпадает с поведением соответствующих функций для кольцеобразной фигуры с $R_0 = 0.2$.

Автор благодарит М. А. Беляеву, составившую программу для численного счета, а также Н. Д. Копачевского, А. Д. Мышкина и А. Д. Тюпцова за обсуждение полученных результатов и полезные замечания.

Поступило 6 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. ОНТИ, 1936, стр. 301—312.
2. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
3. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. «Математические методы в динамике космических аппаратов. Вып. 6. Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости.» Изд. ВЦ АН СССР, 1968.
4. Слобожанин Л. А. Гидростатика в слабых силовых полях. Равновесные формы поверхности вращающейся жидкости в условиях невесомости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
6. Мойсеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965, стр. 168—186.



Фиг. 3