

РЕШЕНИЕ В ОДНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ СОПЛА МАКСИМАЛЬНОЙ ТЯГИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗА С ИНОРОДНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. Н. КРАЙКО, В. К. СТАРКОВ, Л. Е. СТЕРНИН

(Москва)

Ввиду сложности точного решения вариационной задачи о построении оптимального сопла при течении газа с инородными частицами (см., например, [1]) представляет интерес ее решение в одномерном приближении. В известных исследованиях такого рода, выполненных Марблом [2] и Л. Е. Стерниным [3], кроме предположения об одномерности существенную роль играют дополнительные допущения о малости разностей скоростей (и температур) газа и частиц, характеризующих динамическое и тепловое запаздывание. Вытекающая отсюда линеаризация, применяемая в [2, 3], не только еще более сужает область справедливости одномерного приближения, но и приводит к некоторым качественным особенностям, не соответствующим действительному течению. Так, например, оказывается [3], что изменение кривизны контура лишь в одной точке может давать конечное приращение тяги.

Ниже решение указанной задачи получено без дополнительных предположений о малости отставания и соответствующей линеаризации.

1. Пусть ось x направлена по оси сопла и отсчитывается от некоторого начального сечения a , а y — ордината стенки сопла. Параметрам в сечениях a, b, \dots будем приписывать соответствующие нижние индексы (исключение — индекс s). Если w, T, p, ρ и h — скорость, температура, давление, плотность и удельная энтальпия газа, а w_s, T_s, ρ_s и e_s — скорость, температура, плотность и внутренняя энергия «газа» частиц, то при отсутствии внешних воздействий и при пренебрежении объемом частиц одномерное стационарное течение смеси газа и частиц в приближении двухскоростной и двухтемпературной модели сплошной среды описывается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \rho w y^{1+\nu} &= m, & \rho_s w_s y^{1+\nu} &= m_s \\ L_1 &\equiv \rho w w' + \rho_s w_s w_s' + p' = 0, & L_2 &\equiv w_s' - f = 0 \\ L_3 &\equiv T_s' - q = 0, & w^2 + 2h + \frac{m_s}{m} (w_s^2 + 2e_s) &= H \\ \rho &= \rho(p, T), & h &= h(p, T), & e_s &= e_s(T_s) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь штрихом обозначены полные производные по x ; функции, стоящие в правых частях трех последних равенств, считаются известными; константы m, m_s и H определяются по значениям левых частей в начальном сечении; $\nu = 0$ и 1 для плоского и осесимметричного сопла, соответственно. Сила f и тепловой поток q , характеризующие взаимодействие газа и частиц, если известны функции параметров течения, т. е.

$$f = f(p, T, T_s, w, w_s), \quad q = q(p, T, T_s, w, w_s) \quad (1.2)$$

Конечные уравнения из (1.1) позволяют определить w, h, ρ, ρ_s и e_s через p, T, w_s, T_s и константы H и (m_s/m) . Отсюда при фиксированных параметрах потока в начальном сечении (y_a при этом может изменяться) найдем, что

$$\delta \xi = \xi^{(0)} \delta p + \xi^{(1)} \delta T + \xi^{(2)} \delta w_s + \xi^{(3)} \delta T_s \quad (1.3)$$

где $\delta\xi$ — вариация ξ , под ξ понимается любой из параметров w, h, ρ, ρ_s или e_s , а коэффициенты $\xi^{(i)}$ равны

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= -h_p / w, & w^{(1)} &= -h_T / w, & w^{(2)} &= -m_s w_s / m w \\ \rho^{(3)} &= -m_s e_{sT} / h w, & h^{(0)} &= h_p, & h^{(1)} &= h_T, & \rho^{(0)} &= \rho_p \\ \rho^{(1)} &= \rho_T, & e_s^{(3)} &= e_{sT}, & \rho_s^{(0)} &= \rho_s (\rho_p w^2 - \rho h_p) / \rho w^2 \\ \rho_s^{(1)} &= \rho_s (\rho_T w^2 - \rho h_T) / \rho w^2, & \rho_s^{(2)} &= -\rho_s (1 + m_s w_s^2 / m w^2) w_s^{-1} \\ \rho_s^{(3)} &= -m_s \rho_s e_{sT} / m w^2, & h^{(2)} &= h^{(3)} = \rho^{(2)} = \rho^{(3)} = e_s^{(0)} = e_s^{(1)} = e_s^{(2)} = 0 \\ h_p &= \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T, & h_T &= \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, & \rho_p &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T, & \rho_T &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, & e_{sT} &= \frac{de_s}{dT} \end{aligned}$$

Соотношения (1.3) сохраняются и в случае замены вариаций дифференциалами или производными. Отсюда и из (1.1) можно получить уравнения

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y(1-M^2)}{(1+\nu)\rho w^2} p' - \frac{y m_s f}{(1+\nu)m w} \left[\frac{\rho_T w}{\rho h_T} (w - w_s) - 1 \right] + \frac{y m_s \rho_T e_{sT} q}{(1+\nu)\rho h_T m} \quad (1.4) \\ T' &= \frac{1 - \rho h_p}{\rho h_T} p' + \frac{m_s}{m h_T} [(w - w_s) f - e_{sT} q] \end{aligned}$$

которые удобно использовать при численном интегрировании вместо третьего и шестого уравнений (1.1). В (1.4) число Маха $M = w / c$, где c — скорость звука в чистом газе, определенная формулой

$$c^{-2} = \rho_p + \rho_T (1 - \rho h_p) / \rho h_T$$

Если форма канала, т. е. $y(x)$ будет известной функцией x , то первое уравнение (1.4) следует разрешить относительно p' .

Все величины в выписанных соотношениях удобно считать безразмерными. Пришем размерным величинам верхний индекс градус, и пусть l°, w_*° и ρ_*° — характерные размерные константы с размерностями длины, скорости и плотности, а R° — газовая постоянная газа. Тогда приведение к безразмерному виду достигается делением x° на l° , скоростей — на w_*° , плотностей — на ρ_*° , давления — на $\rho_*^\circ (w_*^\circ)^2$, энтальпии и внутренней энергии — на $(w_*^\circ)^2$, температур — на $(w_*^\circ)^2 / R^\circ$, силы f° — на w_*° / l° и теплового потока q — на $(w_*^\circ)^2 / l^\circ R^\circ$. При рассмотрении одномерных течений обезразмеривание y° удобно проводить делением не на l° , а на некоторую другую константу с размерностью длины. Беря в качестве последней y_a° , получим $y_a = 1$.

Прежде чем переходить к формулировке и решению вариационной задачи, следует указать границы применимости используемых одномерных уравнений. Эти границы определяются условиями, обеспечивающими достаточную точность одномерного приближения, и так же, как при решении аналогичной вариационной задачи для неравновесных течений [5], могут быть сформулированы в виде ограничений на угол раскрытия сопла. Вводя новую переменную $\zeta(x)$ уравнением

$$\zeta - y' = 0 \quad (1.5)$$

запишем указанные ограничения в виде неравенства

$$|\zeta| < k < \infty \quad (1.6)$$

где k — некоторая заданная константа (смысл данного условия состоит в том, что для обеспечения справедливости одномерного подхода углы раскрытия или сужения стенок сопла не должны быть слишком большими).

Для дальнейшего уравнение (1.5), вводящее ζ , удобно переписать в форме, не содержащей y' .

Исключая y' при помощи первого уравнения из (1.1), получим (1.7)

$$L_4 \equiv z + \frac{\rho'}{\rho^{1+\alpha} w^\alpha} + \frac{w'}{\rho^\alpha w^{1+\alpha}} = 0 \quad (\alpha = (1 + \nu)^{-1}, \quad z = (1 + \nu) m^{-\alpha} \zeta)$$

При этом, если $k_1 = k(1 + \nu) m^{-\alpha}$, то условие (1.6) заменится на

$$|z| < k_1 < \infty \quad (1.8)$$

Вид условий, которые для заданных параметров при $x = 0$ должны задаваться в выходном сечении сопла b , зависит от режима истечения. При дозвуковом истечении ($M_b < 1$) давление на срезе сопла p_b должно равняться давлению p^+ внешней среды вблизи среза. Если же p^+ / p_a достаточно мало, то $M_b \leq 1$, т. е. имеет место сверхзвуковой (или звуковой при $M_b = 1$) режим истечения, при котором в общем случае $p_b \neq p^+$. Этот режим и будет рассматриваться в дальнейшем.

2. Пусть требуется построить проходящий через заданные точки a и g контур ag сопла максимальной тяги, имеющего сверхзвуковой поток на срезе ($M_b \geq 1$), при известных параметрах в сечении a и заданных максимально допустимой длине и максимально допустимом поперечном размере Y . Если принять максимально допустимую длину за характерный размер l^0 , то $0 \leq x \leq 1$. Ввиду того, что при ограничении на длину оптимальный контур может содержать торец bg , где $x \equiv 1$, необходимо знать давление p^+ , действующее на часть контура, которая не обтекается газом. Будем считать, что p^+ задано и не зависит от формы искомого контура. Это выполняется, например, при истечении в пустоту, когда $p^+ = 0$.

Так как искомый контур состоит из участка ab , обтекаемого газом, и торца bg , на который действует постоянное давление p^+ , то сила χ , действующая на ag , с точностью до постоянного слагаемого и несущественного положительного множителя дается равенством

$$\chi = y_b^{1+\nu} p_b + m w_b + m_s w_{sb} + p^+ (y_g^{1+\nu} - y_b^{1+\nu}) \quad (2.1)$$

при получении которого сила χ_{ab} , действующая на ab , заменена, согласно третьему уравнению (1.1), разностью импульсов I в сечениях b и a

$$\chi_{ab} = I_b - I_a \quad (I = y^{1+\nu} p + m w + m_s w_s)$$

Точки b и g могут совпадать, т. е. торец может отсутствовать.

При фиксированном $y_a = 1$ и известных параметрах в сечении a выписанные выше уравнения позволяют для любой формы сопла $y(x)$ или распределения давления $p(x)$ найти параметры на срезе сопла и, следовательно, χ . Оптимальным является контур, обеспечивающий максимальное χ . Класс функций, среди которых ищется оптимальное решение, ограничен неравенством (1.8) и условиями

$$y(x) \leq y_g \leq Y, \quad 0 = x_a \leq x \leq x_b \leq x_g = 1 \quad (2.2)$$

Эти условия суть следствия задания положения точки g , а также ограничений, наложенных на размеры сопла. Ясно, что увеличение k_1 и Y ведет к ослаблению соответствующих ограничений, а равенства $k_1 = \infty$, $Y = \infty$ эквивалентны их отсутствию.

Сформулируем вариационную задачу. Среди допустимых функций $y(x)$, $z(x)$, $p(x)$, $w(x)$, $T(x)$, $\rho(x)$, $h(x)$, $w_s(x)$, $T_s(x)$, $\rho_s(x)$, $e_s(x)$, $f(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющих конечным и дифференциальным связям (1.1), (1.2) и (1.7), ограничениям (1.8) и (2.2) и начальным условиям, заданным при $x = 0$ и обеспечивающим при заданном p^+ сверхзвуковое истечение ($M_b > 1$), найти те, которые реализуют максимум функционала (2.1).

3. Пусть $\mu_i(x)$ — неопределенные переменные множители Лагранжа. Для решения сформулированной выше вариационной задачи составим функционал

$$\Sigma = \chi + \int_{x_a}^{x_b} \sum_{i=1}^4 \mu_i L_i dx$$

первая вариация которого при любом допустимом варьировании, в силу (1.1) и (1.7), совпадает с первой вариацией χ .

Найдем первую вариацию Σ .

При варьировании следует учесть, что контур ab в общем случае состоит из ряда участков, в точках стыковки которых могут иметься изломы. Предельным значениям различных величин слева (справа) от излома будем приписывать нижний индекс минус (плюс). Пользуясь произволом в выборе множителей Лагранжа, потребуем непрерывности первых трех из них во всех точках излома, т. е.

$$\mu_{i+} = \mu_{i-} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Исключая вариации δw , δh , δp , $\delta \rho_s$ и $\delta \epsilon_s$ при помощи (1.3), используя (3.1) и вытекающее из первого уравнения (1.1) равенство

$$\frac{1 + \nu}{m^\alpha} \delta y = - \frac{\delta \rho}{\rho^{1+\alpha} w^\alpha} - \frac{\delta w}{\rho^\alpha w^{1+\alpha}}$$

и учитывая ряд обстоятельств, подробно описанных в [5], найдем, что если контур ab состоит из произвольного числа гладких участков ac, cd, \dots , следующих в порядке перечисления, то

$$\begin{aligned} \delta \chi = \delta \Sigma = & (1 + \nu) \left[y^\nu (p - p^+) - \frac{\mu_4}{y \rho^\alpha w^\alpha} \right]_b \delta y_b + (1 + \nu) y_b^\nu y_b' \times \\ & \times (p_b - p^+) \Delta x_b + (y^{1+\nu} + \mu_1)_b (\delta p + \rho w \delta w + \rho_s w_s \delta w_s)_b + \\ & + \mu_{2b} \delta w_{sb} + \mu_{3b} \delta T_{sb} + \sum_{j=c, d, \dots} \left[\mu_4 \frac{1 + \nu}{m^\alpha} \delta y \right]_+ - \left[\mu_4 \frac{1 + \nu}{m^\alpha} \delta y \right]_- \Big|_j + \\ & + \int_{x_a}^{x_b} (W^{(0)} \delta p + W^{(1)} \delta T + W^{(2)} \delta w_s + W^{(3)} \delta T_s + \mu_4 \delta z) dx \quad (3.2) \end{aligned}$$

Здесь Δx_b — приращение абсциссы концевой точки контура ab , обтекаемого газом; $W^{(i)}$ — известные функции параметров течения, множителей Лагранжа и их производных; индекс b приписан предельным значениям параметров течения слева от точки b , а c, d, \dots — точки излома.

4. Для любого контура некоторые из слагаемых в (3.2) можно обратить в нули специальным выбором множителей Лагранжа. Определим μ_1 , μ_2 и μ_3 так, чтобы на участках непрерывности y' обращались в нули коэффициенты $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$. Отсюда с учетом выражений для указанных коэффициентов и некоторых преобразований, найдем, что на этих участках μ_1 , μ_2 и μ_3 определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \mu_1' = & \mu_1 \frac{\rho_T h_p - \rho_p h_T}{\rho h_T} p' - \mu_1 \frac{m_s}{m \rho h_T} \left[\rho_T (w - w_s) f - \frac{\rho h_T}{w} f - \rho_T \epsilon_{sT} q \right] + \\ & + \frac{\mu_2}{\rho h_T} \left(f_T - \frac{h_T f w}{w} \right) + \frac{\mu_3}{\rho h_T} \left(q_T - \frac{h_T q w}{w} \right) + \mu_4' \frac{\rho_T w^2 - \rho h_T}{h_T (\rho w)^{2+\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \frac{m_s \rho (w_s - w)}{m} \mu_1' + \mu_1 \frac{m_s}{m} \left(\frac{w_s - w}{c^2} + \frac{1}{w} \right) p' + \\
&+ \mu_1 \frac{m_s^2 (w_s - w)}{m^2} \left\{ \frac{\rho_T}{h_T} [(w - w_s) f - e_{sT} q] - \frac{\rho}{w} f \right\} + \\
&+ \mu_2 \left(\frac{m_s w_s}{m w} f_w - f_{w_s} \right) + \mu_3 \left(\frac{m_s w_s}{m w} q_w - q_{w_s} \right) + \frac{m_s w_s}{m \rho^\alpha w^{2+\alpha}} \mu_4' \\
\mu_3' &= \frac{m_s \rho e_{sT}}{m} \mu_1' + \mu_1 \frac{m_s e_{sT}}{m c^2} p' + \mu_1 \frac{m_s^2 e_{sT}}{m^2} \left\{ \frac{\rho_T}{h_T} [(w - \right. \\
&- w_s) f - e_{sT} q] - \frac{\rho}{w} f \left. \right\} + \mu_2 \left(\frac{m_s e_{sT}}{m w} f_w - f_{T_s} \right) + \\
&+ \mu_3 \left(\frac{m_s e_{sT}}{m w} q_w - q_{T_s} \right) + \frac{m_s e_{sT}}{m \rho^\alpha w^{2+\alpha}} \mu_4' \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Здесь индексы T, w, w_s, \dots, y, f и q приписаны соответствующим частным производным. Отметим, что непрерывность μ_1, μ_2 и μ_3 , т. е. выполнение равенств (3.1) обеспечивается автоматически, если (4.1) использовать и при прохождении точек излома.

В качестве начальных условий для интегрирования (4.1) положим

$$\mu_{1b} = -y_b^{1+\nu}, \quad \mu_{2b} = \mu_{3b} = 0 \quad (4.2)$$

Теперь коэффициент $W^{(0)}$ после некоторых преобразований с учетом (1.4) и (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
W^{(0)} &= \frac{\mu_1 m_s}{m \rho h_T} \left[\rho_T (w - w_s) f - \frac{\rho h_T}{w} f - \rho_T e_{sT} q \right] + \mu_2 \left(\frac{\rho h_p - 1}{\rho h_T} f_T - \right. \\
&- f_p + \frac{f_w}{\rho w} \left. \right) + \mu_3 \left(\frac{\rho h_p - 1}{\rho h_T} q_T - q_p + \frac{q_w}{\rho w} \right) - \frac{M^2 - 1}{\rho^{1+\alpha} w^{2+\alpha}} \mu_4' \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Наконец, пользуясь произволом в выборе μ_4 , положим

$$\begin{aligned}
W^{(0)} &= 0 \quad \text{при } |y'| = k \\
\mu_4 &= 0 \quad \text{при } |y'| < k \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Так как, в соответствии с (4.3) и (4.4), коэффициент $W^{(0)}$ при $|y'| < k$ не содержит y' и y'' , то рассматриваемая вариационная задача дважды вырождена, что характерно для вариационных задач одномерных газодинамических и магнитогидродинамических течений [5, 6].

Вид граничного условия для интегрирования первого уравнения (4.4) зависит от того, является ли правая граница участка $|y'| = k$ внутренней точкой участка ab или совпадает с точкой b . В первом случае потребуем, чтобы на каждом правом конце участка максимального наклона выполнялось равенство

$$\mu_{4-} = 0 \quad (4.5)$$

Если же участок $|y'| = k$ заканчивается в точке b , то здесь положим

$$\mu_{4b} = (y^{1+\nu} \rho^\alpha w^\alpha)_b (p_b - p^+) \quad (4.6)$$

Итак, для произвольного контура ag , начинающегося в точке a с координатами $x = 0, y = 1$ и реализующего течение с $M_b > 1$ при заданных расходах газа и частиц и других параметрах на входе, множители Лагранжа всегда можно выбрать так, что выражение для $\delta\chi$ примет вид

$$\delta\chi = (1 + \nu)y_b^\nu(p_b - p^+)\delta y_b + (1 + \nu)y_b^\nu y_b'(p_b - p^+)\Delta x_b + \quad (4.7)$$

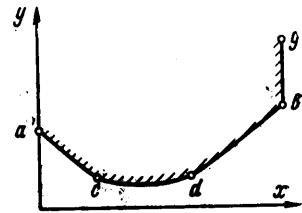
$$+ \sum_{j=l_1, l_2, \dots} \left(\mu_4 \frac{1 + \nu}{m^\alpha} \delta y \right)_{j^+} + \int_{|y'| < k} W^{(0)} \delta_p dx + \int_{|y'| = k} \mu_4 \delta z dx$$

Здесь l_1, l_2, \dots — левые концы участков $|y'| = k$, отличные от точки a , а первое слагаемое имеется лишь в случае, если $|y_b'| < k$. Как показано ниже, в общем случае это может быть только для неоптимального контура.

5. Условия, определяющие форму оптимального контура, находятся из рассмотрения коэффициентов в правой части (4.7), причем оптимальный контур может состоять из участков двустороннего экстремума, где $|y'| < k$, а δp произвольны, и участков краевого экстремума, где, в соответствии с (1.8), $y' = \pm k$, а условия их экстремальности записываются в виде неравенств.

Уравнение участка двустороннего экстремума имеет вид

$$W^{(0)} = 0 \quad (5.1)$$



Фиг. 1

При этом в выражении для $W^{(0)}$, как и в правых частях (4.1), следует опустить последние слагаемые, которые, будучи пропорциональны μ_4' , в соответствии с (4.4), обращаются в нуль. Отсюда, используя (4.2) и (4.3), как и при неравновесном течении [5], легко показать, что в общем случае участок двустороннего экстремума не может быть ни концевым, ни начальным участком контура ab . Поэтому указанные участки должны быть участками краевого экстремума, как это показано на фиг. 1, где ac и db — участки краевого экстремума, а cd — участок двустороннего экстремума. В соответствии с таким расположением участков в точке d следует требовать выполнения условия (4.5), а в точке b — условия (4.6). Напомним, что эти условия удовлетворяются за счет выбора множителей Лагранжа. С другой стороны, в сечении d , где знак δy_+ произволен, для оптимального (и только для оптимального) контура должно выполняться равенство

$$\mu_{4d+} = 0 \quad (5.2)$$

которое, в силу (4.2) и первого уравнения (4.4), определяет для каждого заданного p^+ оптимальное y_b . Если при этом $y_b < y_g$, то контур сопла содержит торец bg , где $x \equiv 1$.

Учитывая знаки допустимых вариаций δz на участках $y' = \pm k$, найдем, что здесь условия максимума χ , в соответствии с (4.7), имеют вид неравенства

$$\mu_4 \text{sign } y' \geq 0 \quad \text{при } |y'| = k \quad (5.3)$$

которое следует проверять на ac и db .

Для определения оптимальной длины нужно приравнять нулю множитель при Δx_b . Однако при $x_b = 1$ допустимые $\Delta x_b \leq 0$, и для обеспечения максимума χ этот множитель должен быть неотрицательным, т. е. должно выполняться условие

$$y_b^\nu y_b'(p_b - p^+) \geq 0 \quad (5.4)$$

причем неравенство может иметь место лишь при $x_b = 1$. В этом случае (5.4) есть условие того, что торец bg — участок краевого экстремума по x . Из (4.6) и (5.3) следует, что в общем случае, когда $y_b' = k$, для оптимального контура $p_b \geq p^+$. Поэтому условие (5.4) для оптимального контура выполняется всегда, и он имеет максимально допустимую длину ($x_b = 1$). Заметим, что неравенство $p_b \geq p^+$, являющееся вместе с (5.2) одномерным аналогом условий Буземана [7], для контуров, которые реализуют максимальную тягу при заданных длине и p^+ , выполняется во всех случаях, когда концевой элемент контура не параллелен оси x , причем это имеет место как при приближенных [5, 8], так и при точных подходах [7, 9, 10].

Полученные условия полностью определяют оптимальный контур. Для определения p' на cd следует продифференцировать (5.1) по x и исключить все производные, кроме p' , при помощи (1.1), (1.3), (1.4) и (4.1). В итоге, учитывая, что здесь $\mu_4' \equiv 0$, приходим к уравнению

$$p' = \Phi(p, T, w, T_s, w_s, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

где Φ — известная функция своих аргументов. Данное уравнение вместе с (1.4), (4.1), а также четвертым и пятым уравнениями из (1.1) образует полную систему дифференциальных уравнений для нахождения $y, p, T, w_s, T_s, \mu_1, \mu_2$ и μ_3 . При этом остальные величины, входящие в их правые части, определяются конечными соотношениями из (1.1). Два неиспользуемых при расчете конечных соотношения: (5.1) и шестое уравнение из (1.1), замененные дифференциальными уравнениями, служат для проверки правильности вычислений. Наконец, величина y' , найденная по первому уравнению (1.4), используется для проверки на cd условия (1.6).

Заканчивая этот раздел, остановимся на одном весьма важном обстоятельстве. Вариацию δp под знаком интеграла в (3.2) можно при помощи (1.3) и конечных связей из (1.1) выразить через $\delta y, \delta T, \delta w_s$ и δT_s . Однако в этом случае уравнение для μ_1 , полученное тем же путем, что и выше, имеет принципиальное отличие от первого уравнения (4.1). Отличие состоит в том, что в его правой части после исключения y' при помощи (1.4) как при $\mu_4' \equiv 0$, так и при $\mu_4' \neq 0$ появляется слагаемое, в знаменателе которого стоит $(1 - M^2)$. В соответствии с этим для обеспечения непрерывности μ_1 следует потребовать, чтобы в той же точке обращался в нуль и числитель указанного слагаемого. Это дает дополнительное условие для множителей Лагранжа, которое, на первый взгляд, не может быть удовлетворено. Хотя в действительности характер возникающей при этом особой точки системы, определяющей μ_1, μ_2 и μ_3 , всегда, как недавно показала Ф. А. Слободкина, позволяет удовлетворить это условие, необходимость специального рассмотрения точки, где $M = 1$, сильно усложняет исследование и особенно расчеты. В случае же уравнений (4.1) такая необходимость возникает лишь тогда, когда переход через скорость звука происходит на участке $|y'| = k$. Если оптимизация проводится не по тяге, а по некоторой другой интегральной характеристике (например, в случае течения проводящего газа — по мощности [6]), то оптимальный контур может содержать участок краевого экстремума $y = Y$, где допустимые $\delta y \leq 0$. Примененный выше прием остается эффективным и здесь. При этом в вспомогательный функционал Σ при помощи переменного множителя Лагранжа μ_5 следует включить первое уравнение (1.1), которое предварительно лучше переписать в виде

$$L_5 \equiv y - (m/\rho w)^{-\alpha} = 0$$

В результате в коэффициентах $W^{(i)}$ и в правых частях (4.1) появятся дополнительные слагаемые, пропорциональные μ_5 , а в подынтегральном выражении в (3.2) — член $\mu_5 \delta y$. Если теперь, пользуясь произволом в выборе μ_5 , положить

$$\begin{aligned} \mu_5 &= 0 & \text{при } y < Y \\ W^{(0)} &= 0 & \text{при } y = Y \end{aligned}$$

то уравнения, определяющие μ_1, μ_2, μ_3 и μ_4 на участках $y < Y$, останутся прежними (при $y = Y$ следует положить $\mu_4 \equiv 0$). В то же время условие того, что участок $y = Y$ есть участок краевого экстремума, примет вид

$$\mu_5 \geq 0 \quad \text{при } y = Y$$

6. Если тепловое отставание играет существенно меньшую роль, чем динамическое (а это имеет место во многих интересных для практики случаях), то оправдана однотемпературная модель, в которой температуры газа и частиц считаются совпадающими ($T_s \equiv T$), а скорости разными. Уравнения, описывающие такое течение, получаются из системы (1.1), если опустить в ней пятое и девятое уравнения, в шестом уравнении опустить e_s , а энтальпию заменить суммой $[h(p, T) + m_s e_s(T) / m]$. Как следствие этого, уравнения, определяющие параметры течения и множители Лагранжа, а также условия оптимальности, оказываются совпадающими с приведенными выше, если кроме уравнений, опущенных в (1.1), опустить третье уравнение (4.1), а в оставшихся положить

$$q = q_T = q_p = q_w = q_{w_s} = q_{T_s} = e_{sT} = \mu_3 = 0$$

Пусть в дополнение к этому сила f зависит только от скоростей газа и частиц, газ является совершенным с показателем адиабаты κ , а внутренняя энергия частиц пропорциональна их температуре, т. е.

$$(6.1)$$

$$f = f(w, w_s), \quad \rho = \frac{p}{T}, \quad h = h(T) = KT \quad \left(K = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{m_s}{m} \beta \right)$$

где $\beta = e_{sT}^\circ / R^\circ$ — константа.

В этом случае (1.4), (4.1) и (4.3) принимают вид

$$y' = \frac{y(1 - M^2)}{(1 + \nu)\rho w^2} p' - \frac{y m_s}{(1 + \nu)m} \left[\frac{\rho_T}{\rho h_T} (w - w_s) - \frac{1}{w} \right] f$$

$$T' = \frac{1}{\rho h_T} p' + \frac{m_s(w - w_s)}{m h_T} f$$

$$\mu_1' = -\frac{\mu_1}{p} p' + \mu_1 \frac{m_s}{m} \left[\frac{1}{w} - \frac{\rho_T}{\rho h_T} (w - w_s) \right] f - \mu_2 \frac{f_w}{\rho w} + \frac{\rho_T w^2 - \rho h_T}{h_T (\rho w)^{2+\alpha}} \mu_4'$$

$$\mu_2' = -\mu_1 \frac{m_s}{m} \left[\frac{\rho_T}{\rho h_T} (w - w_s) - \frac{1}{w} \right] p' +$$

$$+ \mu_1 \frac{m_s^2 (w_s - w)}{m^2} \left[\frac{\rho_T}{h_T} (w - w_s) - \frac{\rho}{w} \right] f +$$

$$+ \mu_2 \left(\frac{m_s w_s}{m w} f_w - f_{w_s} \right) + \frac{m_s w_s}{m \rho^\alpha w^{2+\alpha}} \mu_4'$$

$$W^{(0)} = \mu_1 \frac{m_s}{m} \left[\frac{\rho_T}{\rho h_T} (w - w_s) - \frac{1}{w} \right] f + \mu_2 \frac{f_w}{\rho w} - \frac{M^2 - 1}{\rho^{1+\alpha} w^{2+\alpha}} \mu_4' \quad (6.2)$$

Используя третье и четвертое уравнения из (1.1), можно проинтегрировать уравнения для μ_1 и μ_2 из (6.2) на участке двустороннего экстремума cd , где $\mu_4 = W^{(0)} = 0$. В результате получим, что здесь

$$\mu_1 p = \text{const}, \quad \mu_2 f = \text{const} \quad (6.3)$$

Кроме того, подставив найденные отсюда μ_1 и μ_2 в $W^{(0)}$, найдем, что на cd

$$\frac{f^2}{p f_w} \left[\rho - \frac{\rho_T w}{h_T} (w - w_s) \right] = \text{const} \quad (6.4)$$

причем константы в правых частях (6.3) и (6.4) определяются по значениям параметров в любой точке cd , например, в c или d .

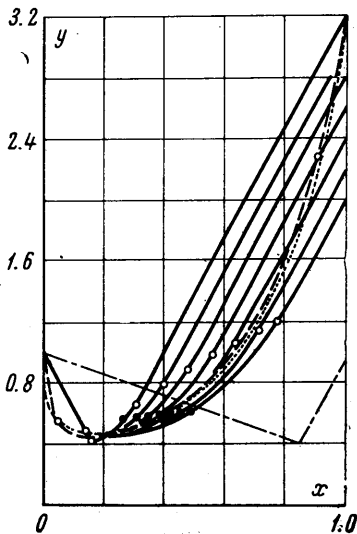
Равенства (6.3) и (6.4) существенно упрощают решение, так как теперь, во-первых, отпадает необходимость в интегрировании на cd третьего и четвертого уравнений (6.2) и, во-вторых, что более важно, появляется возможность строить участок cd до того, как определены множители Лагранжа.

В соответствии с этим построение оптимального контура начинается с интегрирования от $x = 0$ двух первых уравнений (6.2), которые вместе с (6.1) и первым и четвертым уравнениями из (1.1) определяют параметры течения на начальном участке, где $y' = -k$. Этот участок может быть продолжен лишь до некоторой точки n , где $M = 1$. Из произвольной точки c этого участка ($x_c \leq x_n$) можно, в соответствии с (6.4), выпустить участок двустороннего экстремума, где $|y'| < k$, который, в свою очередь, можно оборвать в произвольной точке d , где $M_d \geq 1$. Отсюда выпускается замыкающий участок краевого экстремума db с $y' = k$. Расчет параметров на db проводится так же, как на ac , а уравнение для p' на cd получается дифференцированием (6.4) и в данном случае имеет вид

$$p' = \Phi(p, T, w, w_s)$$

Таким образом, в прямом направлении от $x = 0$ до $x = 1$ интегрируются только уравнения течения. Уравнения же для множителей Лагранжа интегрируются только в обратном направлении, причем сначала лишь от $x = 1$ до $x = x_d$. Граничными условиями здесь служат равенства (4.2) и (4.6) в точке b . При интегрировании как уравнений течения, так и уравнений для множителей Лагранжа за независимую переменную следует брать x при $|p'| < 1$ и p — в противном случае.

Как показали расчеты, значения p , T и w_s на db , а также и на ac , необходимые для определения μ_1 , μ_2 и μ_3 при обратном интегрировании, лучше запоминать по результатам прямого интегрирования. Запоминание проводится через фиксированное число шагов, а значения в промежуточных точках находятся квадратичной интерполяцией.



Фиг. 2

Естественно, что при произвольном выборе точек c и d условия $W_{d-}^{(0)} = 0$ и (5.2) не будут выполняться. Удовлетворение этих условий достигается подбором координат указанных точек, причем ясно, что из $W_{d-}^{(0)} = 0$ следует равенство $W^{(0)} = 0$ на всем участке cd . Прямое интегрирование по cd и db с изменением координат точек c и d и обратное интегрирование по db повторяются до тех пор, пока не будут удовлетворены упомянутые выше условия в точке d ; затем проводится обратное интегрирование по ac с одновременной проверкой (5.3). Граничными условиями здесь служат равенство (4.5) в точке c и значения μ_{1c} и μ_{2c} , найденные из (6.3) по известным μ_{1d} и μ_{2d} , и параметрам течения в сечениях c и d . Условие (5.3) проверяется и на участке db .

Расчет несколько упрощается, если по p^+ решается не прямая, а обратная задача (например, при заданном y_b). В этом случае следует опустить p^+ в (4.6), а давление на торец, при котором оптимален построенный контур, определять по формуле

$$p^+ = \mu_{4d} (y^{1+\nu} \rho^\alpha w^\alpha)_b^{-1}$$

Здесь в точке d требуется удовлетворить лишь одному условию $W_{d-}^{(0)} = 0$, что достигается подбором координаты точки c . Кроме того, на участке db при этом вместо (5.3) следует проверять неравенство

$$\mu_4 - p^+ (y^{1+\nu} \rho^\alpha w^\alpha)_b \geq 0.$$

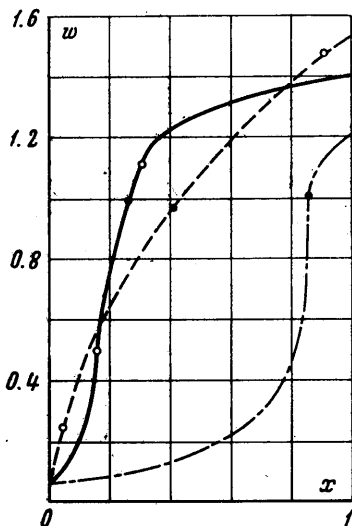
7. В качестве примера было проведено построение оптимальных осесимметричных сопел ($\nu = 1$) в случае пренебрежения запаздыванием по температуре ($T_s \equiv T$) и справедливости закона сопротивления Стокса

$$f(w, w_s) = \varepsilon \left(\frac{w}{w_s} - 1 \right)$$

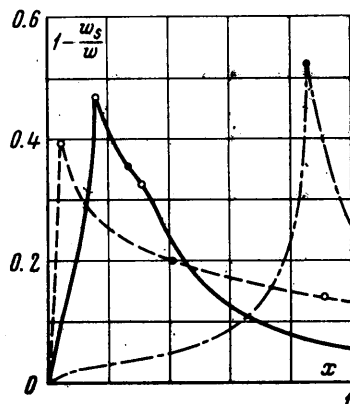
где ε — константа.

Взяв за характерные ρ_*° и w_*° , соответственно, ρ_a° и $(R^2 T_a^\circ)^{1/2}$ и считая отсутствующим скоростное отставание в начальном сечении, получим, что $p_a = T_a = \rho_a =$

$= 1$ и $w_a = w_{sa}$. Константы w_a , κ , β и ϵ , необходимые для решения задачи, были взяты равными 0,07, 1,2, 0,715 и 5,0. Так как $k = (l^0/y_a^0) \operatorname{tg} \theta_m$, где θ_m — модуль максимально допустимого угла наклона стенки сопла к оси x , то фиксированному θ_m при разных (l^0/y_a^0) соответствуют различные k . В большинстве расчетов было положено $k = 3,68$, однако для сравнения некоторые контуры были построены для $k = 10$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Примеры оптимальных контуров для $m_s / (m_s + m) = 0,75$ приведены на фиг. 2, где сплошными кривыми даны контуры, построенные для $k = 3,68$ и являющиеся оптимальными при различных давлениях на торец. На фиг. 2 и на последующих фигурах светлыми кружками обозначены точки стыковки различных участков, а черными — сечения, где $M = 1$, при этом точки c на фиг. 2 даны только для двух крайних контуров. Значения p^+ для этих сопел в порядке возрастания степеней расширения, т. е. y_b , равны: 0,0060, 0,0046, 0,0034, 0,0025, 0,0017, 0,0009 и 0,0000.

Для сравнения на фиг. 2 штриховой линией показан контур, который имеет то же $y_b = 3,21$, что и сопло, оптимальное при $k = 3,68$ и $p^+ = 0$, но построенный при $k = 10$. Сопло с таким контуром оптимально при $p^+ = 0,002$. Данный контур оказался весьма близким к проведенному пунктиром оптимальному контуру, имеющему также $y_b = 3,21$, но рассчитанному в соответствии с [3], т. е. в приближении малого отставания (отставание по температуре при этом считалось отсутствующим). Там же штрих-пунктиром показан контур, состоящий из двух прямолинейных отрезков. Для правого отрезка этого контура $k = 3,68$, а наклон левого отрезка выбирался из условия реализации сверхзвукового течения в расширяющейся части сопла.

Последнее связано с тем, что в соплах данного типа переход через скорость звука имеет место в точке излома и поэтому (из-за противоположного направления воздействия на газ расширения сопла и тормозящего при $M > 1$ действия частиц) для больших m_s / m и значительного отставания частиц излом контура на конечный угол не всегда приводит к необходимому для перехода через скорость звука изменению знака суммарного воздействия. Это, в частности, имеет место и в рассматриваемом случае, если наклон дозвуковой части «прямолинейного» сопла круче, чем на фиг. 2. При этом оказывается, что из всех «прямолинейных» сопел сопло, изображенное на фигуре, имеет наибольшее y_b и обладает наибольшим импульсом, который, однако значительно меньше, чем у оптимальных сопел с $y_b = 3,21$. Так для трех сопел, изображенных на фиг. 2 штриховой, сплошной (верхняя кривая) и штрих-пунктирной линиями, $I_b = 0,413$, 0,406 и 0,320, соответственно.

В то же время при равновесном течении, когда импульс не зависит от формы контура, для того же случая ($y_b = 3,21$) имеем $I_{sq} = 0,433$. Распределение скорости газа $w = w(x)$ и относительного отставания частиц $W(x) = 1 - w_s / w$ в зависимости от x для этих трех сопел приведены на фиг. 3 и 4, соответственно штриховыми, сплошными и штрих-пунктирными линиями (изломы кривых отвечают изломам контуров на фиг. 2). Сопоставление этих фигур показывает, что большая эффективность оптимальных сопел достигается благодаря сдвигу максимума отставания из окрестности критического сечения, где скорости велики, в начало дозвуковой части. В то же время сравнение штриховых и сплошных кривых и соответствующих им импульсов указывает на отсутствие прямой связи между величинами относительных отставаний и потерь импульса.

m°	y_b	i_b	$i_b^{(1)}$	$i_b^{(2)}$	$y_b^{(2)}$
0.25	3.30	0.969	0.969	0.969	3.35
0.50	3.14	0.947	0.940	0.945	3.38
0.60	3.14	0.940	0.930	0.936	3.39
0.65	3.15	0.938	—	0.934	3.40
0.70	3.16	0.936	—	0.918	2.94
0.75	3.21	0.935	—	0.749	0.95

Аналогичные результаты были получены и для других относительных расходов частиц ($k = 3.68$). Отличные от прямолинейных участки контуров сопел, оптимальных для разных $m^\circ = m_s / (m + m_s)$ при $p^+ = 0$, изображены на фиг. 5, а соответствующие им $m_s / (m + m_s)$, y_b и $i = (I/I_{eq})_b$ приведены в таблице (I_{eq} определен для тех же y_b , что и для оптимального сопла). Первые три числа каждой строки таблицы относятся к одному контуру, изображенному на фиг. 5, причем большим относительным расходам в таблице соответствуют контуры с большими y начальной точки участка двустороннего экстремума на фиг. 5. В четвертом и пятом столбцах помещены отношения $i^{(k)} = (I^{(k)}/I_{eq})_b$, где $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ — импульсы двух типов «прямолинейных» сопел, а I_{eq} — то же, что в третьем столбце. Сопла первого типа ($I^{(1)}$) имеют $y' = -k$ в дозвуковой части и такой (меньший, чем k) наклон сверхзвуковой части, что их y_b совпадают с y_b соответствующих оптимальных сопел

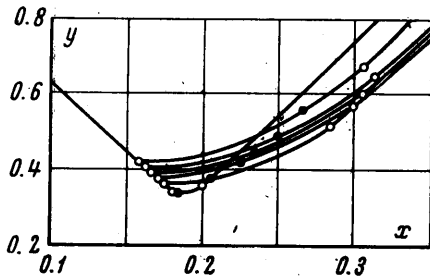


Рис. 5

(второй столбец), т. е. это сопла, имеющие ту же степень расширения, что и оптимальные. Как уже отмечалось, сопла данного типа можно построить не для любых относительных расходов частиц (в рассматриваемом случае до 0.6 включительно). Одним из контуров второго типа является штрих-пунктирный контур фиг. 2. Такие контуры можно построить при любых расходах частиц. При этом в первых четырех случаях $|y'| = k$, и степень расширения $y_b^{(2)}$, данная в шестом столбце, больше, чем у оптимального сопла. При относительных расходах частиц 0.70 и 0.75 их степень расширения становится меньше, чем у оптимальных, причем, как видно из таблицы, уменьшение $(I^{(2)}/I_{eq})_b$ и $y_b^{(2)}$ с ростом расхода частиц происходит очень быстро.

Авторы признательны Т. П. Барановой и А. М. Конкиной за помощь в работе.

Поступило 30 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

- Hoffman J. D., Thompson H. D. A general method for determining optimum thrust nozzle contours for gas-particle flows. AIAA Paper, No. 66-538, 1966 (рус. перев.: сб. «Вопросы ракетной техники», «Мир», 1967, № 3, стр. 46-63).
- Marble F. E. Nozzle contour for minimum particle-lag loss. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 12, pp. 2793-2801 (рус. перев.: «Ракетная техника и космонавтика», «Мир», 1963, № 12, стр. 95-105).
- Стернин Л. Е. Экстремальные контуры сопел для потоков газа с отставанием частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, стр. 14-22.
- Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
- Галюк Н. С., Крайко А. Н. Об одной вариационной задаче одномерной неравновесной газовой динамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2, стр. 27-36.
- Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К решению вариационных задач одномерной магнитной гидродинамики. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, стр. 322-333.
- Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwissenschaften, 1955, Bd. 3, H. 9, S. 305-315 (рус. перев.: Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1956, № 4, стр. 53-69).
- Крайко А. Н., Ткаченко Р. А. Тонкие плоские тела минимального волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, стр. 56-63.
- Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
- Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.