

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОНУСОВ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

А. П. БАЗЖИН, О. Н. ТРУСОВА, И. Ф. ЧЕЛЫШЕВА

(Москва)

В работе [1] было выдвинуто предположение, что при больших углах атаки около нижней поверхности конического тела с гладким контуром поперечного сечения образуется замкнутая (достаточно ограниченная) область эллиптичности уравнений конического течения. Для расчета смешанного трансзвукового течения газа в этой области был использован метод прямых, ранее широко применявшийся для решения других задач газовой динамики [2]. Этим методом на некоторой линии, полностью расположенной в области гиперболичности уравнений, определяются все газодинамические величины, которые могут быть использованы как исходные данные для продолжения расчета в этой области. Расчет в области гиперболичности уравнений был продолжен методом характеристик. Было рассчитано около сорока вариантов обтекания эллиптических конусов, в том числе и круговых, сверхзвуковым потоком совершенного газа при углах атаки от 30 до 50°.

Далее в статье изложен метод характеристик в той его форме, которая была использована при расчетах. (Все уравнения метода прямых имеются в работе [1].) Приведены также вновь полученные формулы для углов наклона поверхностей постоянного модуля скорости и постоянного числа Маха поперечного течения на конической ударной волне. Приведены результаты расчетов, показывающие в основном качественные особенности течения около острых эллиптических конусов при больших углах атаки.

1. Метод характеристик для конических течений газа. В работе [1] коническое течение рассматривалось зависящим от двух переменных

$$\eta = \frac{y}{x}, \quad \xi = \frac{z}{x}$$

где x, y, z — прямоугольная система координат и ось x направлена вдоль оси конического тела K (фиг. 1). Предполагаемая картина течения, подобная во всех плоскостях $x = \text{const}$, изображена схематически на фиг. 2, где S — ударная волна. Решение строится в плоскости $x = 1$, перпендикулярной оси тела. В области I используется метод прямых. Решение в области II , где система уравнений является гиперболической, строится методом характеристик.

Заранее известно, что существует также верхняя область эллиптичности уравнений конического течения (на фиг. 2 — область III , ее положение условно намечено штрихами). Расчетным путем удается показать, что в общем случае границей между областями II и III служит внутренняя ударная волна.

Введем следующие обозначения: u, v, w — составляющие скорости по направлениям x, y, z ; ρ — плотность, p — давление, T — температура. Все величины размерные.

Разностная схема расчета двумерных конических течений методом характеристик определяется довольно однозначно, хотя характеристические соотношения могут быть записаны в различной форме. Характеристические условия совместности в системе координат η, ξ были получены из

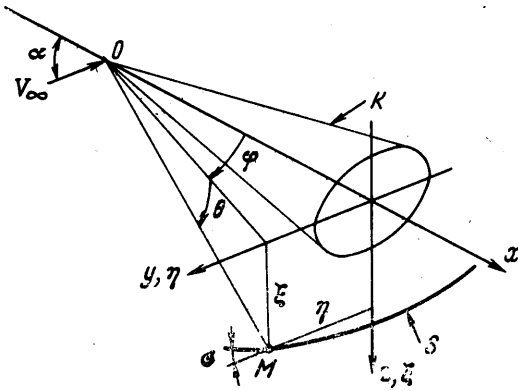
системы уравнений, использованной в работе [1]:

$$\begin{aligned}
 & a \frac{\partial u}{\partial \eta} + b \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \left(\eta \frac{\partial p}{\partial \eta} + \xi \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \\
 & a \frac{\partial v}{\partial \eta} + b \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0, \quad a \frac{\partial w}{\partial \eta} + b \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad (1.1) \\
 & a \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + b \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \\
 & a \frac{\partial T}{\partial \eta} + b \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{dT}{dp} \left(a \frac{\partial p}{\partial \eta} + b \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) = 0 \quad \left(\begin{aligned} a &= v - u\eta \\ b &= w - u\xi \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

Пусть $\xi = \xi(\eta)$ — уравнение характеристической поверхности и $\lambda = d\xi/d\eta$ — характеристическое направление. У системы (1.1) имеется

четыре характеристических направления. Два значения λ определяют направления волновых характеристик, два других значения одинаковы, это направления вдоль линий тока (под линиями тока здесь, как обычно, понимаются линии пересечения поверхности тока плоскостью $x = 1$):

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \frac{(ab - c^2\eta\xi) \pm \sqrt{D}}{a^2 - c^2(1 + \eta^2)} \\
 \lambda_{3,4} &= \frac{b}{a} \quad (1.2)
 \end{aligned}$$



Фиг. 1

Здесь c — местная скорость звука. Нетрудно проверить, что $D > 0$, если V_s , составляющая скорости конического течения на сферическую поверхность $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$, больше местной скорости звука. Этот результат понятен и получается элементарно, если записать уравнения конического течения в сферических координатах.

Два независимых условия совместности вдоль линии тока были взяты в виде:

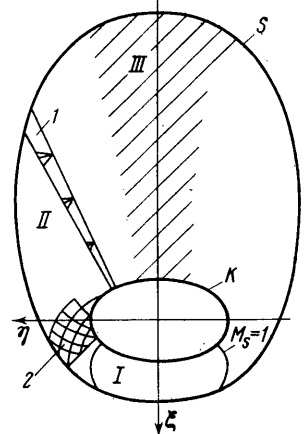
$$\begin{aligned}
 a du + (a\xi - b\eta) dw - \eta \rho^{-1} dp &= 0 \\
 a dv + b dw + \rho^{-1} dp &= 0 \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Третьим характеристическим уравнением будет условие постоянства энтропии на линии тока, записанное в форме

$$h_T dT - (\rho^{-1} - h_p) dp = 0 \quad (1.4)$$

На волновых характеристиках условие совместности имело вид

$$(b\eta - a\xi) du - b dv + a dw + [\eta(\xi - \lambda\eta) - \lambda + ac^{-2}(a\lambda - b)] \rho^{-1} dp = 0 \quad (1.5)$$



Фиг. 2

Два значения λ в этом соотношении определяются формулой (1.2).

Таким образом, имеется пять характеристических соотношений (1.3), (1.4) и (1.5). В разностных схемах метода характеристик эти дифференциальные соотношения были заменены конечно-разностными со вторым порядком точности. В расчетах были использованы две известные схемы метода характеристик. На фиг. 2 они условно обозначены цифрами 1 и 2.

2. Углы наклона поверхностей $V = \text{const}$ и $M_s = \text{const}$ на конической ударной волне. Пусть V_r — составляющая скорости по направлению радиуса-вектора точки, а V_s — составляющая скорости, касательная к поверхности сферы $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{const}$. В случае совершенного газа с постоянным отношением удельных теплоемкостей γ квадрат числа Маха, соответствующего скорости V_s , равен

$$M_s^2 = \frac{V^2 - V_r^2}{\frac{1}{2}(\gamma - 1)(V_{\text{max}}^2 - V^2)}. \quad (2.1)$$

Поверхности $V = \text{const}$ и $M_s = \text{const}$ не совпадают. Найдем углы наклона тех и других на конической ударной волне. Соответствующие выражения для плоского и осесимметричного течений были получены О. М. Белоцерковским [3, 4] и другими авторами [5].

Пусть $\xi = \xi_M(\eta)$ — уравнение поверхности $M_s = \text{const}$; тангенс угла наклона этой поверхности в плоскости $x = 1$ равен, вследствие (2.1):

$$\frac{d\xi_M}{d\eta} = - \frac{\partial V^2 / \partial \eta - k \partial V_r^2 / \partial \eta}{\partial V^2 / \partial \xi - k \partial V_r^2 / \partial \xi} \quad \left(k = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_s^2} \right) \quad (2.2)$$

Для тангенса угла наклона поверхности $V = \text{const}$, уравнение которой есть $\xi = \xi_V(\eta)$, получим

$$\frac{d\xi_V}{d\eta} = - \frac{\partial V^2 / \partial \eta}{\partial V^2 / \partial \xi} \quad (2.3)$$

Для определения частных производных величин V^2 и V_r^2 используется система уравнений (1.1) и соотношения на ударной волне, записанные несколько иначе, чем в работе [1]. Для частных производных на конической ударной волне приводим окончательные выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^2}{\partial \eta} &= - \frac{2}{N^4} \left[\left(\frac{P_1}{F} + P_2 \right) \frac{d\xi_1}{d\eta} + P_2 \frac{NV_{\infty}\Delta}{ac_3} \right] \frac{d\sigma}{d\eta} \\ \frac{\partial V^2}{\partial \xi} &= \frac{2}{N^4} \left(\frac{P_1}{F} + P_2 \right) \frac{d\sigma}{d\eta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial V_r^2}{\partial \eta} = 2a_1 V_r (v - b_1 V_r), \quad \frac{\partial V_r^2}{\partial \xi} = 2a_1 V_r (w - c_1 V_r) \quad (2.5)$$

$$P_1 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \left(3 + \frac{a_{\infty}^2}{V_{\infty}^2} \right) (DV_{\tau_{1\infty}} - V_{\tau_{2\infty}})^2 - V_{\infty}^2 N^2 \Delta (1 - \Delta)$$

$$P_2 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^2 \left(\gamma + \frac{a_{\infty}^4}{V_{\infty}^4} \right) (DV_{\tau_{1\infty}} - V_{\tau_{2\infty}}) \frac{aa_1 c_3}{\Delta},$$

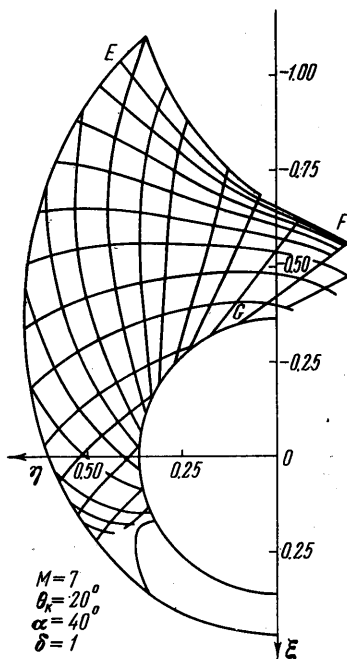
$$\Delta \equiv \frac{\rho_{\infty}}{\rho} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right) \frac{a_{\infty}^2}{V_{\infty}^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

$$F = \frac{(b - a\xi_1')^2}{c^2} - 1 - (\xi_1')^2 - (\xi - \eta\xi_1')^2, \quad V_{\tau_{1\infty}} = V_{\infty} (a_1 \cos \alpha - c_1 \sin \alpha) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 V_{r2\infty} &= -V_{\infty} c_2 \sin \alpha, & NV_{n\infty} &= V_{\infty} (a_3 \cos \alpha - c_3 \sin \alpha), & V_r &= V_{r1\infty} \\
 u &= V_{\infty} \cos \alpha - \frac{a_3}{N} V_{n\infty} (1 - \Delta), & v &= -\frac{b_3}{N} V_{n\infty} (1 - \Delta) \\
 w &= -V_{\infty} \sin \alpha - \frac{c_3}{N} V_{n\infty} (1 - \Delta) \\
 N^2 &= a_3^2 + b_3^2 + c_3^2, & a_1 &= \cos \varphi \cos \theta \\
 a_3 &= \sin \theta \cos \sigma + \sin \varphi \cos \theta \sin \sigma, & b_1 &= \sin \varphi \cos \theta \\
 b_3 &= -\cos \varphi \cos \theta \sin \sigma \\
 c_1 &= \sin \theta, & c_2 &= -\sin \sigma, & c_3 &= -\cos \varphi \cos \theta \cos \sigma \\
 D &= \sin \varphi \cos \theta \cos \sigma - \sin \theta \sin \sigma, & a &= v - u\eta, & b &= w - u\xi \\
 \xi_1' &= d\xi_1 / d\eta = -\operatorname{tg} \sigma
 \end{aligned}$$

Здесь $\xi_1(\eta)$ — уравнение ударной волны, a_{∞} — скорость звука в набегающем потоке, c — местная скорость звука, α — угол атаки, т. е. угол между вектором скорости набегающего потока и осью x в плоскости симметрии течения. Углы φ , θ и σ определены на фиг. 1; причем $\eta = \operatorname{tg} \varphi$, $\xi = \operatorname{tg} \theta / \cos \varphi$. Из (2.4) следует, что угол наклона поверхности $V = \operatorname{const}$ на ударной волне (2.3) не зависит от кривизны ударной волны — производной $d\sigma / d\eta$. Угол же наклона поверхности постоянного числа M_s (и, в частности, параболической поверхности $M_s = 1$) зависит от кривизны ударной волны, так как производная $d\sigma / d\eta$ не входит в выражения (2.5) и, следовательно, из (2.2) не выпадает.

Формулы для углов наклона поверхностей $V = \operatorname{const}$ и $M_s = \operatorname{const}$ получены также в сферической системе координат, ось которой направлена по вектору скорости набегающего потока. Эти формулы не столь громоздки, как только что написанные. Формула (2.2) вместе с (2.4), (2.5) и (2.6) была использована для оценок точности решения, получаемого методом прямых.



Фиг. 3

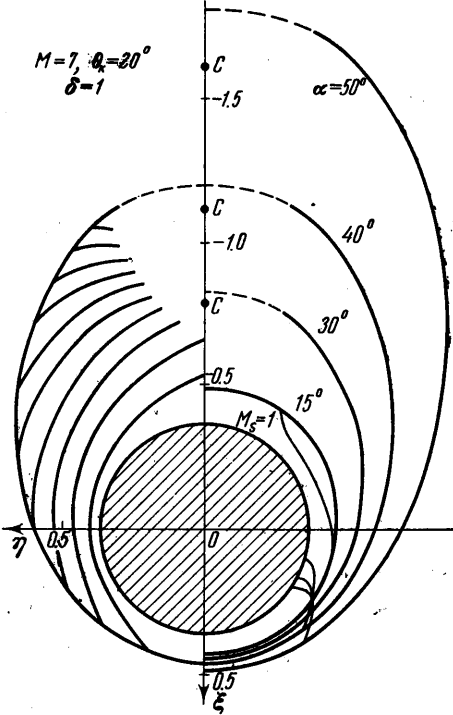
3. Контроль точности решения. Наиболее полно контролировалось решение, получаемое методом прямых в области трансзвукового течения. На каждом из лучей, участвующих в расчете, проверялось выполнение интеграла Бернулли. Около трети вариантов было проверено на выполнение закона сохранения массы газа в коническом объеме, рассматриваемом в методе прямых. Наконец, в отдельных случаях проводилось графическое сравнение углов наклона поверхностей $M_s = 1$ в нижних параболических точках ударных волн с точным решением (2.2). Результаты контроля позволяют заключить, что интегральная погрешность решения в зоне смешанного течения будет порядка одного процента.

Точность решения методом характеристик контролировалась изменением количества заданных точек на исходной нормали. Практически оказалось достаточным в расчетах по первой схеме использовать одиннадцать точек на нормали. При расчетах по второй схеме та же точность достигалась при 40 точках на исходной нормали.

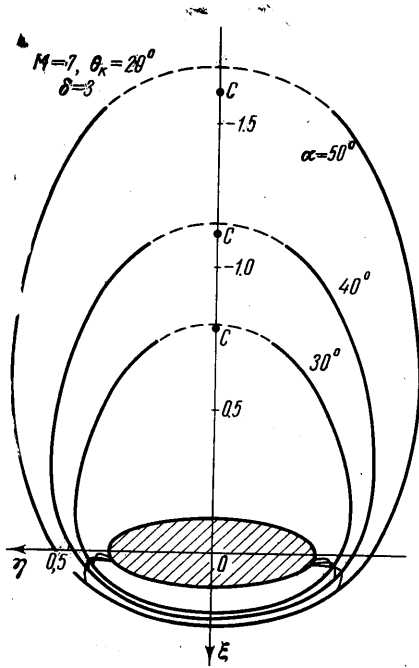
4. Результаты расчетов. Были проведены систематические расчеты полей течения около острых эллиптических конусов. Рассчитано около сорока вариантов течения. Каждый вариант определяется четырьмя параметрами: углом атаки, α ; отношением осей эллиптического поперечного сечения, δ ; полууглом раствора конуса по большой (горизонтальной) оси эллипса, θ_k ; числом Маха набегающего потока, M_{∞} .

Опишем некоторые качественные особенности обтекания эллиптических конусов при больших углах атаки, обнаруженные в результате расчетов.

Верхняя образующая конуса всегда находится в области, где система уравнений является эллиптической. Один из численных экспериментов был проведен с той целью, чтобы выяснить, возможен ли при больших углах атаки изобарический переход из области гиперболичности уравнений в область, где система уравнений

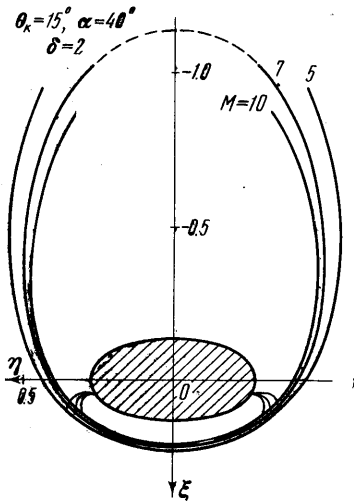


Фиг. 4

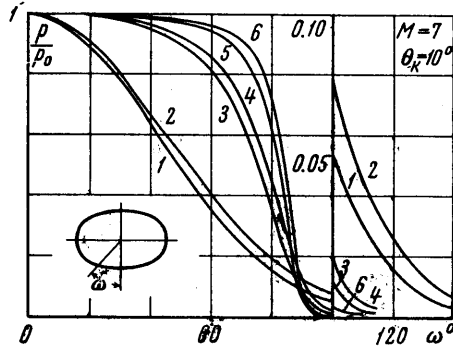


Фиг. 5

эллиптически. Удалось построить область течения с непересекающимися характеристиками обеих семейств, достигающую верхней полуплоскости симметрии и переходящую через эту полуплоскость (фиг. 3). Условия симметрии течения оказались при этом невыполненными. Так как никакие бесконечно малые возмущения извне не могут проникнуть за характеристики EF и FG , то полученное решение можно считать доказательством того, что безударный переход из области гиперболичности в верхнюю область эллиптичности уравнений в общем случае невозможен.

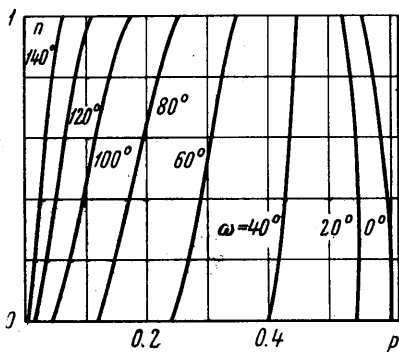


Фиг. 6

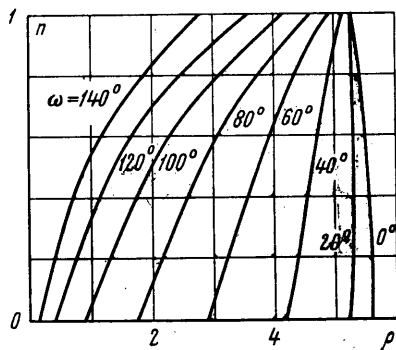


Фиг. 7

В верхней части течения около конического тела при больших углах атаки должен возникнуть внутренний скачок уплотнения, который явится границей между этими двумя областями. Другая особенность отбегания конусов при больших углах атаки, являющаяся следствием сильно развитого поперечного течения, проявляется в изменении картины линий тока в плоскости $x = \text{const}$. Возможны такие варианты течения, когда линии тока не только не приближаются к поверхности конуса, как при малых или меньших углах атаки, но в большей части поля даже удаляются от нее. Как пример, на фиг. 4 слева показана картина линий тока в плоскости $x = 1$ около кругового конуса с полууглом раствора 20° при угле атаки 40° и числе Маха, равном 7. Можно заметить тенденцию к слиянию линий тока в точке, расположенной не на поверхности конуса.

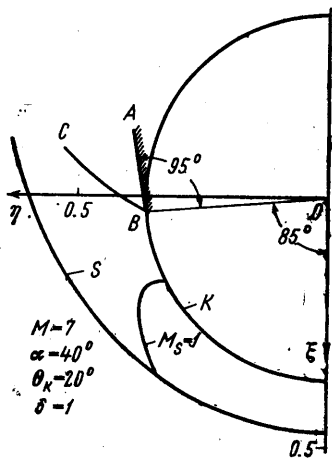


Фиг. 8



Фиг. 9

На фиг. 4 справа показаны ударные волны около того же конуса при углах атаки $15, 30, 40$ и 50° . Данные при $\alpha = 15^\circ$ взяты из работы [8]. При этом угле атаки область гиперболичности уравнений занимает пока лишь небольшую часть поля течения. Точками C обозначены следы характеристик набегающего потока, исходящих от вершины тела, на плоскости $x = 1$ при различных углах атаки. Видно, что даже при угле атаки 50° , когда верхняя образующая конуса расположена под углом 30° по отношению к набегающему потоку, интенсивность головной ударной волны нигде не становится равной нулю. (Конечно, продолжение ударных волн до плоскости симметрии на тех участках, где расчет пока не произведен, ни в коей мере не является строгим, но взаимное расположение точек C и рассчитанных ударных волн таково, что такое их продолжение кажется правдоподобным.)



Фиг. 10

Интенсивность головных ударных волн заметно зависит от геометрии тела. Например, в случае эллиптического конуса с тем же полууглом раствора по большой (горизонтальной) оси, $\theta_k = 20^\circ$, но с отношением осей поперечного сечения, равным трем, интенсивность ударных волн в верхней полуплоскости симметрии будет, вероятно, меньшей (фиг. 5), чем в случае кругового конуса с $\theta_k = 20^\circ$. Возможно, этот результат является следствием более сильного разгона потока у кромки эллиптического конуса: возникающий ввер разрежения гасит интенсивность ударных волн. Из других расчетов данных следует, что при малых углах раствора конусов интенсивность головных ударных волн в верхней полуплоскости симметрии будет близка к нулевой.

Большинство вариантов течения было рассчитано при $M_\infty = 7$. В нескольких вариантах число Маха было равно 5 и 10. На фиг. 6 показано влияние числа M_∞ на положение ударных волн и форму линий параболичности. Примечательно, что в этом случае параболическая точка на нижней поверхности тела практически

остается неизменной при изменении числа Маха.

На фиг. 7 приведено распределение относительного давления по поверхности эллиптических конусов с полууглом $\theta_k = 10^\circ$. Значения давления p_0 на нижней обра-

зующей конусов приведены ниже (величина p_0 отнесена к $\rho_\infty V_{\max}^2$).

α°	$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
30	0.3777	0.3129	0.2925
40	0.5239	0.4607	0.4401
50	0.6585	0.6045	0.5864

Цифрами здесь обозначены следующие варианты: 1 — $\alpha = 50^\circ$, $\delta = 1$; 2 — $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 1$; 3 — $\alpha = 50^\circ$, $\delta = 2$; 4 — $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 2$; 5 — $\alpha = 50^\circ$, $\delta = 3$; 6 — $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 3$.

Обращает на себя внимание, во-первых, сравнительно небольшое изменение относительного давления при изменении угла атаки в рассмотренном диапазоне и, во-вторых, практическое равенство давления нулю при $\omega > 100^\circ$ в случаях $\delta = 2$ и 3 (при $\omega \geq 10^\circ$ кривые построены в масштабе, измененном в десять раз), т. е. в этих случаях по существу только нижняя поверхность конуса участвует в создании аэродинамической силы.

На фиг. 8 и 9 даны примеры распределения давления и плотности вдоль различных нормалей к конусу с углом полураствора 15° при $\delta = 1$, $\alpha = 40^\circ$ и $M_\infty = 7$.

Небольшое усложнение программы для ЭВМ позволяет произвести расчет конического тела с консолями. На фиг. 10 дан пример такого расчета. При этом рассматриваются только те режимы, при которых внутренний скачок уплотнения BC присоединен к основанию консоли AB .

В этой статье рассмотрены течения невязкого газа. Совершенно ясно, что влияние вязкости может оказаться решающим при формировании течений около верхней поверхности конического тела. Полученные результаты могут найти применение и при изучении обтекания конических тел потоком вязкого газа.

Поступило 15 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Базжин А. П., Челышева И. Ф. Применение метода прямых к расчету обтекания конических тел при больших углах атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
2. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, стр. 206—219.
4. Белоцерковский О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. 24, № 3, стр. 511—517.
5. W. D. Hayes, R. F. Probstein. Hypersonic Flow Theory. Second Edition. Inviscid Flows, 1966, vol. I.
6. Бабенко К. И. и др. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом М., «Наука», 1964.