

## РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ УГЛОВ АТАКИ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Описывается численный метод расчета распределенных и суммарных аэродинамических характеристик тонкого крыла любой формы в плане. При этом используются только общепринятые гипотезы — о плавном обтекании крыла и условие Чаплыгина — Жуковского о конечности скоростей на задних кромках. Среда считается идеальной и несжимаемой.

Создание нелинейной теории крыла малого удлинения в несжимаемой среде является одной из наиболее важных и трудных задач теории крыла. Она уже давно привлекает внимание аэродинамиков. Еще в докладе «О вихревой теории крыла конечного размаха», прочитанном в 1913 году в Московском математическом обществе, С. А. Чаплыгин касался этого вопроса [1]. Ряд интересных идей и схем был предложен В. В. Голубевым (см., например, [2]). Первая довольно корректная и эффективная попытка теоретическим путем определить нелинейную зависимость нормальной силы крыла от угла атаки принадлежит Боллеу [3]. В этой работе изучены прямоугольные крылья весьма малого удлинения. Закон изменения циркуляции по размаху был принят постоянным, а по хорде — таким же, как у пластины бесконечного размаха. Предполагалось также, что оси свободных вихрей, сбегающих с торцов крыла, — прямые линии, составляют одинаковый угол с плоскостью крыла. Величина его вычислялась по среднему значению относительной скорости. Граничное условие на крыле удовлетворялось в одной точке.

В ряде более поздних исследований [4–8] делается попытка несколько обобщить этот подход. Так в работе [7] закон изменения циркуляции по хорде крыла вычисляется и граничные условия удовлетворяются точнее. Однако попытки перейти к изучению крыльев более сложной формы в плане, когда уже нельзя считать циркуляцию постоянной по размаху, гидродинамически некорректны [5, 6, 8]. В них используются схемы, когда при плавном обтекании крыла свободные вихри отходят от его поверхности. Углы, которые, оси вихрей составляют с поверхностью крыла, задают или подсчитывают на основе весьма произвольных гипотез.

В данной работе вихревой слой, моделирующий поверхность крыла, как и в линейной теории [9, 10], заменяется системой дискретных вихрей. Свободные вихри вне крыла при этом представляют собой дискретные криволинейные вихревые нити. Каждая из них заменяется рядом прямолинейных вихревых отрезков. Число присоединенных и свободных дискретных вихрей может безгранично увеличиваться. Положение свободных вихревых отрезков определяется в процессе расчета, который производится последовательно для ряда углов атаки  $\alpha$ , начиная с  $\alpha \rightarrow 0$ , когда имеет место схема линейной теории. Заметим, что вопрос об учете влияния носовой пелены свободных вихрей здесь не рассматривается, хотя изложенным методом можно получить результаты и для этой задачи.

Указанный метод оказался весьма общим, гибким, удобным для ЦВМ. Он позволяет исследовать практическую сходимость решения, а также не только получать суммарные и распределенные характеристики крыла произвольной формы в плане, но и изучать такие тонкие вопросы, как сворачивание вихревой пелены за крылом.

### 1. Поле скоростей от произвольно ориентированного вихревого отрезка.

При построении численного метода в дальнейшем в качестве основного гидродинамического элемента берется вихревой отрезок длины  $l_0$  и постоянной циркуляции  $\Gamma_0$ . Пусть  $A_1(x_1, y_1, z_1)$  — начало и  $A_2(x_2, y_2, z_2)$  — конец его. За положительное возьмем такое значение  $\Gamma_0$ , которое соответствует вращению против часовой стрелки, если смотреть из точки  $A_2$  в  $A_1$  (фиг. 1). Координаты любой точки  $M$ , в которой вычисляется скорость  $W$ , вызванная вихревым отрезком, обозначим  $x_0, y_0, z_0$ .

Будем считать известными координаты начала вихревого отрезка, его длину  $l_0$  и направляющие косинусы  $\cos lx$ ,  $\cos ly$  и  $\cos lz$  вектора  $A_1A_2$ .

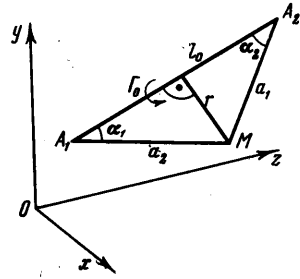
В качестве характерной скорости  $u_0$  и линейного размера возьмем поступательную скорость крыла и его корневую хорду. Пусть  $\Gamma$  — безразмерная циркуляция, причем

$$\Gamma_0 = u_0 b \Gamma \quad (1.1)$$

Кроме того, обозначим

$$x_1^* = \frac{x_1}{b}, \dots, z_0^* = \frac{z_0}{b},$$

$$l_0^* = \frac{l_0}{b}, \quad r^* = \frac{r}{b} \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Введем также безразмерные скорости, положив

$$\frac{W(x, y, z)}{u_0} = \frac{\Gamma}{4\pi} w(x, y, z) \quad (1.3)$$

Пусть  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  — углы, которые составляют нормаль к плоскости  $A_1A_2M$  с осями системы координат  $x, y$  и  $z$  (фиг. 1). Используя обозначения этой фигуры, можно найти

$$w(x, y, z) = \frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2}{r^*} \cos(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (1.4)$$

Введем в рассмотрение безразмерные функции

$$a_0^* = (x_1^* - x_0^*) \cos l_0x + (y_1^* - y_0^*) \cos l_0y + (z_1^* - z_0^*) \cos l_0z \quad (1.5)$$

$$\Delta_1^* = (z_1^* - z_0^*) \cos l_0y - (y_1^* - y_0^*) \cos l_0z$$

$$\Delta_2^* = (x_1^* - x_0^*) \cos l_0z - (z_1^* - z_0^*) \cos l_0x$$

$$\Delta_3^* = (x_1^* - x_0^*) \cos l_0y - (y_1^* - y_0^*) \cos l_0x$$

$$\Delta^* = \sqrt{\Delta_1^{*2} + \Delta_2^{*2} + \Delta_3^{*2}}$$

Тогда для вычисления искомого поля скоростей по формулам (1.4) можно получить следующие выражения:

$$\cos \alpha_1 = -\frac{a_0^*}{a_2^*}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{a_0^* + l_0^*}{\sqrt{l_0^{*2} + a_2^{*2} + 2a_0^*l_0^*}} \quad (1.6)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*}, \quad \cos \beta_2 = \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*}, \quad \cos \beta_3 = -\frac{\Delta_3^*}{\Delta^*}$$

$$r^* = \sqrt{a_2^{*2} - a_0^{*2}}, \quad a_2^* = \sqrt{(x_1^* - x_0^*)^2 + (y_1^* - y_0^*)^2 + (z_1^* - z_0^*)^2}$$

Эти соотношения должны быть дополнены следующими, имеющими место при  $r^* = 0$ :

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0 \quad (1.7)$$

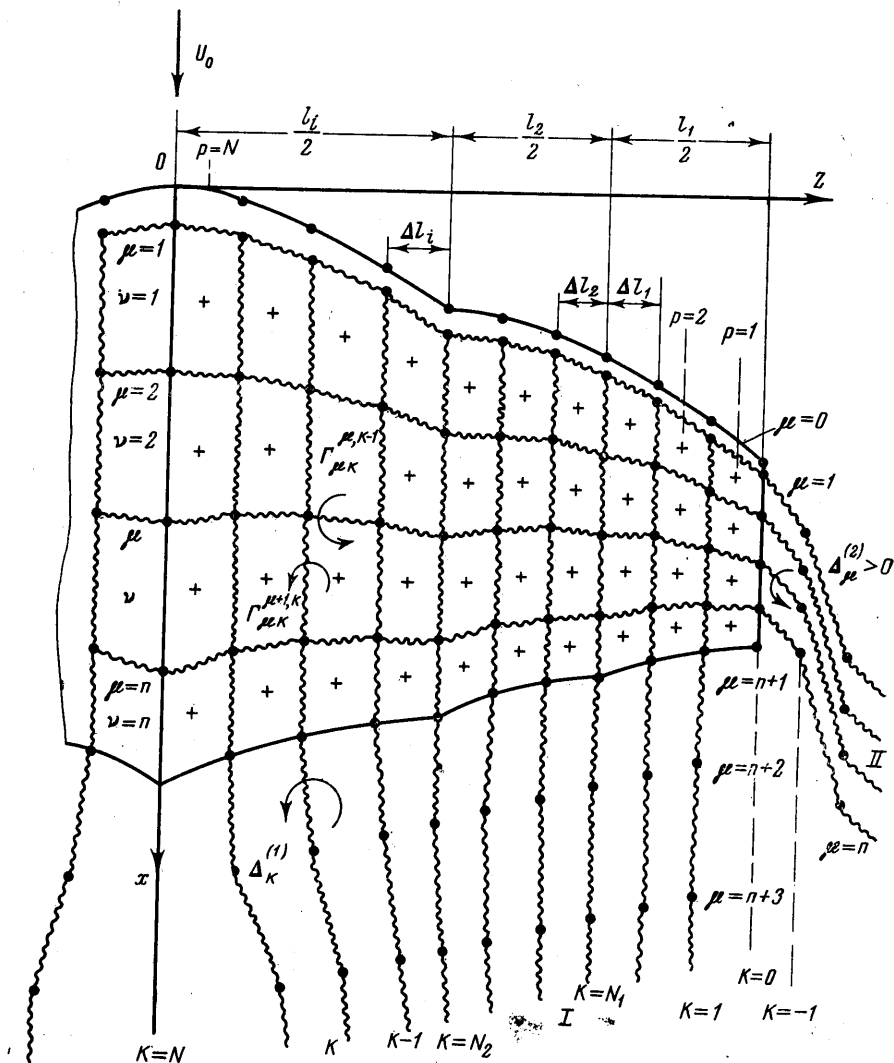
**2. Вихревая схема крыла и система обозначений.** Рассмотрим монопланное крыло — пластину произвольной симметричной формы в плане. Введем декартову систему координат  $Oxyz$ , связанную с крылом. Поместим начало  $O$  на передней кромке в корневом сечении, ось  $x$  направим по корневой хорде  $b$  вниз по течению, ось  $z$  — вправо по размаху,  $y$  — перпендикулярно плоскости крыла (фиг. 2).

В общем случае передняя и задняя кромки крыла могут быть криволинейными и иметь изломы. Полуразмах крыла обозначим  $1/2l$ , размеры участков между соседними изломами вдоль  $Oz$  пусть будут  $1/2l_1, 1/2l_2, \dots, 1/2l_i$

( $i$  — общее число изломов, считая, что всегда в корневом сечении есть излом), тогда

$$\frac{l}{2} = \sum_{\varepsilon=1}^i \frac{l_{\varepsilon}}{2} \quad (2.1)$$

Вихревая система крыла при конечном угле атаки  $\alpha$  изображена на фиг. 2. Она состоит из вихрей, заменяющих поверхность крыла, свободных



Фиг. 2

вихрей  $I$ , сбегающих с задней кромки, и свободных вихрей  $II$ , сходящих с торцов крыла.

Остановимся на системе обозначений для характерных точек на крыле и для искоемых циркуляций. Поперечные вихревые линии на крыле будем характеризовать номером  $\mu$ , производя отсчет их от носка и включая в эту систему переднюю

и заднюю кромки ( $\mu = 0$  — передняя, а  $\mu = n + 1$  — задняя кромка,  $n$  — число поперечных вихревых шнуров в сечении  $z = \text{const}$ ). Точки, являющиеся началом первых вихревых отрезков системы I, лежат на задней кромке крыла (линия  $\mu = n + 1$ ). Совокупности точек, в которых начинаются вторые, третьи и т. д. вихревые отрезки каждого шнура системы I, будем приписывать соответственно номера  $\mu = n + 2, \mu = n + 3, \dots, \mu = n_1$ . При этом общее число отрезков, при помощи которых выстраивается каждый свободный вихревой шнур указанной системы, будет  $n_1 - n$ .

Через  $k$  обозначим номер продольной линии (сечения  $z = \text{const}$  на крыле и соответствующей вихревой нити за ним). Нумерацию ведем справа налево ( $k = 0$  — торец крыла,  $k = N$  — корневая хорда). На торце крыла будут лежать начала первых вихревых отрезков системы II. Начала последующих отрезков пусть лежат на линиях  $k = -1, k = -2, \dots, k = -n_{II}$ , где  $n_{II}$  — число отрезков, при помощи которых выстраивается каждый шнур системы II (фиг. 2).

Координаты точек, находящихся на пересечении линии  $\mu$  и  $k$ , будем отмечать индексами  $\mu, k$ . Координаты точек передней и задней кромок (они на фиг. 2 зачернены)

$$x_{0k}, \quad x_{n+1, k}, \quad z_{0k} = z_{n+1, k} \quad (2.2)$$

считаем известными (форму крыла в плане — заданной).

Координаты начала и конца вихревых отрезков в соответствии со сказанным будут  $x_{\mu k}, y_{\mu k}, z_{\mu k}$  (они на фиг. 2 зачернены), причем для всех точек поверхности крыла

$$y_{\mu k} = 0 \quad (0 \leq \mu \leq n + 1, 0 \leq k \leq N) \quad (2.3)$$

Крестиками на фиг. 2 указаны расчетные точки, в которых удовлетворяются граничные условия о плавном обтекании крыла. Они располагаются посередине между соседними линиями  $\mu = \text{const}$  и  $k = \text{const}$  и лежат на линиях  $v = \text{const}$ . Координаты этих точек будем обозначать

$$x_{0v}^{k, k-1}, \quad y_{0v}^{k, k-1} = 0, \quad z_{0v}^{k, k-1} \quad (v = 1, 2, \dots, n; 1 \leq k \leq N) \quad (2.4)$$

При вычислении аэродинамических нагрузок нужно будет знать скорости на середине поперечных вихревых отрезков; координаты этих точек пусть будут

$$x_{\mu k}^{\mu, k-1}, \quad y_{\mu k}^{\mu, k-1} = 0, \quad z_{\mu k}^{\mu, k-1} \quad (1 \leq \mu \leq n, 1 \leq k \leq N) \quad (2.5)$$

Аналогично для середин продольных отрезков примем обозначения

$$x_{\mu k}^{\mu+1, k}, \quad y_{\mu k}^{\mu+1, k} = 0, \quad z_{\mu k}^{\mu+1, k} \quad (1 \leq k \leq N - 1, 1 \leq \mu \leq n) \quad (2.5)$$

Циркуляции поперечных и продольных отрезков на крыле назовем

$\Gamma_{+\mu k}^{\mu, k-1}$  и  $\Gamma_{+\mu k}^{\mu+1, k}$ ; циркуляции свободных вихрей системы I пусть будут  $\Gamma_{-k}^{(1)}$  (они не зависят от  $\mu$ ), а системы II, не зависящие от  $k$ , обозначим  $\Gamma_{-\mu}^{(2)}$ . Перейдем к безразмерным циркуляциям, положив

$$\begin{aligned} \Gamma_{+\mu k}^{\mu, k-1} &= u_0 b \Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1}, & \Gamma_{+\mu k}^{\mu+1, k} &= u_0 b \Gamma_{\mu k}^{\mu+1, k} \\ \Gamma_{-k}^{(1)} &= u_0 b \Delta_k^{(1)}, & \Gamma_{-\mu}^{(2)} &= u_0 b \Delta_{\mu}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

В качестве положительных направлений для циркуляций возьмем указанные на фиг. 2.

3. Геометрические соотношения. Как и в линейной теории крыла произвольной формы в плане [9, 10], непрерывный вихревой слой заменим дискретными вихрями. В сечениях  $z = \text{const}$ , где имеют место изломы, циркуляции поперечных шнуров и их производных могут иметь разрывы, поэтому хордам, проходящим через изломы, должны соответствовать граничные точки вихревых отрезков.

Каждый участок  $1/2 l_e$  разделим на  $N_e^*$  равных частей, получим системы полос ширины  $\Delta l_e$  ( $e = 1, 2, \dots, i$ ). Сечениям, проходящим через изломы, присвоим номера  $k = N_1, k = N_2, \dots, k = N_i$ , тогда

$$\frac{\Delta l_e}{b} = \frac{l_e}{2b} \frac{1}{N_e^*}, \quad N_e^* = N_e - N_{e-1}, \quad N_i = N, \quad N_0 = 0 \quad (e = 1, 2, \dots, i) \quad (3.1)$$

При выборе положений вихрей и расчетных точек воспользуемся соображениями работы [9]. Каждую хорду  $b_k$  сечения  $k$  делим на  $n$  равных участков. Точки, лежащие на расстоянии  $b_k/4$  от верхней границы каждого участка, возьмем за граничные для поперечных и продольных вихрей (зачерненные точки на фиг. 2, лежащие внутри крыла). Расчетные точки, в которых удовлетворяется условие о плавном обтекании крыла, лежат посередине между линиями  $k$  и  $k-1$ , а также линиями  $\mu$  и  $\mu-1$ . Их положение будем задавать номерами поперечных линий  $\nu$  и продольных  $\rho$ , причем  $1 \leq \nu \leq n$ ,  $1 \leq \rho \leq N$ .

Считая величины (2.2) заданными, определим геометрические параметры крыла, вихревых отрезков и координаты характерных точек. За характерный линейный размер везде будем брать корневую хорду  $b$ .

Для текущей хорды сечения  $k$  имеем

$$\frac{b_k}{b} = \frac{x_{n+1,k}}{b} - \frac{x_{0k}}{b}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \frac{b_N}{b} = 1 \quad (3.2)$$

Площадь  $S$ , удлинение  $\lambda$  и сужение  $\eta$  крыла определяются формулами

$$\frac{S}{b^2} = \sum_{\epsilon=1}^i \frac{\Delta l_\epsilon}{b} \sum_{k=N_{\epsilon-1}+1}^{N_\epsilon} \left( \frac{b_k}{b} + \frac{b_{k-1}}{b} \right), \quad \lambda = \frac{l^2}{S}, \quad \eta = \frac{b}{b_0} \quad (3.2)$$

где  $b_0$  — концевая хорда.

Координаты граничных точек вихрей на крыле будут

$$\frac{x_{\mu k}}{b} = \frac{x_{0k}}{b} + \frac{b_k}{b} \frac{\mu - 3/4}{n}, \quad \frac{y_{\mu k}}{b} = 0, \quad \frac{z_{\mu k}}{b} = \frac{z_{0k}}{b} \quad (3.4)$$

$$(1 \leq \mu \leq n, \quad 0 \leq k \leq N)$$

На основании фиг. 2 нетрудно получить формулы для вычисления длин поперечных вихревых отрезков

$$\frac{l_{0\mu k}^{\mu, k-1}}{b} = \left[ \left( \frac{x_{\mu k}}{b} - \frac{x_{\mu, k-1}}{b} \right)^2 + \left( \frac{z_{\mu k}}{b} - \frac{z_{\mu, k-1}}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \begin{matrix} (1 \leq \mu \leq n) \\ (1 \leq k \leq N) \end{matrix} \quad (3.5)$$

Длина продольных вихрей, начинающихся в точке  $\mu$ ,  $k$  и оканчивающихся на задней кромке (в точке  $n+1$ ,  $k$ ), согласно фиг. 2.

$$\frac{l_{0\mu k}^{n+1, k}}{b} = \frac{x_{n+1, k}}{b} - \frac{x_{\mu k}}{b} \quad (1 \leq \mu \leq n, \quad 1 \leq k \leq N-1) \quad (3.6)$$

Пусть  $l_{k, k-1}$  — ширина полосы, ограниченной линиями  $k-1$  и  $k$ , тогда

$$\frac{l_{k, k-1}}{b} = \begin{cases} \Delta l_1/b & (0 < k \leq N_1) \\ \Delta l_2/b & (N_1 < k \leq N_2) \\ \dots & \dots \\ \Delta l_i/b & (N_{i-1} < k \leq N) \end{cases} \quad (3.7)$$

Для углов стреловидности поперечных отрезков имеем

$$\sin \chi_{\mu k}^{\mu, k-1} = \frac{x_{\mu, k-1} - x_{\mu k}}{l_{\mu, k-1}^{\mu, k-1}}, \quad \cos \chi_{\mu k}^{\mu, k-1} = \frac{l_{k, k-1}}{l_{0\mu k}^{\mu, k-1}} \quad (1 \leq \mu \leq n, \quad 1 \leq k \leq N) \quad (3.8)$$

Таким образом, для любого поперечного отрезка с началом в точке  $\mu, k$  и концом в точке  $\mu, k-1$

$$\begin{aligned} \cos(lx)_{\mu k}^{\mu, k-1} &= \sin \chi_{\mu k}^{\mu, k-1}, \quad \cos(ly)_{\mu k}^{\mu, k-1} = 0, \\ \cos(lz)_{\mu k}^{\mu, k-1} &= \cos \chi_{\mu k}^{\mu, k-1} \quad (1 \leq \mu \leq n, 1 \leq k \leq N) \end{aligned} \quad (3.9)$$

У продольных вихревых отрезков с началом в точке  $\mu, k$  и концом на задней кромке в точке  $n+1, k$

$$\begin{aligned} \cos(lx)_{\mu k}^{n+1, k} &= 1, \quad \cos(ly)_{\mu k}^{n+1, k} = 0, \quad \cos(lz)_{\mu k}^{n+1, k} = 0 \\ (1 \leq \mu \leq n, 1 \leq k \leq N-1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

На основании соображений симметрии найдем геометрические параметры вихревых отрезков для левой половины крыла. Сохраняя ту же нумерацию у каждого симметричного отрезка, но отмечая все величины для них штрихами, имеем

$$\frac{x_{\mu k}'}{b} = \frac{x_{\mu k}}{b}, \quad \frac{y_{\mu k}'}{b} = \frac{y_{\mu k}}{b}, \quad \frac{z_{\mu k}'}{b} = -\frac{z_{\mu k}}{b} \quad (3.11)$$

Кроме того получаем зависимости, справедливые на крыле и вне его, для поперечных вихрей

$$\begin{aligned} \frac{(l_{0\mu k}^{\mu, k-1})'}{b} &= \frac{l_{0\mu k}^{\mu, k-1}}{b}, \quad (\cos(lx)_{\mu k}^{\mu, k-1})' = \cos(lx)_{\mu k}^{\mu, k-1} \\ (\cos(ly)_{\mu k}^{\mu, k-1})' &= \cos(ly)_{\mu k}^{\mu, k-1}, \quad (\cos(lz)_{\mu k}^{\mu, k-1})' = \\ &= -\cos(lz)_{\mu k}^{\mu, k-1}, \quad (\Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1})' = -\Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

и для продольных вихрей

$$\begin{aligned} \frac{(l_{0\mu k}^{\mu+1, k})'}{b} &= \frac{l_{0\mu k}^{\mu+1, k}}{b}, \quad \frac{(l_{0\mu k}^{n+1, k})'}{b} = \frac{l_{0\mu k}^{n+1, k}}{b}, \quad (\Gamma_{\mu k}^{\mu+1, k})' = -\Gamma_{\mu k}^{\mu+1, k} \\ (\cos(lx)_{\mu k}^{n+1, k})' &= \cos(lx)_{\mu k}^{n+1, k}, \quad (\cos(ly)_{\mu k}^{n+1, k})' = \\ &= \cos(ly)_{\mu k}^{n+1, k}, \quad (\cos(lz)_{\mu k}^{n+1, k})' = -\cos(lz)_{\mu k}^{n+1, k} \end{aligned} \quad (3.13)$$

При расчете аэродинамических нагрузок нужно знать координаты середин вихревых отрезков крыла, которые находятся как полусуммы координат граничных точек отрезков. Для поперечных шнуров имеем

$$\begin{aligned} \frac{x_{\mu k}^{\mu, k-1}}{b} &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_{\mu k}}{b} + \frac{x_{\mu, k-1}}{b} \right), \quad \frac{y_{\mu k}^{\mu, k-1}}{b} = 0, \\ \frac{z_{\mu k}^{\mu, k-1}}{b} &= \frac{1}{2} \left( \frac{z_{0k}}{b} + \frac{z_{0, k-1}}{b} \right) \quad (1 \leq \mu \leq n, 1 \leq k \leq N) \end{aligned} \quad (3.14)$$

и для продольных

$$\begin{aligned} \frac{x_{\mu k}^{\mu+1, k}}{b} &= \frac{1}{2} \left( \frac{x_{\mu k}}{b} + \frac{x_{\mu+1, k}}{b} \right) \\ \frac{y_{\mu k}^{\mu+1, k}}{b} &= 0, \quad \frac{z_{\mu k}^{\mu+1, k}}{b} = \frac{z_{0k}}{b} \quad (1 \leq \mu \leq n, 1 \leq k \leq N-1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

и, наконец, координаты расчетных точек определяются как полусуммы координат середин соответствующих поперечных и продольных отрезков

$$\frac{x_{0v}^{k,k-1}}{b} = \frac{1}{4} \left( \frac{x_{vk}}{b} + \frac{x_{v,k-1}}{b} + \frac{x_{v+1,k}}{b} + \frac{x_{v+1,k-1}}{b} \right), \quad \frac{y_{0v}^{k,k-1}}{b} = 0. \quad (3.16)$$

$$\frac{z_{0v}^{k,k-1}}{b} = \frac{1}{2} \left( \frac{z_{vk}}{b} + \frac{z_{v,k-1}}{b} \right) \quad (1 \leq v \leq n, 1 \leq k \leq N)$$

4. Поле скоростей от вихревой системы крыла. Получим формулы для вычисления составляющих возмущенной скорости в произвольной точке с безразмерными координатами  $(x_a^c/b, y_a^c/b, z_a^c/b)$ . Пусть  $W_a^c$  есть суммарная величина составляющей, а  $W_{a-}^c, W_{a+}^c, W_{aI}^c, W_{aII}^c$  — значения проекций возмущенной скорости в этой точке от поперечных, продольных вихрей крыла, а также от свободных вихревых систем I и II. Для упрощения записи индексы  $x, y, z$ , указывающие, на какую ось проектируются скорости, ставить не будем. Отсутствие этих индексов означает, что в левой и правой частях формул могут быть поставлены любые одинаковые индексы.

При расчете обтекания крыла удобнее рассматривать не безразмерные скорости, а отношения их к  $\sin \alpha$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{W_{a\alpha}^c}{u_0} &= \frac{W_a^c}{u_0 \sin \alpha}, & \frac{W_{a\alpha-}^c}{u_0} &= \frac{W_{a-}^c}{u_0 \sin \alpha}, & \frac{W_{a\alpha+}^c}{u_0} &= \frac{W_{a+}^c}{u_0 \sin \alpha} \\ \frac{W_{a\alpha I}^c}{u_0} &= \frac{W_{aI}^c}{u_0 \sin \alpha}, & \frac{W_{a\alpha II}^c}{u_0} &= \frac{W_{aII}^c}{u_0 \sin \alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогично для безразмерных циркуляций

$$\Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu,k-1} = \frac{\Gamma_{\mu k}^{\mu,k-1}}{\sin \alpha}, \quad \Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu+1,k} = \frac{\Gamma_{\mu k}^{\mu+1,k}}{\sin \alpha}, \quad \Delta_{\alpha k}^{(1)} = \frac{\Delta_k^{(1)}}{\sin \alpha}, \quad \Delta_{\alpha\mu}^{(2)} = \frac{\Delta_\mu^{(2)}}{\sin \alpha} \quad (4.2)$$

На основании сказанного можем написать

$$\frac{W_{a\alpha}^c}{u_0} = \frac{W_{a\alpha-}^c}{u_0} + \frac{W_{a\alpha+}^c}{u_0} + \frac{W_{a\alpha I}^c}{u_0} + \frac{W_{a\alpha II}^c}{u_0} \quad (4.3)$$

Вычисление правой части (4.3) будем производить, используя безразмерные функции  $w$  для вихревых отрезков.

Введем безразмерную функцию  $\Delta w$ , аналогичную  $w$ , но соответствующую паре симметричных вихрей на правой и левой половинах крыла. Для вихревого отрезка с началом в точке  $\mu, k$  и концом в точке  $\mu, k-1$  и ему симметричного

$$\begin{aligned} \Delta w_{\mu k a}^{\mu,k-1,c} &= w \left( \frac{l_{0\mu k}^{\mu,k-1}}{b}, \cos(lx)_{\mu k}^{\mu,k-1}, \cos(ly)_{\mu k}^{\mu,k-1}, \cos(lz)_{\mu k}^{\mu,k-1}, \frac{x_{\mu k}}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_a^c}{b}, \frac{y_{\mu k}}{b} - \frac{y_a^c}{b}, \frac{z_{\mu k}}{b} - \frac{z_a^c}{b} \right) - \\ &\quad - w \left( \frac{l_{0\mu k}^{\mu,k-1}}{b}, \cos(lx)_{\mu k}^{\mu,k-1}, \cos(ly)_{\mu k}^{\mu,k-1}, -\cos(lz)_{\mu k}^{\mu,k-1}, \frac{x_{\mu k}}{b} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_a^c}{b}, \frac{y_{\mu k}}{b} - \frac{y_a^c}{b}, -\frac{z_{\mu k}}{b} - \frac{z_a^c}{b} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Когда рассматривается вихревой отрезок с началом в точке  $\mu, k$  и концом в точке  $\mu + 1, k$  и симметричный ему, то

$$\begin{aligned} \Delta w_{\mu k a}^{\mu+1, k c} = w \left( \frac{l_{0\mu k}^{\mu+1, k}}{b}, \cos(lx)_{\mu k}^{\mu+1, k}, \cos(ly)_{\mu k}^{\mu+1, k}, \cos(lz)_{\mu k}^{\mu+1, k}, \frac{x_{\mu k}}{b} - \right. \\ \left. - \frac{x_a^c}{b}, \frac{y_{\mu k}}{b} - \frac{y_a^c}{b}, \frac{z_{\mu k}}{b} - \frac{z_a^c}{b} \right) - \\ - w \left( \frac{l_{0\mu k}^{\mu+1, k}}{b}, \cos(lx)_{\mu k}^{\mu+1, k}, \cos(ly)_{\mu k}^{\mu+1, k}, -\cos(lz)_{\mu k}^{\mu+1, k}, \frac{x_{\mu k}}{b} - \right. \\ \left. - \frac{x_a^c}{b}, \frac{y_{\mu k}}{b} - \frac{y_a^c}{b}, -\frac{z_{\mu k}}{b} - \frac{z_a^c}{b} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Скорости, вызванные поперечными вихрями крыла

$$\frac{W_{\alpha a-}}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^k \Gamma_{\alpha \mu k}^{\mu, k-1} \Delta w_{\mu k a}^{\mu, k-1, c} \quad (4.6)$$

Чтобы найти скорости, возмущенные продольными вихрями крыла, удобно рассматривать их как совокупность отрезков, идущих от произвольной точки  $\mu, k$  до точки на задней кромке крыла  $n + 1, k$  и имеющих циркуляцию  $\Gamma_{\mu, k+1}^{\mu k} - \Gamma_{\mu k}^{\mu, k-1}$

$$\frac{W_{\alpha a+}}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{\mu=1}^k (\Gamma_{\alpha \mu k+1}^{\mu k} - \Gamma_{\alpha \mu k}^{\mu, k-1}) \Delta w_{\mu k a}^{\mu+1, k c} \quad (4.7)$$

Система кормовых свободных вихрей I представляет собою ряд продольных отрезков, циркуляция которых не зависит от  $\mu$  (фиг. 2), поэтому с учетом (2.7)

$$\frac{W_{\alpha a I}^c}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_{\alpha k}^{(1)} \sum_{\mu=n+1}^{n_I} \Delta w_{\mu k a}^{\mu+1, k c} \quad (4.8)$$

Через  $n_I$  обозначено наибольшее значение  $\mu$ , которое соответствует началу последних отрезков (бесконечной длины) из числа тех, при помощи которых строится каждый свободный пшур системы I.

Аналогично для системы II боковых свободных вихрей

$$\frac{W_{\alpha a II}^c}{u_0} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=1}^n \Delta_{\alpha \mu}^{(2)} \sum_{k=0}^{-n_{II}} \Delta w_{\mu k a}^{\mu, k-1, c} \quad (4.9)$$

где  $n_{II}$  — то значение  $k$ , которое соответствует началу последних отрезков системы II.

Относительная скорость  $W_{0a}^c$ , поделенная на  $u_0 \sin \alpha$ , и значения ее составляющих будут

$$\frac{W_{0a}^c}{u_0} = \left[ \left( \frac{W_{\alpha 0ax}^c}{u_0} \right)^2 + \left( \frac{W_{\alpha 0ay}^c}{u_0} \right)^2 + \left( \frac{W_{\alpha 0az}^c}{u_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

$$\frac{W_{\alpha 0ax}^c}{u_0} = \frac{W_{\alpha ax}^c}{u_0} + \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{W_{\alpha 0ay}^c}{u_0} = \frac{W_{\alpha ay}^c}{u_0} + 1, \quad \frac{W_{\alpha 0az}^c}{u_0} = \frac{W_{\alpha az}^c}{u_0}$$



**5. Расчет вихревой структуры.** Приведем соотношения для определения положений свободных вихрей вне крыла. Длины вихревых отрезков будем считать известными. Криволинейные свободные шнуры выстраиваются при помощи ряда вихревых отрезков. Поэтому начало каждого последующего отрезка должно совпадать с концом предыдущего, лежащего на том же шнуре. Направление вихревых отрезков будем определять по относительной скорости потока, вычисленной в его начале.

Найдем относительные скорости в узловых точках  $\varepsilon, p$  вихревых систем I и II (эти точки зачернены и лежат вне крыла на фиг. 2). Для этого нужно воспользоваться формулами п. 4, опустив в них верхний индекс  $s$  и заменив нижний индекс  $a$  на  $\varepsilon p$ . Направляющие косинусы каждого вихревого отрезка системы I с началом в точке  $\varepsilon, p$  и концом в точке  $\varepsilon + 1, p$  будут

$$\cos(lx, ly, lz)_{\varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} = \frac{W_{\alpha 0 \varepsilon p}(x, y, z)}{W_{\alpha 0 \varepsilon p}} \quad \left( \begin{array}{l} n+1 \leq \varepsilon \leq n_I \\ 1 \leq p \leq N-1 \end{array} \right) \quad (5.1)$$

Аналогично для определения направляющих косинусов вихревых отрезков системы II с началом в точке  $\varepsilon, p$  и концом в точке  $\varepsilon, p-1$ .

$$\cos(lx, ly, lz)_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} = \frac{W_{\alpha 0 \varepsilon p}(x, y, z)}{W_{\alpha 0 \varepsilon p}} \quad \left( \begin{array}{l} 1 \leq \varepsilon \leq n \\ -n_{II} \leq p \leq 0 \end{array} \right) \quad (5.2)$$

Из равенств типа

$$\cos(lx)_{\varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} = \frac{x_{\varepsilon+1, p} - x_{\varepsilon p}}{l_{0 \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}$$

находим координаты концов отрезков для системы I

$$\frac{(x, y, z)_{\varepsilon+1, p}}{b} = \frac{(x, y, z)_{\varepsilon p}}{b} + \frac{l_{0 \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}{b} \cos(lx, ly, lz)_{\varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} \quad (5.3)$$

$$(n+1 \leq \varepsilon \leq n_I, 1 \leq p \leq N-1)$$

Аналогично для вихревой системы II (5.4)

$$\frac{(x, y, z)_{\varepsilon, p-1}}{b} = \frac{(x, y, z)_{\varepsilon p}}{b} + \frac{l_{0 \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}}{b} \cos(lx, ly, lz)_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \quad \left( \begin{array}{l} 1 \leq \varepsilon \leq n \\ -n_{II} \leq p \leq 0 \end{array} \right)$$

**6. Уравнения для циркуляций.** Граничное условие заключается в требовании обращения в нуль нормальной составляющей относительной скорости на поверхности крыла и для крыла-пластины имеет вид

$$\frac{W_{\alpha 0 0 \nu y}^{p, p-1}}{u_0} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, N). \quad (6.1)$$

На фиг. 2 точки, где удовлетворяются граничные условия, отмечены крестиками. Выразим левую часть (6.1) через циркуляции. Для этого во всех соотношениях п. 4 следует заменить индекс  $a$  на  $0\nu$ ,  $s$  — на  $p, p-1$  и рассмотреть проекции скорости на ось  $Oy$ .

После этого граничное условие (6.1) можно записать (6.2)

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\alpha \mu k}^{\mu, k-1} \Delta w_{y \mu k 0 \nu}^{\mu, k-1, p, p-1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{\mu=1}^n (\Gamma_{\alpha \mu, k+1}^{\mu k} - \Gamma_{\alpha \mu k}^{\mu, k-1}) \Delta w_{y \mu k 0 \nu}^{n+1, k, p, p-1} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_{\alpha k}^{(1)} \sum_{\mu=n+1}^{n_I} \Delta w_{y \mu k 0 \nu}^{\mu+1, k, p, p-1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{\mu=1}^n \Delta_{\alpha \mu}^{(2)} \sum_{k=0}^{-n_{II}} \Delta w_{y \mu k 0 \nu}^{\mu, k-1, p, p-1} = -1$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, N)$$

Чтобы в явном виде получить систему уравнений для циркуляций, нужно  $\Delta_k^{(1)}$  и  $\Delta_\mu^{(2)}$  выразить через циркуляции поперечных вихрей и затем собрать все коэффициенты при  $\Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu, k-1}$ .

Условие замкнутости систем поперечных и продольных вихрей обеспечивается следующим образом. Каждый продольный вихрь является результатом наложения ряда прямолинейных вихревых отрезков, идущих от начала поперечного до задней точки крыла слева и справа от сечения  $k = \text{const}$  и имеющих циркуляцию того поперечного вихря, у которого они начинаются. Поэтому на участке от точки  $\mu, k$  до точки  $\mu + 1, k$  продольные вихревые отрезки имеют постоянную циркуляцию

$$\Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu+1, k} = \sum_{\varepsilon=1}^{\mu} (\Gamma_{\alpha\varepsilon, k+1}^{\varepsilon k} - \Gamma_{\alpha\varepsilon k}^{\varepsilon, k-1}) \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (6.3)$$

Для вычисления циркуляций свободных вихрей системы I в формуле (6.3) нужно произвести суммирование от 1 до  $n$

$$\Delta_{\alpha k}^{(1)} = \sum_{\mu=1}^n (\Gamma_{\alpha\mu, k+1}^{\mu k} - \Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu, k-1}), \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (6.4)$$

Согласно условию замкнутости и фиг. 2 циркуляция каждого вихревого отрезка системы II будет равна циркуляции того поперечного вихря, от которого отходит соответствующий ппнур

$$\Delta_{\alpha\mu}^{(2)} = \Gamma_{\alpha\mu 1}^{\mu 0} \quad (\mu=1, 2, \dots, n) \quad (6.6)$$

После преобразований теперь можно получить систему уравнений

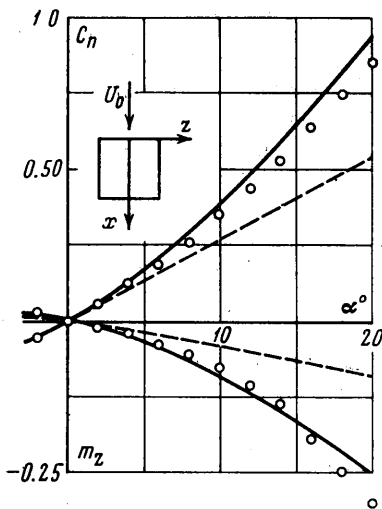
$$\sum_{k=1}^N \sum_{\mu=1}^n a_{\mu k v}^{\mu, k-1, p, p-1} \Gamma_{\alpha\mu k}^{\mu, k-1} = -1 \quad (v=1, 2, \dots, n; p=1, 2, \dots, N) \quad (6.5)$$

Коэффициенты ее вычисляются следующим образом:

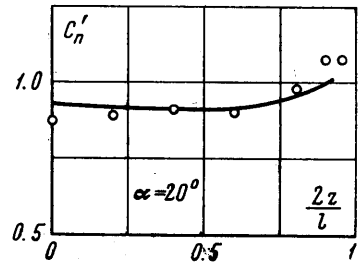
$$\begin{aligned} a_{\mu k v}^{\mu, k-1, p, p-1} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \Delta w_{y\mu k 0 v}^{\mu, k-1, p, p-1} + \Delta w_{y\mu, k-1, 0 v}^{n+1, k-1, p, p-1} - \Delta w_{y\mu k 0 v}^{n+1, k p, p-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\varepsilon=n+1}^{n_I} (\Delta w_{y\varepsilon k-1, 0 v}^{\varepsilon+1, k-1, p, p-1} - \Delta w_{y\varepsilon k 0 v}^{\varepsilon+1, k p, p-1}) \right] \quad (k=2, 3, \dots, N-1) \\ a_{\mu, 1, v}^{\mu, 0, p, p-1} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \Delta w_{y\mu, 1, 0 v}^{\mu, 0, p, p-1} - \Delta w_{y\mu, 1, 0 v}^{n+1, 1, p, p-1} - \sum_{\varepsilon=n+1}^{n_I} \Delta w_{y\varepsilon, 1, 0 v}^{\varepsilon+1, 1, p, p-1} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{-n_{II}} \Delta w_{y\mu k 0 v}^{\mu, k-1, p, p-1} \right], \quad a_{\mu N v}^{\mu, N-1, p, p-1} = \frac{1}{4\pi} \left[ \Delta w_{y\mu N 0 v}^{\mu, N-1, p, p-1} + \right. \\ &+ \left. \Delta w_{y\mu, N-1, 0 v}^{n+1, N-1, p, p-1} + \sum_{\varepsilon=n+1}^{n_I} \Delta w_{y\varepsilon, N-1, 0 v}^{\varepsilon+1, N-1, p, p-1} \right] \quad (6.7) \end{aligned}$$

Определение циркуляций и вихревой структуры (положений вихревых отрезков вне крыла) должно производиться совместно при каждом конечном угле атаки  $\alpha$ . Практически это осуществляется методом последовательных приближений.

Вначале находятся циркуляции при  $\alpha \rightarrow 0$  по схеме линейной теории, когда все свободные вихри направлены по скорости невозмущенного потока  $u_0$ , и совершается переход к



Фиг. 3



Фиг. 4

большим значениям  $\alpha$ , для которых по найденным  $\Gamma_\alpha$  и  $\Delta_\alpha$  вычисляется структура вихревых систем I и II, затем при том же  $\alpha$  уточненные значения  $\Gamma_\alpha$  и  $\Delta_\alpha$  и т. д.

7. Расчет аэродинамических нагрузок. Теорема Жуковского «в малом» позволяет определить разность давлений между нижней и верхней поверхностями крыла [9]

$$p_- - p_+ = \rho W_{00\tau} \gamma_+ \quad (7.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды,  $\gamma_+$  — интенсивность присоединенного слоя,  $W_{00\tau}$  — составляющая относительной скорости в соответствующей точке, принадлежащей вихревому слою. Эта составляющая лежит в плоскости, касательной к поверхности крыла, и перпендикулярна оси присоединенного вихря в рассматриваемой точке.

Введем безразмерную разность давлений и безразмерную интенсивность слоя, положив по аналогии с (4.1) и (4.2)

$$\Delta p_\alpha = \frac{2(p_- - p_+)}{\rho u_0^2 \sin \alpha}, \quad \gamma_\alpha = \frac{\gamma_+}{u_0 \sin \alpha} \quad (7.2)$$

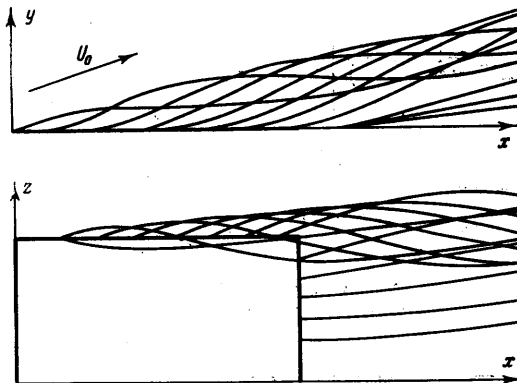
Тогда вместо (7.1) получим

$$\Delta p_\alpha = 2 \frac{W_{\alpha 00\tau}}{u_0} \gamma_\alpha \sin \alpha \quad (7.3)$$

В соответствии с принятыми обозначениями имеем для поперечных и продольных вихрей

$$\Delta p_{\alpha p}^{\varepsilon, p-1} = 2 \frac{W_{\alpha 00\tau p}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} \gamma_{\alpha p}^{\varepsilon, p-1} \sin \alpha \quad (7.4)$$

$$\Delta p_{\alpha p}^{\varepsilon+1, p} = 2 \frac{W_{\alpha 00\tau p}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} \gamma_{\alpha p}^{\varepsilon+1, p} \sin \alpha$$



Фиг. 5

При переходе от дискретных вихрей к распределенному слою принимаем, что на соответствующих элементарных участках по хорде и полуразмаху значения

$$\gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \quad \text{и} \quad \gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}$$

постоянные, и получаем связь

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} &= \gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \frac{b_{p, p-1}}{bn} \cos \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \\ \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} &= \gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} \frac{l_{p, p-1} + l_{p+1, p}}{2b} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Безразмерные составляющие относительной скорости, нормальной к осям поперечных и продольных вихрей, при положительных циркуляциях на фиг. 2, будут

$$\begin{aligned} \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} &= \operatorname{ctg} \alpha \cos \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} + \left( \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha I}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} + \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha II}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} \right) \cos \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \\ &- \left( \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha I}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} - \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha II}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} \right) \sin \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \\ \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} &= - \left( \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha I}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} + \frac{W_{\alpha \varepsilon p \alpha II}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} \right) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Таким образом, для вычисления правых частей (7.6) нужно воспользоваться соотношениями (4.8) и (4.9), заменив в них первый раз  $a$  на  $\varepsilon p$  и  $c$  на  $\varepsilon, p-1$  и поставив индексы  $x$  или  $z$ , а второй раз заменить  $a$  на  $\varepsilon p$  и  $c$  на  $\varepsilon+1, p$  и поставить индексы  $z$ .

Коэффициенты нормальной силы и продольного момента крыла введем по формулам

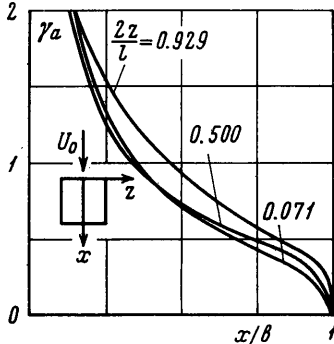
$$c_n = \frac{2N}{\rho u_0^2 S}, \quad m_z = \frac{2M_z}{\rho u_0^2 S b} \quad (7.7)$$

После преобразований получим

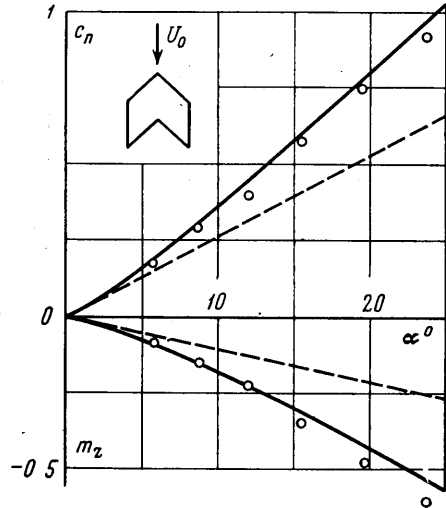
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4 \sin^2 \alpha b l}{S} \sum_{p=1}^N \sum_{\varepsilon=1}^n \left( \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \frac{l_{p, p-1}}{l \cos \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} \frac{b_p}{nl} + \frac{1}{2} \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p, p-1}^{\varepsilon+1, p-1}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon, p-1}^{\varepsilon+1, p-1} \frac{b_{p-1}}{nl} \right) \\ m_z &= - \frac{4 \sin^2 \alpha b l}{S} \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{\varepsilon=1 \\ \varepsilon+1, p}}^n \left( \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon, p-1} \frac{l_{p, p-1}}{l \cos \chi_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}} \frac{x_{\varepsilon p}^{\varepsilon, p-1}}{b} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon p}^{\varepsilon+1, p} \frac{b_p}{nl} \frac{x_{\varepsilon p}^{\varepsilon+1, p}}{b} + \frac{1}{2} \frac{W_{\alpha 00 \varepsilon p, p-1}^{\varepsilon+1, p-1}}{u_0} \Gamma_{\alpha \varepsilon, p-1}^{\varepsilon+1, p-1} \frac{b_{p-1}}{nl} \frac{x_{\varepsilon, p-1}^{\varepsilon+1, p-1}}{b} \right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

8. Примеры. По изложенной методике был произведен расчет обтекания крыльев различной формы в плане в широком диапазоне углов атаки. Установлено, что в тех случаях, когда на крыле в эксперименте не образуется носовая вихревая пелена, теоретические данные удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Сказан-

ное относится не только к суммарным, но и к распределенным характеристикам. При этом получен известный из эксперимента факт увеличения несущих свойств в концевых сечениях у прямоугольных крыльев малых удлинений. Отметим также, что в результате расчета удается проследить, как вихревая пелена сворачивается в жгуты. В качестве примера на фиг. 3—6 приведены некоторые данные, относящиеся к прямоугольному крылу с удлинением  $\lambda = 1.0$ . Экспериментальные результаты нанесены точками (на фиг. 3 — из работы [9], на



Фиг. 6



Фиг. 7

фиг. 4 — из работы [5]). Вихревая структура этого крыла, построенная по данным расчета при  $\alpha = 15^\circ$  в двух проекциях изображена на фиг. 5. И, наконец, фиг. 6 характеризует закон изменения циркуляции поперечных вихрей в разных сечениях по размаху при  $\alpha = 15^\circ$ .

Фиг. 7 содержит результаты расчетов для стреловидного крыла ( $\lambda = 1.0$ ,  $\chi_0 = 45^\circ$ ,  $\eta = 1$ ), причем экспериментальные данные заимствованы из работы [5].

На всех фигурах сплошные линии соответствуют нелинейной теории, а пунктирные прямые — линейной.

Автор благодарит О. Н. Соколову и Т. М. Музыченко, которыми был произведен расчет примеров.

Поступило 27 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О работах Чаплыгина С. А. по теории индуктивного сопротивления. ПММ, 1941, т. 5, вып. 2 (на французском языке).
2. Голубев В. В. К теории крыла малого удлинения. Изв. АН СССР, 1947, № 3.
3. Bollaу W. A non — linear Wing Theory and its Application to rectangular Wings of small aspect Ratio. Z. angew. Math. Mech., 1939, Bd. 19, Hft. 1.
4. Поляхов Н. Н., Пастухов А. И. Теория несущей поверхности прямоугольной формы. Вестн. Ленингр. ун-та, Матем. механ. и астрон., 1959, № 13, вып. 3.
5. Gersten K. Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis. Ingenieur — Archiv, 1961, Bd. 30, Hft. 1.
6. Garner H., Lehrian D. Non — linear Theory of Steady Forces on Wings with Leading — Edge Flow Separation. ARC, R. and M., 1963, No. 3375.
7. Ермоленко С. Д. К нелинейной теории крыльев малых удлинений. Изв. вузов, Авиационная техника, 1966, № 2.
8. Ермоленко С. Д., Ровных А. В. К нелинейной теории несущей поверхности. Изв. вузов, Авиационная техника, 1967, № 2.
9. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
10. Белоцерковский С. М. Особенности расчета обтекания крыльев сложной формы в плане при дозвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.