О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ПОДДЕРЖАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Вопросы возникновения и поддержания регулярных магнитных полей в плазме представляют значительный интерес, поскольку различные космические объекты: спиральные рукава галактик, многие звезды и планеты,— обладают регулярным магнитным полем [1–3]. Этой теме посвящено значительное число теоретических работ [4–9]. Однако вследствие больших математических трудностей, которые возникают при решении этой проблемы, изучить ее в общем виде пока не представляется возможным, и обычно рассматриваются ее кинематические аспекты. В работе [5] изучается индуцирование тороидального магнитного поля из дипольного поля вращающейся сферической массы под действием радиальной конвекции. Чтобы процесс был незатухающим, необходимо поддержание полоидального поля, которое по теореме Каулинга может индуцироваться асимметричными движениями из тороидального поля. Паркер [6] предложил конкретную модель усиления поля движениями типа циклонов и указал возможность саморегулирования процесса поддержания поля. Этот процесс при некоторых условиях носит волновой характер, так называемые «динамо-волны». В работах С. И. Брагинского [7,8] рассмотрен вопрос поддержания квазистационарного поля движениями среды мало отличающимися от осесимметричных. Вследствие больших магнитных чисел Рейнольдса $Re_m \gg 1$ поле затухает медленно, и достаточно слабого механизма генерации для поддержания поля.

В работе Бирмана и Шлютера [9] был предложен принципиально новый механизм образования магнитных полей в плазме вследствие появления при некоторых условиях вихревой составляющей механической электродвижущей силы. По-видимому, этот механизм может быть причиной появления космических магнитных полей.

В данной статье детально изучается механизм возникновения магнитных полей Бирмана, выводятся условия, налагаемые на движение и характеристики полностью ионизованной плазмы, которые необходимы для появления вихревой э.д.с. Показано, что в этом случае осесимметричные движения хорошо проводящей плазмы могут генерировать тороидальные магнитные поля значительной величины. Далее, в кинематической постановке решается задача об определении магнитного поля и токов, возникающих в плазменном сферическом объеме, моделирующем звезду. Этот объем вращается вокруг некоторой оси с заданной угловой скоростью Ω, зависящей от сферических координат R и ϑ. Для конкретных расчетов берутся характеристики, соответствующие средним характеристикам модели Солнца.

1. Рассмотрим движения многокомпонентной полностью ионизованной вязкой плазмы в электрическом поле под действием внешней массовой силы **F** неэлектромагнитного происхождения. Уравнения движения компонент плазмы, состоящей из двух сортов ионов и электронов, будут иметь вид [1, 10]

$$m_x n_x \frac{d_x \mathbf{V}_x}{dt} = -\nabla p_x + Z_x e n_x \mathbf{E} - \alpha_{xy}\mathbf{w} - \alpha_{ex}(Y\mathbf{w} - \mathbf{u}) + n_x m_x \mathbf{F} + \\ + \eta_0^x (\Delta \mathbf{V}_x + {}^1/_3 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}_x) \qquad (1.1)$$

$$m_y n_y \frac{d_y \mathbf{V}_y}{dt} = -\nabla p_y + Z_y e n_y \mathbf{E} + \alpha_{xy}\mathbf{w} + \alpha_{ey}(X\mathbf{w} + \mathbf{u}) + n_y m_y \mathbf{F} + \\ + \eta_0^y (\Delta \mathbf{V}_y + {}^1/_3 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}_y)$$

$$m_e n_e \frac{d_e \mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - e n_e \mathbf{E} + (\alpha_{ex} Y - \alpha_{ey} X)\mathbf{w} - \alpha_e \mathbf{u} + n_e m_e \mathbf{F} + \\ + \eta_0^e (\Delta \mathbf{V}_e + {}^1/_3 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}_e)$$

Здесь значки x и y относятся к двум сортам ионов и e — к электронам; m_s, $\mathbf{V}_s$, T_s, n_s, $p_s = n_s k T_s$, $Z_s e$ — масса, скорость, температура, плотность, давление и заряд частиц s сорта ($s = e, x, y$); k — постоянная Больцмана; $\eta_0{}^s$ — коэффициент динамической вязкости частиц s сорта; e — заряд электрона, $X = m_x n_x / \rho$, $Y = m_y n_y / \rho$ — относительное содержание ионов x и y сорта 1 *г* вещества; ρ — общая плотность плазмы; $\mathbf{w} = \mathbf{V}_x - \mathbf{V}_y$ — относительная скорость ионов, $\mathbf{u} = \mathbf{V}_e - \mathbf{V}$ — скорость электронов относительно плазмы в целом, двигающейся с общей скоростью $\mathbf{V} = {}^1/\rho\,(m_x n_x \mathbf{V}_x + m_y n_y \mathbf{V}_y)$; α_{rs} — коэффициенты трения частиц разных сортов [10]

$$\alpha_{sr} = \frac{4}{3} n_s n_r m_{sr}{}^{1/2} \frac{\sqrt{2\pi}\Lambda Z_s{}^2 Z_r{}^2 e^4}{T^{3/2}} \qquad (r, s = e, x, y)$$

$m_{sr} = m_s m_r / (m_s + m_r)$ — приведенная масса частиц; $\alpha_e = \alpha_{ex} + \alpha_{ey}$, Λ — кулоновский логарифм. При этом плотность тока выражается в виде суммы электронной и ионной компонент [10]

$$\mathbf{j} = -e n_e \mathbf{u} + \left(\frac{Z_x}{m_x} - \frac{Z_y}{m_y}\right) e\rho XY\mathbf{w} \tag{1.2}$$

Если температуры электронов и ионов равны, то $\eta_0{}^i \sim (m_i / m_e)^{1/2} \eta_0{}^e$, т. е. динамическая вязкость ионов значительно больше вязкости электронов. Предположим далее для простоты, что плазма состоит из электронов и ионов водорода x и гелия y — наиболее распространенных элементов в космических условиях. Тогда

$$Z_x = 1, \qquad Z_y = 2, \qquad m_y = 4m_x$$

$$n_e = \frac{\rho}{m_x}(X + {}^1/_2 Y), \qquad \frac{n_x}{n_e} = \frac{X}{X + {}^1/_2 Y}, \qquad \frac{n_y}{n_e} = \frac{Y}{4(X + {}^1/_2 Y)} \tag{1.3}$$

Из уравнений (1.1)—(1.3), пренебрегая как обычно инерцией и вязкостью электронов и полагая $m_e \ll m_i$, w и $u \ll V$, можно получить уравнения движения плазмы в целом, обобщенный закон Ома и уравнение для скорости диффузии ионов $\mathbf{w}$

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{F} + \eta_0(\Delta\mathbf{V} + {}^1/_3 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}), \qquad p = p_e + p_x + p_y \tag{1.4}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{n_e e}\nabla p_e\right), \qquad \sigma = \frac{n_e{}^2 e^2}{\alpha_e} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\alpha_{ey} n_x}{\alpha_{xy}}\left[-\frac{1}{n_x}\nabla p_x + \frac{1}{4n_y}\nabla p_y + {}^1/_2 e\mathbf{E} + \left(\frac{\eta_0{}^x}{n_x} - \frac{\eta_0{}^x}{4n_y}\right)\times \right.$$
$$\left. \times (\Delta\mathbf{V} + {}^1/_3 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V})\right] \tag{1.6}$$

где σ — электропроводность среды

$$\nabla p_e = p\nabla\frac{X + {}^1/_2 Y}{2X + {}^3/_4 Y} + \frac{X + {}^1/_2 Y}{2X + {}^3/_4 Y}\nabla p \tag{1.7}$$
$$\mathbf{j} = -e n_e \mathbf{u} + {}^1/_2 e n_y Y\mathbf{w}$$

Уравнение (1.5) показывает, что градиент электронного давления будет создавать движение электронов и ионов относительно друг друга, приводя тем самым к разделению зарядов. Возникающее вместе с накоплением пространственного заряда электростатическое поле будет постепенно возрастать, замедляя процесс разделения зарядов до тех пор, пока оно полностью не компенсирует действие градиента давления. Дальнейшего разделения зарядов происходить не будет, ток будет равен нулю, а результирующее электрическое поле определится из условия

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{n_e e} \nabla p_e$$

Электростатическое поле потенциально, и оно может компенсировать действие механических сил лишь в том случае, если они имеют потенциал. Если же

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{n_e e} \nabla p_e\right) \neq 0 \tag{1.8}$$

то механическая э.д.с. приводит к появлению замкнутых электрических токов и соответствующих магнитных полей.

Если плазма двухкомпонентная и полностью ионизованная, т. е. $X = 1$, $Y = 0$, то тогда

$$\operatorname{rof}\left(\frac{1}{n_e e} \Delta p_e\right) \neq -\frac{m_x}{2e}\frac{1}{\rho^2} \Delta\rho \times \Delta p = 0$$

Это условие означает несовпадение поверхностей равных давлений и равных плотностей, и было впервые получено Л. Бирманом [9].

Выражение для механической э.д.с. может быть получено из уравнений движения (1.4), и таким образом могут быть сформулированы необходимые условия, налагаемые на движение и действующие на плазму силы, чтобы была возможна генерация магнитного поля. Действительно, взяв rot от уравнений (1.4), после элементарных преобразований получим

$$\left[\frac{d\Omega}{dt} - (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V}\right] - \operatorname{rot} \mathbf{F} - \nu_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} = -\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho} \nabla p\right) \tag{1.9}$$

где $\nu_0 = \eta_0 / \rho$ — коэффициент кинематической вязкости, принятый постоянным, $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$. В квадратных скобках в (1.9) стоит гельмгольциан вектора $\boldsymbol{\Omega}$ ($\operatorname{helm} \boldsymbol{\Omega}$). Известно, что $\operatorname{helm} \boldsymbol{\Omega} = 0$ — это условие Гельмгольца для сохраняемости вихревых линий и интенсивности вихревых трубок [11]. Из (1.9) получаем следующие условия.

(1) $\operatorname{helm} \boldsymbol{\Omega} \neq 0$, т. е. вихревые движения плазмы таковы, что имеет место вихреобразование.

(2) $\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq 0$ — внешние массовые силы не потенциальны.

(3) $\nu_0 \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} \neq 0$ — это условие следует учитывать, когда существенна вязкость плазмы.

Для многокомпонентной химически неоднородной плазмы уравнение (1.7) дает еще одно условие.

(4) $\nabla p \times \nabla X \neq 0$, т. е. на поверхностях равных давлений химический состав плазмы не постоянен.

Используя имеющиеся сведения о внутреннем строении звезд, можно показать, что все четыре условия выполняются в тех или иных областях звезды.

Действительно, из наблюдательных данных известно, что Солнце находится в дифференциальном вращении вокруг оси с угловой скоростью, зависящей от широты, а все имеющиеся теории предсказывают увеличение угловой скорости вглубь от поверхности. Поэтому очевидно, что

$$\operatorname{helm} \boldsymbol{\Omega} \sim \Omega \sin \vartheta \left(R \frac{\partial \Omega}{\partial R} \cos \vartheta - \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \sin \vartheta\right) \varphi_0 \neq 0$$

т. е. условие (1) выполняется во всем объеме Солнца.

Наличие меридиональной циркуляции на Солнце, особенно во внешней конвективной зоне, где скорость циркуляции оценивается $v_r \sim 2 \cdot 10^3$ *см/сек*, приводит к тому, что часть массовых сил, действующих на плазму — сила Кориолиса $F = 2\Omega \times v_r$ — не потенциальна; поэтому

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^* = \frac{m_x}{2e}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{m_x}{e}\operatorname{rot}(\Omega \times \mathbf{v}_r) \neq 0$$

что может привести к возникновению в конвективной оболочке звезды значительных магнитных полей.

Теория внутреннего строения звезд [12], созданная на основе наблюдательных данных и законов ядерной физики, предсказывает неоднородный химический состав материи внутри звезд. Первоначальный однородный химический состав межзвездной среды во время эволюции, вследствие происходящих в ядре термоядерных реакций, будет меняться. Поскольку скорость термоядерных реакций зависит от плотности и температуры среды, химический состав на данном этапе эволюции звезды будет также функцией этих величин. Так, для звезд нижней части главной последовательности можно приближенно принять [12]

$$X = X_0 - AX^2\rho T^{4.5}, \qquad X_0 \approx 0.8, \qquad A \approx 7\cdot 10^{-35} \tag{1.10}$$

Если учесть, что, по-видимому, многие звезды с момента их образования находятся также в дифференциальном вращении вокруг оси, то будет очевидно, что условие $\nabla p \times \nabla X \neq 0$ выполняется внутри звезд достаточно часто, и в этом случае из-за неоднородности химического состава звезды будут генерироваться магнитные поля.

2. Условия (1) — (4) не связаны требованием асимметрии движения, налагаемым теоремой Каулинга. Действительно, при использовании обобщенного закона Ома с учетом вихревой э.д.с. уравнение индукции имеет вид [1]

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = \nu_m\nabla^2\mathbf{H} + \operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}) + c\operatorname{rot}\mathbf{E}^* - \frac{1}{ne}\operatorname{rot}(\mathbf{j}\times\mathbf{H}) \tag{2.1}$$

Применяя метод доказательства теоремы Каулинга, данный в [7], легко показать, что при наличии вихревой компоненты механической э.д.с. аксиально-симметричные движения возбуждают тороидальные магнитные поля. Введем векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля **A** и Φ, тогда (2.1) и обобщенный закон Ома запишутся

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - c\operatorname{rot}\mathbf{E}^* - \operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}) + \frac{c}{4\pi ne}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}) = -\nu_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\Phi - c\mathbf{E}^* - (\mathbf{V}\times\mathbf{H}) + \frac{c}{4\pi ne}(\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}) = -\nu_m\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{2.3}$$

Используем цилиндрическую систему координат r, φ и z и обозначим полоидальные векторы индексом p, а тороидальные — индексом φ. Тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p + H_\varphi\varphi_0, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{V}_p + V_\varphi\varphi_0$$

Для осесимметричных движений полоидальное магнитное поле определяется φ-компонентой векторного потенциала $\mathbf{H}_p = \operatorname{rot}(A_\varphi\varphi_0)$. Спроектируем (2.2) и (2.3) на ось φ и получим

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial t} + \frac{cm_x}{2\rho^2 e}\nabla\rho\times\nabla p + \left[\mathbf{V}_p - \frac{c\operatorname{rot}(H_\varphi\varphi_0)}{4\pi ne}\right]r\nabla\frac{H_\varphi}{r} - \left[\nabla\frac{V_\varphi + c\Delta_1 A_\varphi/4\pi ne}{r}\times\nabla rA_\varphi\right]_\varphi = \nu_m\Delta_1 H_\varphi \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + \left[\frac{\mathbf{V}_p}{r} - \frac{c}{4\pi ne}\frac{\operatorname{rot}(H_\varphi\varphi_0)}{r}\right]\nabla rA_\varphi = \nu_m\Delta_1 A_\varphi \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_1 f(r, z) = -\varphi_0\operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\varphi_0) \equiv \Delta^2 f - r^2 f$$

Теперь аналогично [7] возьмем некоторый осесимметричный объем V_1, заполненный однородной несжимаемой проводящей плазмой и ограниченный поверхностью S, вне которой $\sigma = 0$ и $\Delta_1 A_\varphi = 0$. Будем считать, что внешнего магнитного поля нет, тогда H_φ равно нулю вне V_1 и на S; функции H_φ, A_φ, ∇A_φ непрерывны на S. Умножим (2.4) на $r^{-2}H_\varphi$, (2.5) на $r^2 A_\varphi$ и проинтегрируем по объему V_1, затем $\Delta_1 A_\varphi = 0$ умножим на $\nu_m r^2 A_\varphi$, проинтегрируем по внешнему объему V_2 и сложим с проинтегрированным уравнением (2.5). После некоторых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_1}\frac{1}{2}(rA_\varphi)^2 dV = -\nu_m \int\limits_{V_1+V_2}(\nabla r A_\varphi)^2 dV \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_1}\frac{1}{2}(r^{-1}H_\varphi)^2 dV = -\nu_m \int\limits_{V_1}(\nabla r^{-1}H_\varphi)^2 dV + \tag{2.7}$$

$$+\int\limits_{V_1} r^{-2}H_\varphi\left[\nabla\frac{V_\varphi + c\Delta_1 A_\varphi/4\pi n e}{r}\times\nabla r A_\varphi\right]_\varphi dV - \frac{cm_x}{2e}\int\limits_{V_1}\frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho\times\nabla p)\frac{H_\varphi}{r^2}dV$$

Члены, содержащие $\operatorname{div} V$ в (2.6) и (2.7), опущены, поскольку выражают элементарный факт изменения поля за счет сжимаемости плазмы. Из (2.6) следует, что полоидальная составляющая поля H_p с течением времени стремится к нулю, а тороидальное поле, согласно (2.7), может поддерживаться бесконечно долго за счет вихревой составляющей механической э.д.с.

Если в начальный момент поле конфигурации равно нулю, но аксиально симметричные движения плазмы таковы, что выполняется условие (1.8), возникнет тороидальное магнитное поле, которое будет возрастать со временем. Рост магнитного поля будет ограничиваться джоулевыми потерями, однако он будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто установившееся состояние, при котором диссипация магнитной энергии за счет конечной проводимости будет балансироваться ее поддержанием за счет E^*. Порядок величины этого стационарного поля и время T, необходимое для его достижения, можно примерно оценить, приравняв первый и последний члены в правой части (2.7)

$$H \sim \frac{4\pi\sigma}{c}E^* L, \qquad T \sim \frac{4\pi\sigma}{c^2}L^2 = \frac{L^2}{\nu_m} \tag{2.8}$$

где L — характерный размер конфигурации. Попытаемся оценить величины H и T для ядер звезд, вращающихся с дифференциальной угловой скоростью $\Omega(R, \vartheta)$ и имеющих средние характеристики близкие к солнечным: $R \sim 5.5\cdot 10^{10}$ *см*, $\sigma \sim 10^{16}$ *сек*$^{-1}$, $\Omega \sim 5\cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$. Получим тогда, что стационарное магнитное поле в ядре звезды может иметь порядок ~ 500 *гаусс* и достигается за время порядка 13 млрд. лет. И хотя это время более чем в два раза больше предполагаемого возраста Солнца (5 млрд. лет), тем не менее не стоит отбрасывать возможность образования тороидального магнитного поля Солнца за счет механизма Бирмана, так как оценки (2.8) очень грубы и возможны ошибки на порядок.

Используя формулу (1.10), оценим порядок величины напряженности магнитного поля, которое может генерироваться вследствие неоднородности химического состава плазмы. Из (1.10) получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^* = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{n_e e}\nabla p_e\right) = \frac{4m_x}{e}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{(5X+3)\rho}\left[\nabla p - \frac{2p\nabla X}{(5X+3)(X+1)}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{4m_x}{e}\,\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{(5X+3)\rho^2}\left[1 + \frac{AX^2}{5X+3}\rho T^{4.5}\left(\frac{2}{1+X}+17.5\right)\right] \tag{2.9}$$

и если подставить в (2.9) средние характеристики Солнца $\rho \sim 1.4$, $X \sim 0.8$, $T \sim 10^{7\circ}$, то второй член в фигурных скобках, учитывающий неоднородность, будет составлять примерно 0.01 первого. Таким образом, магнитные поля, создаваемые за счет неоднородности химического состава, для звезд типа Солнца достаточно малы, порядка 5 *гаусс*.

3. Полученные результаты можно применить к моделям звезд, вращающихся с дифференциальной угловой скоростью $\Omega(R, \vartheta)$. Поскольку звезды имеют плоскость симметрии, возникающие тороидальные поля будут иметь противоположные знаки в разных полушариях. По-видимому, тороидальные магнитные поля играют немаловажную роль во внутреннем строении звезд. Так многие теории солнечных пятен базируются на гипотезе о наличии в глубинах звезд тороидальных магнитных полей, отдельные части которых могут всплывать [13,14] или выноситься на поверхность конвективными движениями, образуя группу солнечных пятен.

В качестве модели звезды возьмем сферический объем радиуса a, заполненный полностью ионизованной водородной плазмой с постоянной проводимостью и окруженный непроводящей средой. Задачу будем решать в кинематической постановке, т. е. будем считать, что дифференциальное вращение звезды задано и определим возникающие в звезде магнитные поля и токи. При такой постановке задачи напряженность магнитного поля будет описываться уравнением индукции

$$\left[\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial H}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \vartheta^2}+\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial H}{\partial \vartheta}-\frac{H}{\sin^2\vartheta}\right)\right]\varphi_0=-\frac{c}{\nu_m}\operatorname{rot}\mathbf{E}^* \tag{3.1}$$

и граничными условиями:

$$H \text{ ограничено при } R=0$$

$$H=0 \quad \text{при } R\to\infty, \qquad (\operatorname{rot} H)_R=0 \quad \text{при } R=a$$

Свяжем $\operatorname{rot}\mathbf{E}^*$ с угловой скоростью вращения звезды через уравнение движения, в котором пренебрежем силой Лоренца (качественные оценки отношения силы Лоренца к центробежной силе по (2.8) дают порядок 10^{-7})

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^*=\frac{m_x}{2e}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=\frac{m_x}{2e}\operatorname{rot}(\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V})$$

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$R=ax, \qquad \Omega=\Omega_0\omega, \qquad H=\frac{m_x a^2 c\Omega_0^2}{e\nu_m}h$$

где a — радиус звезды, Ω_0 — угловая скорость поверхности звезды на экваторе. Уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial \vartheta^2}+\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial h}{\partial \vartheta}-\frac{h}{\sin^2\vartheta}\right)=\omega\sin\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\sin\vartheta-x\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\vartheta\right) \tag{3.2}$$

а граничные условия:

$$h \text{ ограничено при } x=0 \tag{3.3}$$

$$h=0 \quad \text{при } x\to\infty, \qquad (\operatorname{rot} h)_x=0 \quad \text{при } x=1$$

Решение уравнения (3.2) будем искать в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра

$$h=\sum_1^\infty T_n(x)P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.4}$$

и разложим правую часть (3.2) в ряд по этим функциям

$$\omega\sin\vartheta\left(\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\sin\vartheta-x\frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\vartheta\right)\equiv f(x,\vartheta)=\sum_1^\infty b_n(x)P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.5}$$

$$b_n(x)=\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_{-1}^{1} f(x,\vartheta)P_n^1(\cos\vartheta)\,d(\cos\vartheta)$$

Так как у звезды есть плоскость симметрии, в разложение (3.5) должны входить только четные присоединенные функции, т. е. $b_1=b_3...=b_{2n+1}=...0$.

Подставив (3.4) и (3.5) в уравнение (3.2) и используя условия (3.3), найдем

$$T_n(x) = [\varphi_n(x) - \varphi_n(1) + \psi_n(1)]x^n - \psi_n(x)x^{-(n+1)} \qquad (x < 1)$$

$$T_n(x) = 0 \qquad (x \geqslant 1)$$

Здесь

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2n+1}\int b_n(z)z^{-n+1}\,dz, \qquad \psi_n(z) = \frac{1}{2n+1}\int b_n(z)z^{n+2}\,dz$$

Напряженность магнитного поля будет

$$\mathbf{H} = \frac{m_x a^2 c \Omega_0^2}{e\nu_m}\varphi_0 \sum_1^\infty \{[\varphi_n(x) - \varphi_n(1) + \psi_n(1)]\,x^n - \psi_n(x)x^{-(n+1)}\}\,P_n^1(\cos\vartheta) \quad (x < 1)$$

$$H = 0 \qquad (x \geqslant 1) \tag{3.6}$$

соответствующие токи, текущие в модели, будут полоидальны

$$j = \frac{m_x a^2 c^2 \Omega_0^2}{4\pi e\nu_m x}\sum_1^\infty\left\{T_n(x)\left[\operatorname{ctg}\vartheta P_n^1(\cos\vartheta) + \frac{\partial P_n^1(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}\right]\mathrm{R}_0 - \right.$$
$$\left. - [T_n(x) + xT_n'(x)]\,P_n^1(\cos\vartheta)\vartheta_0\right\} \tag{3.7}$$

В качестве примера можно рассмотреть модель звезды, вращающейся вокруг оси по закону

$$\Omega = \Omega_0 K(1 - b\cos^2\vartheta)\;(2x^3 - 3x^2 + B) \tag{3.8}$$

(при $\Omega_0 = 14°.38$, $K = 1.46$, $b = 0.2$, $B = 1.68$; угловая скорость поверхности звезды ($x = 1$) совпадает со скоростью вращения Солнца [13], а распределение по радиусу приближенно соответствует расчетной модели Солнца [15]). Тогда ряд (3.6) ограничивается только тремя членами, и напряженность общего магнитного поля найдется по формуле

$$\mathbf{H} = -\frac{2m_x a^2 c \Omega_0^2 K}{e\nu_m}\varphi_0\,\{[-{}^1\!/_{35}t_2(x) + {}^5\!/_{14}bt_4(x) + {}^5\!/_{528}b^2t_6(x)]\sin 2\vartheta +$$
$$+ {}^1\!/_4 b\,[t_4(x) - {}^1\!/_{11}bt_6(x)]\sin 4\vartheta - {}^1\!/_6 b^2 t_6(x)\sin 6\vartheta\} \tag{3.9}$$

где полиномы $t_i(x)$ определяются через коэффициенты разложения $\omega(x, \vartheta)$ по присоединенным функциям Лежандра и имеют вид

$$t_2(x) = {}^5\!/_{33}(21 - 26b + {}^2\!/_{3^3}b^2)x^8 + {}^1\!/_{10}(138b - 41b^2 - 105)x^7 + {}^5\!/_4(7 - 10b + 3b^2)x^6 +$$
$$+ {}^5\!/_{24}B(21 - 34b + {}^{31}\!/_3b^2)x^5 - {}^{15}\!/_4B(7 - 14b + {}^{13}\!/_3b^2)x^4 - 4B^2b)1 - {}^1\!/_3b)x^2\ln x +$$
$$+ [-{}^{63}\!/_{44} + {}^{871}\!/_{330}b^{1607}\!/_{1980}b^2 + {}^5\!/_4B({}^5\!/_2 - {}^{19}\!/_3b^2 + {}^{251}\!/_{126}b^2)]x^2$$

$$t_4(x) - {}^2\!/_{13}(1 - {}^8\!/_{11}b)x^8 - {}^1\!/_2(1 - {}^9\!/_{11}b)x^7 + {}^9\!/_{22}(1 - b)x^6 + {}^1\!/_5B(1 - {}^{17}\!/_{11}b)x^5 +$$
$$+ {}^4\!/_{11}bBx^4\ln x + (-{}^9\!/_{143} + {}^{16}\!/_{142}b - {}^1\!/_5B + {}^{17}\!/_{55}bB - {}^1\!/_{14}B^2 - {}^1\!/_{154}bB^2)x^4 +$$
$$+ {}^1\!/_{14}B^2(1 + {}^1\!/_{11}b)x^2$$

$$t_0(x) = {}^1\!/_{15}x^8 - {}^3\!/_{14}x^7 + ({}^{31}\!/_{210} + {}^7\!/_{132}B - {}^1\!/_{36}B^2)x^6 + {}^1\!/_{12}Bx^5 - {}^3\!/_{22}Bx^4 + {}^1\!/_{36}B^2x^2$$

$$t_{2n}(x) = 0 \qquad (n > 3)$$

Плотность тока, текущего в модели, определяется следующим образом:

$$\mathbf{j} = \frac{m_x\Omega_0^2c^2aK^2}{2\pi e\nu_m x}\{[-7b^2t_6\cos^6\vartheta + ({}^{105}\!/_{11}b^2t_6 + 5bt_4)\cos^4\vartheta -$$
$$-({}^{35}\!/_{11}b^2t_6 + {}^{30}\!/_7bt_4 + {}^3\!/_{35}t_2)\cos^2\vartheta + {}^5\!/_{33}b^2t_6 + {}^3\!/_7bt_4 + {}^1\!/_{35}t_2]\,\mathrm{R}_0 - \tag{3.10}$$
$$-[b^2(t_6 + xt_6')\cos^4\vartheta - b(t_4 + xt_4 + {}^{10}\!/_{11}bt_6 + {}^{10}\!/_{11}bxt_6')\cos^2\vartheta +$$
$$+ {}^5\!/_{33}b^2(t_6 + xt'_6) + {}^3\!/_7b(t_4 + xt_4') + {}^1\!/_{35}(t_2 + xt_2')]\sin\vartheta\cos\vartheta\vartheta_0\}$$

Таким образом, вследствие дифференциального вращения плазмы по закону (3.8) в ней возникает ток (3.10) и индуцируется соответствующее магнитное поле (3.9).

Магнитное поле, полученное в этой простейшей модели, обладает следующими свойствами: оно — тороидально, обращается в нуль на поверхности, на оси вращения и в экваториальной плоскости, в северной и южной полусферах поле имеет противоположные направления; для характеристик близких к солнечным напряженность поля порядка 500 *гаусс*. Токи, текущие в модели, полоидальны и вблизи поверхности направлены по меридианам.

Конечно, эта простейшая модель не может объяснить 22-летние циклы солнечной активности и многие другие явления, но она дает правильные оценки напряженности поля в активных областях и улавливает их различную направленность в разных полушариях. Кроме того, вторая и третья гармоники в (3.9) показывают возможность образования двух или более тороидальных магнитных поясов разных знаков в одном полушарии. И если учесть, что механизм Бирмана, по-видимому, наиболее эффективен в водородной конвективной зоне, где имеет место интенсивная меридиональная циркуляция, то возможно, что более сложная гидродинамическая модель позволит объяснить циклы солнечной активности попеременным выносом на поверхность магнитных поясов различных направлений с помощью меридиональной циркуляции.

Поступило 7 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. Изд. М. Е. «Наука», 1966.
2. Babcock H. W., Magnetic fields of the A — type stars. Astrophys. J. 1958, vol. 128, No. 2.
3. Chandrasekhar S., Fermy E. Magnetic fields in spiral arms, Astrophys. J., 1953, vol. 118, No. 1.
4. Эльзассер В. Магнитная гидродинамика. Усп. физ. н., 1958, т. 64, вып.3.
5. Bull'ard E. C., Electromagnetic induction in a rotating sphere. Proc. Roy. Soc. ser A, 1949, vol. 199/No. 1059.
6. Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models. Astrophys. J., 1955, vol. 122, No. 2.
7. Брагинский С. И. О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1964, т. 47, вып. 3.
8. Брагинский С. И. Магнитогидродинамика земного ядра. Геомагнетизм и аэрономия, 1964, т. 4, № 5.
9. Шлютер А., Бирман Л. Межзвездные магнитные поля. Сб. «Пробл. соврем. физики». Перев. статей и обз. из иностр. период. лит., 1954, № 2.
10. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», М., Госатомиздат, 1963, вып. 1.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Изд. 6. М., Физматгиз, 1963.
12. Шварцшильд М. Строение звезд. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
13. Babcock H. W. The topology of the sun magnettic field and 22-years cycle. Astrophys. J., 1961, vol. 133, No. 2.
14. Parker E. N. The formation of sunspots from the solar toroidal field. Astrophis. J., 1955, vol. 121, No. 2.
15. Roxburgh J. W. On stellar rotation. II, Monthly Notices. Roy. Astron. Soc., 1964, vol. 128, No. 3.