НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С. А. ЧАПЛЫГИНА

Ю. И. ЦЫБИЗОВ

(Куйбышев)

Функция тока ψ, сжимаемого потока жидкости в плоскости годографа скорости, определяется уравнением

$$w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + w(1+M^2)\frac{\partial \psi}{\partial w} + (1-M^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \tag{0.1}$$

где w — скорость потока, θ — угол наклона вектора скорости к выбранной оси, M — число Маха.

Следуя Чаплыгину [1], положим

$$\tau = \frac{w^2}{w_{\max}{}^2} = \frac{k-1}{k+1}\frac{w^2}{a_*{}^2} = \frac{k-1}{k+1}\lambda^2 \tag{0.2}$$

Здесь $w_{\max}$ — максимальная скорость потока при истечении в вакуум, a_* — критическая скорость звука, k — показатель адиабаты течения.

Разделив в (0.1) переменные при помощи соотношения

$$\psi = w^n f \cos n\theta$$

в котором f — коэффициент, учитывающий влияние сжимаемости, получим дифференциальное уравнение для f

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left[(n+1) - \left(n+1-\frac{1}{k-1}\right)\tau\right]\frac{df}{d\tau} + \frac{n(n+1)}{2(k-1)} f = 0 \tag{0.3}$$

Чаплыгиным [1] был найден класс частных решений уравнения (0.1) с использованием гипергеометрической функции, в которой n не может быть целым отрицательным числом [2].

Однако, как показано ниже, ограничение, накладываемое на n гипергеометрической функцией вида

$$F(a_n, b_n, n+1, \tau) = 1 + \frac{a_n b_n}{1!(n+1)}\tau + \frac{a_n(a_n+1)b_n(b_n+1)}{2!(n+1)(n+2)}\tau^2 + \ldots$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[n - \frac{1}{k-1} + \left(\frac{k+1}{k-1}n^2 + \frac{1}{(k-1)^2}\right)^{1/2}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[n - \frac{1}{k-1} - \left(\frac{k+1}{k-1}n^2 + \frac{1}{(k-1)^2}\right)^{1/2}\right]$$

можно исключить для частных значений $n = -2k$ и $n = -1$, если уравнение (0.3) преобразовать к виду уравнения Риккати.

1. Преобразование уравнения функции тока сжимаемого течения к виду уравнения Риккати. Введем функцию Φ таким образом, чтобы были справедливы равенства

$$\Phi = \frac{f'}{f}, \qquad \Phi' + \Phi^2 = \frac{f''}{f} \tag{1.1}$$

Переходя к функции Φ в (0.3) на основании равенств (1.1), получим уравнение Риккати [3]

$$\Phi' + \Phi^2 + \frac{[(n+1)-(n+1-(k-1)^{-1})\tau]}{\tau(1-\tau)}\Phi + \frac{n(n+1)}{2(k-1)\tau(1-\tau)} = 0 \quad (1.2)$$

Для отыскания решения уравнения (1.2) воспользуемся частным точным решением, найденным в [4] при $n = -2k$ и которое для коэффициента сжимаемости определяется равенством

$$f_1 = c\tau^{2k}(1-\tau)^{k(k-1)^{-1}} \quad (1.3)$$

В случае $n = -2k$ (1.2) принимает вид

$$\Phi' + \Phi^2 + \frac{[1-2k-(1-2k-(k-1)^{-1})\tau]}{\tau(1-\tau)}\Phi + \frac{k(2k-1)}{(k-1)\tau(1-\tau)} = 0 \quad (1.4)$$

Используя частное решение (1.3) и вводя новую функцию η так, что

$$\Phi = \frac{k}{k-1}\frac{[2(k-1)(1-\tau)-\tau]}{\tau(1-\tau)} + \frac{1}{\eta}$$

$$\Phi' = -\frac{k}{k-1}\left\{\frac{2k-1}{\tau(1-\tau)} + \frac{[2(k-1)(1-\tau)-\tau](1-2\tau)}{\tau^2(1-\tau)^2}\right\} - \frac{\eta'}{\eta^2} \quad (1.5)$$

уравнение Риккати (1.4) приведем к линейному уравнению вида

$$\eta' + P(\tau)\eta = 1 \quad (1.6)$$

$$P(\tau) = -\frac{4k}{\tau} + \frac{2k}{(k-1)}\frac{1}{(1-\tau)} - \frac{1-2k}{\tau(1-\tau)} + \frac{1-2k}{(1-\tau)} - \frac{1}{(k-1)(1-\tau)}$$

Общий интеграл уравнения (1.6)

$$\eta = \frac{\tau^{1+2k}}{(1-\tau)^{\varkappa}}[c_1 + \xi], \qquad \xi = \int\frac{(1-\tau)^{\varkappa}d\tau}{\tau^{1+2k}} \qquad \left(\varkappa = \frac{1-2k}{k-1}\right) \quad (1.7)$$

Из (1.1) и (1.5) при помощи решения (1.7) находим

$$f = c_2\tau^{2k}(1-\tau)^{k/(k-1)}[c_1 + \xi]$$

Таким образом, в случае отрицательных значений n, определяемых, в частности, равенством $n = -2k$ решение уравнения Чаплыгина (0.1) принимает следующий вид:

$$\psi = c_2\tau^k(1-\tau)^{k/(k-1)}[c_1 + \xi]\cos 2k\theta \quad (1.8)$$

2. Линии тока и предельные линии. Для частного случая $k = 1.5$ можно проинтегрировать выражение (1.7) для ξ и тогда функция тока (1.8) относительно переменной λ, определяемой из равенства (0.2), принимает вид

$$\psi = c_2\lambda^3(1-0.2\lambda^2)^3[c_1 + \xi]\cos 3\theta \quad (2.1)$$

$$\xi = -\frac{0.6\lambda^2(1+\lambda^2)+1}{0.024\lambda^2(1-0.2\lambda^2)^3} + \frac{20}{3(1-0.2\lambda^2)^3} + \frac{10}{(1-0.2\lambda^2)^2} + \frac{20}{1-0.2\lambda^2} - 20\ln\frac{1-0.2\lambda^2}{0.2\lambda^2} \quad (2.2)$$

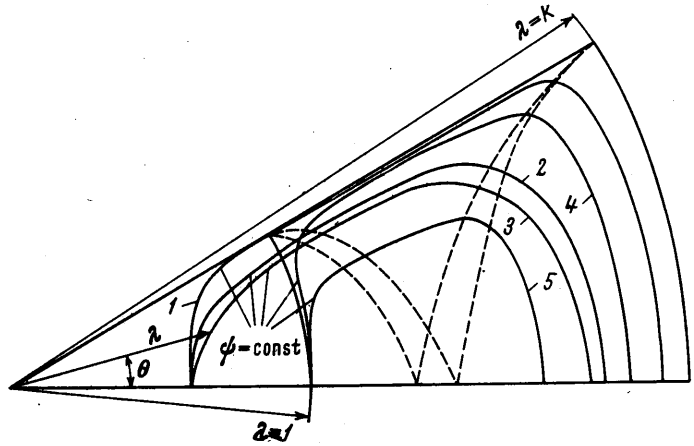
(Не умаляя общности, в дальнейшем принимаем, что $c_2 = 1$.)

Линии тока $\psi = \text{const}$, определяемые соотношением (2.1), построены в плоскости годографа скорости (фигура).

Линии тока *1*, *2* и *3* приходят из дозвуковой области $\lambda < 1$ в сверхзвуковую

$$1 < \lambda < K = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}$$

Для кривой *3* произвольная постоянная c_1 больше по абсолютной величине произвольной постоянной линии тока *1*.



Интересен характер кривых *4* и *5*, начинающихся на звуковой линии $\lambda = 1$. Следует также отметить, что ни одна линия тока из дозвуковой области течения не заканчивается на звуковой линии.

Используя соотношения между потенциалом скорости φ и функцией тока ψ [2, 4] и приравняв нулю якобиан

$$j = \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial w}$$

получим уравнение предельной линии.

В случае $k = 1.5$ оно принимает вид

$$\operatorname{tg} 3\theta = \pm\frac{3\lambda^2(1-0.2\lambda^2)(1-0.6\lambda^2)[c_1+\xi] - 625/\lambda^5(1-0.2\lambda^2)}{3\lambda^2(\lambda^2-1)^{1/2}(1-0.2\lambda^2)^{5/2}[c_1+\xi]} \tag{2.3}$$

где ξ определяется из (2.2).

Предельные линии, определяемые формулой (2.3), в случае различных значений произвольной постоянной c_1 нанесены на фигуре пунктиром.

Аналогичным же путем можно найти решение и для случая $n = -1$, при котором частное решение имеет вид [2]

$$f_1 = c(1-\tau)^{k/(k-1)}$$

Поступило 18 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М., Гостехиздат, 1949.
2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 3, М., «Наука», 1965.
4. Цыбизов Ю. И. Одно частное решение уравнения С. А. Чаплыгина. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.