О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Х. ИЗАКСОН, В. И. ЮДОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

В известных вычислениях критического числа Рэлея для подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной границей использовался метод линеаризации, причем считалось, что возмущения температуры исчезают на невозмущенной свободной границе.

Правильная линеаризация показывает, что возмущение температуры пропорционально возмущению свободной поверхности, а последнее пропорционально возмущению нормальных напряжений с коэффициентом пропорциональности $F = \nu^2 / gh^3$ (g — ускорение свободного падения, ν — коэффициент кинематической вязкости, h — толщина слоя жидкости). В п. 1 приведена постановка задачи с учетом параметра F, в п. 2 рассмотрены линеаризованные уравнения, доказано существование порога устойчивости — положительного собственного числа — и установлено, что с ростом параметра F / P (P — число Прандтля) значение критического числа Рэлея Ra_* убывает. В п. 3 приведены результаты численного расчета Ra в зависимости от параметра F / P.

Возникновение конвекции в слое жидкости со свободной гарницей, на которой поддерживается заданная температура, было исследовано в работах [1, 2]. Найденное значение критического числа Рэлея $R_* = 1100$ хорошо согласуется с экспериментальным. В вычислениях, проведенных в [1, 2], используется метод линеаризации, причем считается, что возмущения температуры исчезают на невозмущенной свободной границе. Это предположение, строго говоря, неверно.

Правильная линеаризация показывает, что возмущение температуры пропорционально возмущению свободной границы, а последнее пропорционально возмущению нормального напряжения (см. ниже (2.3)).

В п. 1 приведена постановка задачи, в п. 2 рассмотрены линеаризованные уравнения и доказано (теорема 2.1) существование порога устойчивости — простого положительного собственного числа. В п. 3 приведены результаты численного расчета R_* в зависимости от параметра $\mu = F / P$.

1. Рассмотрим горизонтальный слой жидкости, ограниченный с одной стороны свободной поверхностью, а с другой — твердой стенкой. Предположим, что на каждой из этих границ поддерживается постоянная температура и поставим вопрос об условиях возникновения свободной конвекции. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют, как известно [3], вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} - GT\boldsymbol{\gamma}$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{P}\nabla T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\left(G = \frac{\beta g h^3 \delta}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\varkappa}, \quad \delta = \delta_2 - \delta_1\right)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости, T — температура, p — давление, G — число Грасгофа, P — число Прандтля, β — коэффициент объемного расширения, g — ускорение силы тяжести, h — средняя толщина слоя (считается заданной), δ_2 и δ_1 температуры на твердой стенке и свободной поверхности соответственно, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент теплопроводности; система координат выбрана так, что ось x_3 направлена вертикально вниз, при этом вектор $\gamma = (0, 0, 1)$.

Предположим, что на свободной границе $x_3 = \varphi(x_1, x_2, t)$ выполняются краевые условия

$$\mathbf{v}'\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi_{x_1}'^2 + \varphi_{x_2}'^2}} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\tau_{ik}' n_k - [p + 1 / F\varphi'(x_1, x_2, *)] n_i = \pi_0 \delta_{ik}, \quad F = \nu^2 / gh^3 \tag{1.3}$$

$$T' = \delta_{ik} \tag{1.4}$$

которые означают, что жидкая частица не покидает свободной поверхности, на которой заданы касательные и нормальные напряжения и температура.

Условия прилипания и постоянства температуры на твердой стенке $x_3 = 1$ дают

$$\mathbf{v}' = 0, \qquad T = \delta_2 \tag{1.5}$$

Будем, кроме того, считать, что $\mathbf{v}$ и T периодичны по x_1, x_2 с периодами $L_1 = 2\pi / \alpha_1$, $L_2 = 2\pi / \alpha_2$. Тогда условие постоянства средней толщины слоя и дополнительное условие равенства нулю среднего количества движения вдоль осей x_1, x_2 примут вид (1.6)

$$\frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \varphi'(x_1, x_2, t)\, dx_1\, dx_2 = 0, \qquad \int_\varphi^1 \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} v_i' dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Заметим, что все дальнейшее можно было бы проделать для случая, когда краевое условие для температуры имеет вид

$$\partial T' / \partial n + \varkappa T' = 0$$

2. Задача (1.1) — (1.6) имеет, очевидно, решение, соответствующее покоящейся жидкости

$$\mathbf{v}_0 = 0, \qquad T_0 = x_3, \qquad p_0 = -{}^1/_2 G x_3^2, \qquad \varphi_0 = 0 \tag{2.1}$$

Для исследования его устойчивости применим метод малых колебаний (первая метода Ляпунова). Отделим время, полагая

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) e^{\sigma t}, \qquad T(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}) e^{\sigma t}, \qquad p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{\sigma t},$$

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_1 x_2) e^{\sigma t}$$

Тогда линеаризованная система примет вид

$$\sigma \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - GT\gamma, \quad \sigma T + v_3 = {}^1 / \mathrm{p} \Delta T, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{2.2}$$

$$x_3 = 0, \qquad T = -\varphi, \qquad v_3 = \sigma\varphi, \qquad \tau_{13} = 0, \qquad \tau_{23} = 0, \qquad \varphi = F\tau_{33}$$

$$x_3 = 1, \qquad T = 0, \qquad \mathbf{v} = 0 \tag{2.3}$$

Оставляя в стороне вопрос о возможности колебательной неустойчивости, предположим, что порог устойчивости определяется значениями параметров $P = P_*$, $r = G_*$, $F = F_*$ для которых $\sigma = 0$. Доказано [1], что при $F = 0$ колебательная неустойчивость невозможна. Исключив в системе (2.2) — (2.3) при $\sigma = 0$ скорость, давление и форму свободной поверхности и полагая

$$T(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_3) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \tag{2.4}$$

для определения θ получим следующую задачу:

$$L^3\theta = -\lambda\alpha^2\theta \tag{2.5}$$

$$x_3 = 0, \qquad L\theta = L^2\theta = \mu[DL^2\theta - 2\alpha^2 DL\theta] - \alpha^2\theta = 0$$

$$x_3 = 1, \qquad \theta = L\theta = DL\theta = 0 \tag{2.6}$$

Здесь (2.7)

$$D = d\,/\,dx_3, \quad L = D^2 - \alpha^2, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \lambda = PG, \quad \mu = F\,/\,P$$

Теорема 2.1. При каждом $\mu > 0$ существует положительное, простое собственное число $\lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \mu)$ задачи (2.5) — (2.7). Ему соответствует положительная собственная функция, и в круге радиуса $\lambda_\perp$ нет других собственных чисел задачи (2.5) — (2.7). Собственное число $\lambda_\perp$ является монотонно убывающей функцией параметра μ при $\mu \geqslant 0$.

Доказательство. Полагая $L\theta = -U$, сведем задачу (2.5) — (2.7) к двум задачам:

первая

$$L^2 u = \lambda\alpha^2\theta \tag{2.8}$$

$$x_3 = 0, \quad u = Lu = 0; \qquad x_3 = 1, \quad u = u' = 0 \tag{2.9}$$

вторая

$$L\theta = -u \tag{2.10}$$

$$x_3 = 0, \quad \alpha^2\theta = \mu[3\alpha^2 u'(0) - u'''(0)], \quad x_3 = 1, \quad \theta = 0 \tag{2.11}$$

Оператор L^2 с краевыми условиями (2.9) самосопряжен, его функция Грина симметрична и имеет вид

$$\Gamma_1(x, \xi) = \frac{1}{\alpha^3(\operatorname{sh}2\alpha - 2\alpha)}\{[\operatorname{sh}\alpha(1-\xi)\alpha\xi\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{ch}\alpha) -$$
$$- \alpha(1-\xi)(\alpha\operatorname{sh}\alpha\xi + \operatorname{ch}\alpha\xi)]\operatorname{sh}\alpha x + [\alpha(1-\xi)\operatorname{ch}\alpha\xi - \tag{2.12}$$
$$- \operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha(1-\xi)]\,\alpha x\operatorname{ch}\alpha x$$
$$(0 \leqslant x < \xi \leqslant 1)$$

При помощи $\Gamma_1(x, \xi)$ можно записать решение задачи (2.8), (2.9) в виде

$$u(x) = \lambda\alpha^2\int_0^1 \Gamma_1(x, \xi)\,\theta(\xi)\,d\xi \tag{2.13}$$

Функция Грина оператора L с краевыми условиями $\theta(0) = \theta(1) = 0$ тоже симметрична и равна

$$\Gamma_2(x, \xi) = \frac{\operatorname{sh}\alpha x\operatorname{sh}\alpha(1-\xi)}{\alpha\operatorname{sh}\alpha} \qquad (0 \leqslant x < \xi \leqslant 1)$$

Используя $\Gamma_2(x, \xi)$, решение задачи (2.10), (2.11) запишем в виде

$$\theta(x) = \int_0^1 \Gamma_2(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi + \mu\frac{\operatorname{sh}\alpha(1-x)}{\alpha^2\operatorname{sh}\alpha}[3\alpha^2 u'(0) - u'''(0)] \tag{2.14}$$

Из соотношений (2.13), (2.14) вытекает следующее интегральное уравнение для функции θ:

$$\theta = \lambda H_\mu\theta = \lambda\alpha^2\int_0^1 H(x, t, \mu)\,\theta(t)\,dt \tag{2.15}$$

Ядро H дается формулой (2.16)

$$H(x,t,\mu)=\int_0^1 \Gamma_2(x,s)\Gamma_1(s,t)\,ds+\mu\frac{\operatorname{sh}\alpha(1-x)}{\alpha^2\operatorname{sh}\alpha}[3\alpha^2\Gamma_{1x}(0,t)-\Gamma_{1xxx}(0,t)]$$

Пользуясь выражением (2.12) для подсчета второго слагаемого в (2.14), получим

$$\psi(t)\equiv 3\alpha^2\Gamma_{1x}(0,t)-\Gamma_{1xxx}(0,t)=\frac{2}{\operatorname{sh}2\alpha-2\alpha}[\operatorname{sh}\alpha(1-t)(\alpha t\operatorname{sh}\alpha+$$
$$+\operatorname{ch}\alpha)-\alpha(1-t)(\alpha\operatorname{sh}\alpha t+\operatorname{ch}\alpha t)] \tag{2.17}$$

Здесь $H(x, t, \mu)$ — непрерывное по x, t, несимметричное ядро. Покажем, что оно при любом $\mu > 0$ и $0 \leqslant x, t < 1$ положительно. Для этого заметим сначала, что $\Gamma_1(x, t)$ и $\Gamma_2(x, t)$ — осцилляционные ядра в смысле М. Г. Крейна. Этот факт нетрудно установить, используя, как это делается в [4], § 8, теорему Ролля и представление операторов L^2 и L

$$L=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}e^{-2\alpha x}\frac{d}{dx}e^{\alpha x} \tag{2.18}$$

$$L^2=e^{\alpha x}\frac{d}{dx}e^{-\alpha x}\frac{d}{dx}e^{2\alpha x}\frac{d}{dx}e^{-2\alpha x}\frac{d}{dx}e^{\alpha x} \tag{2.19}$$

Поэтому первое слагаемое в (2.16) — тоже осцилляционное ядро, как композиция осцилляционных ядер [4]; в частности, оно положительно на (0.1).

Для доказательства положительности второго слагаемого в (2.16) заметим, что $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, а при $0 < t < 1$ из (2.12) непосредственно следует неравенство

$$\psi(t)\geqslant\frac{\alpha^3(\operatorname{sh}2\alpha-2\alpha)}{2\operatorname{sh}\alpha x}\Gamma_1(x,t)>0 \qquad (0<x<t) \tag{2.20}$$

Таким образом, ядро $H(x, t, \mu)$ положительно при $0 \leqslant x, t < 1$. Оператор H_μ вполне непрерывен в $L_2(0, 1)$ и оставляет инвариантным конус K положительных функций.

Покажем, что функция u_0 — положительна, причем можно взять $u_0(x) = \operatorname{sh}\alpha\,(1 - x)$. Действительно, для любой положительной функции $f \in L_2(0, 1)$ из (2.16), отбрасывая первое (положительное) слагаемое, получим

$$H_\mu f\geqslant M\operatorname{sh}\alpha(1-x),\qquad M=M(f)=\frac{\mu}{\alpha^2\operatorname{sh}\alpha}\int_0^1 f(t)\psi(t)\,dt \tag{2.21}$$

Покажем, что справедлива также оценка сверху

$$H_\mu f\leqslant N\operatorname{sh}\alpha(1-x) \tag{2.22}$$

Для этого заметим, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\frac{\Gamma_2(x,s)}{\operatorname{sh}\alpha(1-x)}=\frac{\operatorname{sh}\alpha s}{\alpha\operatorname{sh}\alpha} \tag{2.23}$$

Тогда оценка (2.22) непосредственно следует из (2.16), причем

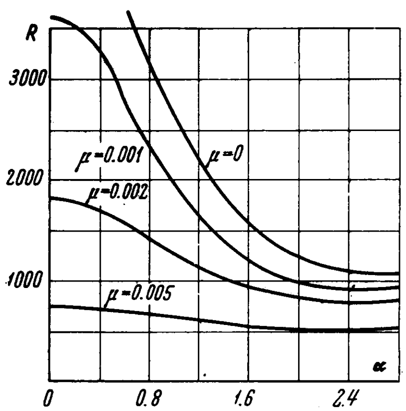
$$N=M+\int_0\int_0\frac{\operatorname{sh}\alpha s}{\alpha\operatorname{sh}\alpha}\Gamma_1(s,t)f(t)\,ds\,dt \tag{2.24}$$

Теперь утверждение теоремы о существовании положительного простого характеристического числа, которому отвечает положительная собственная функция, следует из известных результатов теории положительных операторов [5].

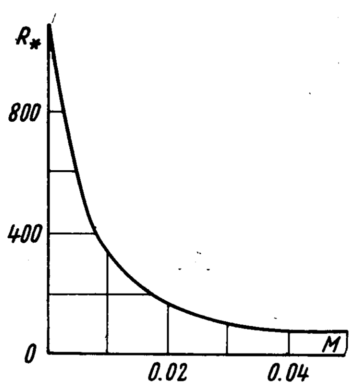
Оператор H_μ допускает представление 1

$$H_\mu = H_0 + \mu\Psi, \qquad (\Psi\theta)(s) = \frac{\operatorname{sh}\alpha(1-s)}{\operatorname{sh}\alpha}\int_0^1 \psi(t)\theta(t)\,dt \tag{2.25}$$

Поэтому с ростом μ оператор H_μ возрастает, а его первое характеристическое число монотонно убывает [4]. Теорема доказана.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим еще одну полезную оценку собственного числа λ_1 при больших μ. Величина $\lambda_1\mu$ есть собственное число убывающего по μ оператора $(1/\mu, H_0 + \Psi$, поэтому $\lambda_1\mu$ возрастает вместе с μ. Согласно теории возмущений, ее предел есть характеристическое число оператора Ψ. Таким образом, имеем

$$\lambda_\perp\mu \leqslant \lim_{\mu\to\infty} \lambda_1\mu = \frac{1}{I}, \qquad I = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\int_0^1 \psi(t)\operatorname{sh}\alpha(1-t)\,dt \tag{2.26}$$

Вычисляя интеграл (2.26), получаем

$$\lambda_1 \leqslant \frac{2\alpha\operatorname{sh}\alpha(\operatorname{sh}2\alpha - 2\alpha)}{\mu\left[{}^3/_2\operatorname{ch}\alpha(\operatorname{sh}2\alpha-\alpha) - \alpha^2(\alpha\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{sh}\alpha)\right]} \tag{2.27}$$

3. Трансцендентному уравнению для определения собственных чисел $\lambda_\perp$ краевой задачи (2.5)—(2.7) можно придать вид

$$\det A = 0 \tag{3.1}$$

где $A = (a_{ik})$ — матрица четвертого порядка с элементами

$$\begin{aligned}
&a_{11} = -3 + a_{13}, \quad a_{12} = cl(\lambda' + 2), \quad a_{13} = l[a(\lambda'+2) + \sqrt{3}b(\lambda'-2)]\\
&a_{14} = l[(\lambda'+2)b - \sqrt{3}a(\lambda+2)], \quad a_{21} = \operatorname{Re}\operatorname{ch}\alpha c + 2e^{\alpha a}\cos\varphi_0\\
&a_{22} = -\operatorname{Im}\operatorname{sh}\alpha c, \quad a_{23} = 2\operatorname{sh}\alpha a\cos\varphi_0, \quad a_{24} = 2\operatorname{ch}\alpha\, a\sin\varphi_0\\
&a_{31} = -\operatorname{Re}\operatorname{ch}\alpha c - 2e^{\alpha a}\cos\varphi_\perp, \quad a_{32} = \operatorname{Im}\operatorname{sh}\alpha c\\
&a_{33} = -e^{\alpha a}\cos\varphi_2 + e^{\alpha a}(a\cos\varphi_2 - b\sin\varphi_1), \quad a_{42} = \operatorname{Im}[c\operatorname{ch}\alpha c]\\
&a_{43} = -e^{\alpha a}[a\cos\varphi_2 - b\sin\varphi_2] - e^{-\alpha a}[a\cos\varphi_1 + b\sin\varphi_1]\\
&a_{44} = e^{\alpha a}[a\sin\varphi_2 + b\cos\varphi_2] - e^{-\alpha a}[a\sin\varphi_1 - b\cos\varphi_1]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

В равенствах (3.2) введены следующие обозначения:

$$\lambda' = (\lambda_1 / \alpha^4)^{1/3}, \quad c = \sqrt{1-\lambda'}, \quad a = [{}^1/_8(\sqrt{(\lambda'+2)^2+3\lambda'^2+\lambda'}+\lambda'+2]^{1/2}$$

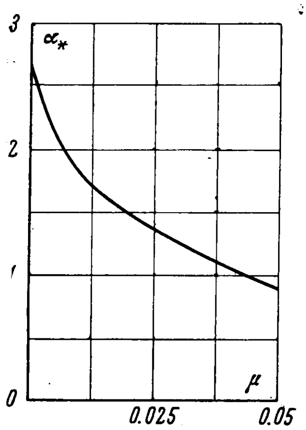
$$b = [{}^1/_8(\sqrt{(\lambda'+2)^2+3\lambda'^2}-\lambda'-2)]^{1/2}, \quad \varphi_0 = ab, \quad \varphi_1 = ab + {}^2/_3\pi$$

$$\varphi_2 = ab - {}^2/_3\pi, \quad l = \lambda'\alpha^3\mu$$

Приводим критические значения числа Рэлея вычисленные для некоторых значений μ

$\mu = 0$	$1\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	∞
$R_* = 1100$	960	830	542	324	174	0

На фиг. 1 приведены нейтральные кривые зависимости числа Рэлея $\lambda_1(\alpha)$ при различных значениях μ. Для каждого μ нейтральная кривая имеет минимум при некотором $\alpha = \alpha_*$. Поведение нейтральной кривой при малых α можно исследовать методом возмущений. Разыскивая собственное число и собственную функцию в виде рядов по степеням α, получаем



Фиг. 3

$$\theta(x) = (1-x) + o(\alpha^2), \qquad \lambda_1 = \frac{40}{11\mu} + o(\alpha^2) \tag{3.3}$$

Эти формулы показывают, что для любого $\mu > 0$ (в противоположность случаю $\mu = 0$) нейтральная кривая при $\alpha = 0$ не имеет особенности.

На фиг. 2 показана зависимость критического значения числа Рэлея $\lambda_*(\mu) = \min \lambda_1(\alpha, \mu)$. С ростом

$$\mu = \frac{F}{P} = \frac{\chi\nu}{gh^3}$$

величина λ_* быстро убывает, однако из приведенной формулы видно, что в достаточно сильном гравитационном поле для толстого слоя жидкости влиянием этого параметра можно пренебречь. Этим и объясняется хорошее совпадение большей части экспериментальных данных с теоретическим значением при $F / P = 0$. (Например, для слоя воды толщиной 1 *см* на поверхности Земли $F / P \approx 10^{-7}$). Но это не всегда верно — слою глицерина толщиной 1 *мм* соответствует $F / P = 0.007$ и $R_* = 400$, $\alpha_* = 2.2$. На фиг. 3 показана зависимость $\alpha_*(\mu)$.

Точность представленных кривых находится в пределах 10% и связана с неудобством графического изображения. Точность величин, приведенных в таблице, порядка 0.1%. Расчеты проводились на ЭВМ «Минск-12» на вычислительном центре Ростовского университета.

Поступило 16 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Pellew A., Southwell R. V. On maintained convectur motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc., 1940, Ser. A, vol. 176.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydrodynamic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М., Гостехиздат, 1950.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.