

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВИЖНОГО СОСУДА С ПЕРЕГОРОДКАМИ

Л. В. ДОКУЧАЕВ, И. А. ЛУКОВСКИЙ

(Москва, Киев)

Приводятся методы, позволяющие определять присоединенные массы и частоты колебаний жидкости в отсеке произвольной осесимметричной формы. Сначала излагается метод разделения переменных, который был применен ранее для случая цилиндрической полости [1], затем вариационный метод и метод разложения по собственным функциям краевых задач с параметром в граничном условии.

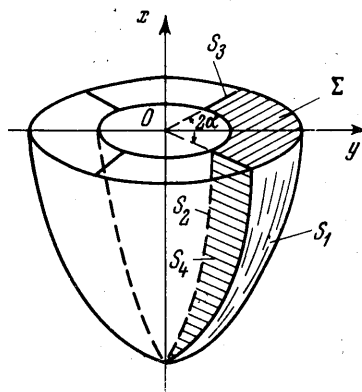
В качестве примера рассмотрен разделенный перегородками конический сосуд с произвольным углом раствора. Приводятся численные результаты с анализом сходимости и дается сравнение с приближенными и точными значениями в некоторых частных случаях.

Динамике сосуда с колеблющейся жидкостью посвящен ряд работ Г. С. Нариманова, Д. Е. Охотимского, Н. Н. Моисеева, Б. И. Рабиновича, В. В. Румянцев, Х. Н. Абрамсона, Х. Ф. Бауэра и др. Кроме основных теоретических положений, эти работы содержат ряд практических результатов, относящихся к определению гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения. В частности, из класса полостей, рассматриваемых в предлагаемой работе, достаточно хорошо исследован вопрос о колебаниях жидкости в цилиндрических полостях с радиальными перегородками (см., например, [2]).

1. Постановка задачи. Возмущенное движение абсолютно твердого тела с осесимметричной полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью и разбитой k радиальными сплошными перегородками на отсеки (фиг. 1), описывается системой уравнений, приведенной в работе [2].

Безразмерные гидродинамические коэффициенты одного отсека

$$\begin{aligned} \lambda_{ni} &= \int_S \varphi_{ni} v_i dS = \kappa_{ni} \int_{\Sigma} x_i \varphi_{ni} dS \\ (i &= 1, 2, 3) & (1.1) \\ \lambda_{0ni} &= \int_S \varphi_{ni} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i dS = \kappa_{ni} \int_{\Sigma} \Psi_i \varphi_{ni} dS \\ (n &= 1, 2, \dots) \\ \mu_{ni} &= \kappa_{ni} \int_S \varphi_{ni}^2 dS, \\ J_i &= \int_S \Psi_i (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i dS + \int_{\Sigma} \Psi_i (\mathbf{R}_c \times \mathbf{v})_i dS \end{aligned}$$



Фиг. 1

выражаются через безразмерные функции $\Psi_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$, которые удовлетворяют следующим краевым задачам:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{ni} &= 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \varphi_{ni}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_S = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{ni}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Sigma} = \kappa_{ni} \varphi_{ni} \\ \Delta \Psi_i &= 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{v}} \Big|_S = (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Sigma} = (\mathbf{R}_c \times \mathbf{v})_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ — смоченная часть отсека, Σ — свободная поверхность жидкости, $\mathbf{R}_c\{x_c, r_c, 0\}$ — радиус-вектор ее центра масс, κ_{ni} — частотный параметр.

Инвариантные отношения коэффициентов (1.1), позволяющие исключить неопределенность решения первой краевой задачи (1.2), могут быть представлены в форме

$$m_{n2} = \frac{\lambda_{n3}^2}{\mu_{n2}}, \quad m_{n3} = \frac{\lambda_{n2}^2}{\mu_{n3}}, \quad c_{n2} = -\frac{\lambda_{0n2}}{\lambda_{n3}}, \quad c_{n3} = \frac{\lambda_{0n3}}{\lambda_{n2}}$$

Решение краевых задач (1.2) можно представить в виде

$$\Phi_{ni}(x, r, \eta) = \Psi_{pm}(x, r) \cos m(\eta + \alpha) \quad (1.3)$$

$$\Psi_1(x, r, \eta) = \frac{2}{\alpha} \sum_m \Phi_m(x, r) \cos m(\eta + \alpha)$$

$$\Psi_i(x, r, \eta) = -a_i x + (-1)^i 2\chi_i(\alpha) \sum_m \frac{F_m(x, r)}{\alpha \sigma_0} \cos m(\eta + \alpha)$$

где

$$m = \begin{cases} 1/2\pi(2s+1)/\alpha & \text{при } i=1, 2 \\ \pi s/\alpha & \text{при } i=3 \end{cases} \quad (s=0, 1, 2, \dots), \quad \begin{matrix} a_2=0 \\ a_3=r_c \end{matrix} \quad (1.4)$$

$$\chi_i(\eta) = \begin{cases} \cos \eta & \text{при } i=2 \\ \sin \eta & \text{при } i=3 \end{cases}, \quad \sigma_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } m \neq 0 \\ 2 & \text{при } m = 0 \end{cases}$$

Величина p является порядковым номером собственного значения первой задачи (1.2) при фиксированном числе m , а число n — порядковый номер всевозможных пар чисел p и s . Функции Ψ_{pm} , Φ_m , F_m должны удовлетворять двумерным краевым задачам

$$\begin{aligned} \Delta' \Psi_{pm} - \frac{m^2}{r^2} \Psi_{pm} &= 0 \text{ в } G, & \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial \nu} \Big|_L &= 0, & \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= \kappa_{pm} \Psi_{pm} & (1.5) \\ \Delta' \Phi_m - \frac{m^2}{r^2} \Phi_m &= 1 \text{ в } G, & \frac{\partial \Phi_m}{\partial \nu} \Big|_{L+L_0} &= 0 & \left(\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ \Delta' F_m - \frac{m^2}{r^2} F_m &= (m^2 - 1) \frac{x}{r} \text{ в } G, & \frac{\partial F_m}{\partial \nu} \Big|_L &= r\nu_x - x\nu_r, & \frac{\partial F_m}{\partial \nu} \Big|_{L_0} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь G — площадь меридионального сечения отсека полости ($S_3 = S_4 = G$), L_0 и $L = L_1 + L_2$ — линия пересечения меридионального сечения со свободной поверхностью Σ и с поверхностями вращения S_1, S_2 .

Подставим выражения (1.3) в формулы для присоединенных масс жидкости (1.1) и проинтегрируем по η . Получим

$$\begin{aligned} \lambda_{n, 5-i} &= \frac{2\chi_i(\alpha)}{1-m^2} E_{pm}, & \lambda_{0ni} &= (-1)^i \frac{2\chi_i(\alpha)}{1-m^2} E_{0pm}, & \lambda_{0n1} &= 2E_{xpm} & (1.6) \\ \mu_{ni} &= \alpha \sigma_0 \frac{N_{pm}^2}{\kappa_{pm}}, & J_1 &= \frac{4}{\alpha} \sum_m \delta J_m, & J_i &= 2a_i \sin \alpha J_0 + 4\chi_i^2(\alpha) \sum_m \frac{\Delta J_m}{(1-m^2)^2 \alpha \sigma_0} \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} E_{pm} &= \int_L r \Psi_{pm}(x, r) \nu_r ds - (1-m^2) \int_G \Psi_{pm}(x, r) dS = \int_{L_0} r^2 \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial \nu} ds \\ E_{xpm} &= - \int_G r \Psi_{pm}(x, r) dS = \int_{L_0} r \Phi_m(x, r) \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial \nu} ds \\ E_{0pm} &= \int_L r \Psi_{pm}(x, r) (r\nu_x - x\nu_r) ds + (1-m^2) \int_G x \Psi_{pm}(x, r) dS = \\ &= \int_{L_0} r F_m(x, r) \frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial \nu} ds, & N_{pm}^2 &= \int_{L_0} r \left(\frac{\partial \Psi_{pm}}{\partial x} \right)^2 ds & (1.7) \\ \Delta J_m &= \int_L r F_m(x, r) (r\nu_x - x\nu_r) ds + (1-m^2) \int_G x F_m(x, r) dS \\ \delta J_m &= - \int_G r \Phi_m(x, r) dS, & J_0 &= \int_{L+L_0} x r^2 \nu_x ds = \int_G r^2 dS \end{aligned}$$

Таким образом, в этом параграфе удалось отделить координату η и вместо трехмерных задач (1.2) решать двумерные (1.5).

2. Метод разделения переменных. Решение краевых задач (1.2) для целого класса полостей удается получить методом разделения переменных. Во всех этих случаях выбирается такая система координат, чтобы поверхность жидкости совпадала с координатной сеткой [1, 2].

Рассмотрим здесь, как с помощью метода разделения переменных можно приближенно определить присоединенные массы и частоты колебаний жидкости в конической полости с перегородками.

Пусть отсек полости образован двумя радиальными перегородками в неусеченном конусе с углом полураствора θ_0 и вершиной, направленной вниз. Начало координат поместим в вершине конуса. На угол конусности θ_0 наложим ограничение вида $\sin \theta_0 \gg 1 - \cos \theta_0$, т. е. рассмотрим острые конусы, у которых невозмущенная свободная поверхность мало отличается от сферической поверхности с центром в вершине конуса (фиг. 2).

Подвижность жидкости в каждом отсеке будет определяться функциями ψ_{pm} , Φ_m , F_m , удовлетворяющими, согласно предыдущему, крайевым задачам (1.5).

Применяя метод разделения переменных [1], можно записать решения краевых задач (1.5) через степенные функции и присоединенные функции Лежандра в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \psi_{pm}(R, \theta) &= \frac{R^\nu}{\nu} Y_{\nu m}(\theta), \quad Y_{\nu m}(\theta) = \frac{P_\nu^m(\mu)}{P_\nu^m(\mu_0)} \\ \Phi_m(R, \theta) &= \sum_\nu \frac{A_{\nu m}}{(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2} \left(\frac{2R^\nu}{\nu} - R^2 \right) Y_{\nu m}(\theta) \\ F_m(R, \theta) &= \sum_\nu \frac{B_{\nu m}}{(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2} \left(\frac{2R^\nu}{\nu} - R^2 \right) Y_{\nu m}(\theta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{\nu m} &= \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}(\theta) \sin \theta \, d\theta, \quad N_{\nu m}^2 = \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}^2(\theta) \sin \theta \, d\theta \\ B_{\nu m} &= \sin \theta_0 - (1 - m^2) \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}(\theta) \cos \theta \, d\theta \\ R^2 &= x^2 + r^2, \quad \mu = \cos \theta, \quad \mu_0 = \cos \theta_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ν является p -м корнем уравнения $Y_{\nu m}'(\theta_0) = 0$.

Подставив значения функций (2.1) в формулы (1.6), (1.7) и учитывая обозначения (2.2), получим следующие значения для присоединенных масс и частот колебаний жидкости

$$\begin{aligned} \lambda_{n, 5-i} &= \frac{2\chi_i(\alpha)}{1-m^2} E_{\nu m}, \quad \lambda_{0n1} = -\frac{2A_{\nu m}}{\nu(\nu+3)} \\ \lambda_{0ni} &= -(-1)^i \frac{2\chi_i(\alpha)}{(1-m^2)\nu(\nu+3)}, \quad \mu_{ni} = \alpha \sigma_0 \frac{N_{\nu m}^2}{\nu} \\ J_1 &= \frac{4}{\alpha} \sum_m \sum_\nu \frac{(\nu+5)A_{\nu m}^2}{5\nu(\nu+3)^2 N_{\nu m}^2}, \quad \kappa_{in} = \nu \\ J_i &= 2a_i \sin \alpha J_0 + 4\chi_i^2(\alpha) \sum_m \sum_\nu \frac{(\nu+5)B_{\nu m}^2}{(1-m^2)^2 5\nu(\nu+3)^2 N_{\nu m}^2 \alpha \sigma_0} \\ &\quad \left(E_{\nu m} = \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}(\theta) \sin^2 \theta \, d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Нетрудно обобщить эти формулы на случай соосных усеченных конусов [1]. Для малых углов конусности можно положить $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$. Тогда функцию

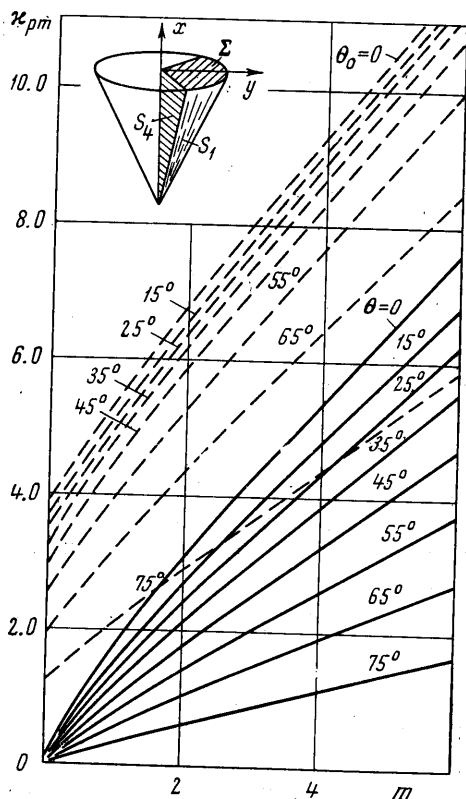
$Y_{vm}(\theta)$ можно представить в виде функций Бесселя

$$Y_{vm}(\theta) = Y_m(\xi_{pm}\vartheta) = \frac{J_m(\xi_{pm}\vartheta)}{J_m(\xi_{pm})}, \quad \vartheta = \frac{\theta}{\theta_0}$$

где ξ_{pm} — является p -м корнем уравнения $J_m'(\xi) = 0$. Выражения для коэффициентов (2.3) остаются в силе, только входящие в них параметры следует определять по приближенным формулам

$$\begin{aligned} v &\approx -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\xi_{pm}^2}{\theta_0^2}} \approx \frac{\xi_{pm}}{\theta_0}, \quad N_{pm}^2 \approx \theta_0^3 \int_0^1 \vartheta Y_m^2(\xi_{pm}\vartheta) d\vartheta \\ A_{vm} &\approx \theta_0^2 \int_0^1 \vartheta Y_m(\xi_{pm}\vartheta) d\vartheta, \quad E_{vm} \approx \frac{\theta_0^2}{\xi_{pm}} B_{vm} \approx \theta_0^3 \int_0^1 \vartheta^2 Y_m(\xi_{pm}\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Численные значения последних интегралов приведены в работе [4]. Исследуя



Фиг. 2

Приведем еще точное решение последней из краевых задач (1.5) при $m = 1$ и угле $\theta_0 = \arctg^2/11\sqrt{11}$

$$F_1(x, r) = -\frac{xr}{\cos 2\theta_0} + \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{8 \cos 2\theta_0} (4x^2r - r^3) \quad (2.7)$$

при помощи которого получаем значение момента инерции жидкости в этом конусе, равным 5.2. Точное решение этой задачи для целиком заполненного конуса, было построено ранее Н. Е. Жуковским в работе [4].

выражение (2.1) для ψ_{pm} , получаем, что для определенных углов конусности θ_0 значение первого корня v принимает целые значения и функции Лежандра вырождаются в присоединенные полиномы Лежандра. При $v = m + 1$ функция

$$\psi_{1m}(R, \theta) = \frac{R^{m+1}}{m+1} \frac{P_{m+1}^m(\mu)}{P_{m+1}^m(\mu_0)} = xr^m \quad (2.5)$$

является точным решением первой задачи (1.5) для конуса с углом полураствора

$$\theta_0 = \arctg \sqrt{m}$$

Присоединенные массы и квадрат частоты колебаний жидкости в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,5-i} &= \frac{2\chi_i(\alpha)}{(1-m^2)(m+3)} \\ \lambda_{01,i} &= -(-1)^i \frac{4\chi_i(\alpha)}{(1-m^2)\sqrt{m}(m+4)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\lambda_{01,1} = -\frac{2}{m(m+2)(m+4)}$$

$$\mu_{1i} = \frac{\alpha}{2\sqrt{m}(m+1)}, \quad \omega_{1i}^2 = \sqrt{m}$$

Здесь радиус свободной поверхности жидкости принят равным единице. В частном случае, когда $m = 1$, коэффициенты (2.6) совпадают с результатами, полученными в работе [3].

3. Вариационный метод решения краевых задач. Получить точные значения гидродинамических коэффициентов для большинства встречаемых на практике полостей крайне затруднительно. В качестве одного из приближенных методов рассмотрим схему применения вариационного метода.

Нетрудно показать, что решение краевых задач (1.5) эквивалентно нахождению минимума следующих функционалов:

$$V_1 = \int_G \left(\Psi_{mx}^2 + \Psi_{mr}^2 + \frac{m^2}{r^2} \Psi_m^2 \right) r dS - \kappa_m \int_L \Psi_m^2 r ds$$

$$V_2 = \int_G \left(\Phi_{mx}^2 + \Phi_{mr}^2 + \frac{m^2}{r^2} \Phi_m^2 + 2\Phi_m \right) r dS \quad (3.1)$$

$$V_3 = \int_G \left(F_{mx}^2 + F_{mr}^2 + \frac{m^2}{r^2} F_m^2 + 2(m^2 - 1) \frac{x}{r} F_m \right) r dS - 2 \int_L F_m r (rv_x - xv_r) ds$$

Систему координатных функций будем строить исходя из частных решений первого из уравнений (1.5)

$$w_{k1}^{(m)} = \frac{2^m m! (k-m)!}{(k+m)!} R^k P_k^m(\mu), \quad w_{k2}^{(m)} = \frac{2^m m! (k-m)!}{(k+m)!} R^k Q_k^m(\mu) \quad (3.2)$$

$$w_{k3}^{(m)} = \frac{2^m m! (k-m)!}{(k+m)!} R^{-k-1} P_k^m(\mu), \quad w_{k4}^{(m)} = \frac{2^m m! (k-m)!}{(k+m)!} R^{-k-1} Q_k^m(\mu)$$

где $P_k^m(\mu)$, $Q_k^m(\mu)$ — присоединенные полиномы Лежандра первого и второго рода. Частные решения (3.2) удовлетворяют рекуррентным соотношениям, аналогичным приведенным в [5]. В зависимости от конкретного вида области G некоторые из частных решений (3.2) могут быть отброшены. Располагая оставшиеся функции $w_{ki}^{(m)}$ в определенной последовательности, образуем координатную систему $v_j(x, r)$ и представим приближенные решения в следующем виде:

$$\Psi_m = \sum_{j=1}^q a_j v_j(x, r), \quad \Phi_m = \sum_{j=1}^q b_j v_j(x, r), \quad F_m = \sum_{j=1}^q c_j v_j(x, r) \quad (3.3)$$

Приравняв нулю вариации функционалов (3.1) по параметрам a_j , b_j , c_j , получим следующие системы линейных уравнений:

$$Aa - \kappa_m Ba = 0, \quad Ab = \tau, \quad Ac = \gamma \quad (3.4)$$

Здесь A , B — симметричные матрицы q -го ранга, составленные из коэффициентов α_{ji} , β_{ji} , величины a , b , c , τ , γ — q -мерные векторы с компонентами a_j , b_j , c_j , τ_j , γ_j . При этом

$$\alpha_{jl} = \int_{L+L_0} v_j \frac{\partial v_l}{\partial v} r ds, \quad \beta_{jl} = \int_{L_0} v_j v_l r ds, \quad \tau_j = - \int_G v_j r dS$$

$$\gamma_j = \int_L v_j r (rv_x - xv_r) ds + (1 - m^2) \int_G xv_j dS \quad (3.5)$$

Определив значения постоянных a_j , b_j , c_j и подставив функции (3.3) в формулы (1.6), получим следующие выражения для присоединенных масс жидкости:

$$\lambda_{n, 5-i} = \frac{2\chi_i(\alpha)}{1 - m^2} a \cdot \varepsilon, \quad \mu_{ni} = \alpha \sigma_0 Aa \cdot a = \alpha \sigma_0 \kappa_{pm} Ba \cdot a$$

$$\lambda_{0ni} = (-1)^i \frac{2\chi_i(\alpha)}{1 - m^2} a \cdot \gamma = (-1)^i \frac{2\chi_i(\alpha)}{1 - m^2} Aa \cdot c$$

$$\lambda_{0ni} = 2a \cdot \tau = 2Aa \cdot b, \quad J_1 = \frac{4}{\alpha} \sum_m b \cdot \tau \quad (3.6)$$

$$J_i = 2a_i \sin \alpha J_0 + 4\chi_i^2(\alpha) \sum_m \frac{c \cdot \gamma}{(1 - m^2)^2 \alpha \sigma_0}$$

где ε является q -мерным вектором с компонентами

$$\varepsilon_j = \int_L v_j v_r r ds - (1 - m^2) \int_G v_j dS = \int_{L_0} \frac{\partial v_j}{\partial x} r ds$$

4. Метод разложения по собственным функциям краевых задач с параметром в граничном условии. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$F_1 = \Psi_1 + \frac{x_2 x_3}{\cos 2\alpha}, \quad F_2 = \Psi_2 + x_1 x_3, \quad F_3 = \Psi_3 - x_1 x_2 + r_c x_1 \quad (4.1)$$

Для гармонических функций $F_i(x_1, x_2, x_3)$ условия на перегородках S_3 и S_4 становятся однородными.

Наряду с краевой задачей на собственные значения (1.2), естественно возникшей в рассматриваемой гидродинамической проблеме, рассмотрим краевые задачи с параметром в граничных условиях следующего вида:

$$\Delta \Phi_{ni}^{\circ} = 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \Phi_{ni}^{\circ}}{\partial \nu} \Big|_{S_1} = \kappa_{ni}^{\circ} \Phi_{ni}^{\circ}, \quad \frac{\partial \Phi_{ni}^{\circ}}{\partial \nu} \Big|_{S_1^*} = 0 \quad (4.2)$$

$$\Delta \chi_{ni} = 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial \chi_{ni}}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = \mu_{ni} \chi_{ni}, \quad \frac{\partial \chi_{ni}}{\partial \nu} \Big|_{S_2^*} = 0$$

$$(S_1^* = S_2 + S_3 + S_4 + \Sigma, \quad S_2^* = S_1 + S_3 + S_4 + \Sigma)$$

Решения краевых задач (1.2), (4.2), согласно общей теории [5], образуют на поверхностях Σ , S_1 и S_2 полные системы собственных функций, так что всякая гармоническая в области Q функция может быть аппроксимирована в среднем.

После разложения $F_i(x_1, x_2, x_3)$ в обобщенные ряды Фурье по собственным функциям краевых задач (1.2), (4.2) придадим решениям Ψ_i следующий вид:

$$\Psi_1 = -\frac{x_2 x_3}{\cos 2\alpha} + \sum_m \sum_p [A_{pm} \Phi_{pm}^{\circ}(x_1, x_2, x_3) + A_{pm} \chi_{pm}(x_1, x_2, x_3)]$$

$$\Psi_i = -a_i x_1 + (-1)^i x_1 x_{5-i} + (-1)^i \sum_m \sum_p [B_{ipm} \Phi_{pm}^{\circ}(x_1, x_2, x_3) + C_{ipm} \chi_{pm}(x_1, x_2, x_3) + D_{ipm} \Phi_{pm}(x_1, x_2, x_3)] \quad (4.3)$$

$$m = \begin{cases} 1/2\pi(2s+1)/\alpha & \text{при } i=1, 2 \\ \pi s/\alpha & \text{при } i=3 \end{cases} \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

Представляя, аналогично (1.3), функции Φ_{pm}° и χ_{pm} в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{pm}^{\circ}(x_1, x_2, x_3) &= \psi_{pm}^{\circ}(x, r) \cos m(\eta + \alpha) \\ \chi_{pm}(x_1, x_2, x_3) &= u_{pm}(x, r) \cos m(\eta + \alpha) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и используя граничные условия для функций F_i , получим для коэффициентов разложений (4.3) выражения

$$\begin{aligned} A_{pm} &= -\frac{4L_{2pm}}{(m^2-4)\mu_{pm}N_{2pm}^2\alpha}, \quad A_{pm}^{\circ} = -\frac{4L_{1pm}}{(m^2-4)\kappa_{pm}N_{1pm}^2\alpha} \\ B_{ipm} &= \frac{2\chi_i(\alpha)M_{0pm}}{(1-m^2)\kappa_{pm}N_{0pm}^2\alpha\sigma_0}, \quad C_{ipm} = \frac{4\chi_i(\alpha)M_{2pm}}{(1-m^2)\mu_{pm}N_{2pm}^2\alpha\sigma_0} \\ D_{ipm} &= \frac{4\chi_i(\alpha)M_{1pm}}{(1-m^2)\kappa_{pm}N_{1pm}^2\alpha\sigma_0}, \quad L_{1pm} = \int_{L_1} r^2 \psi_{pm}^{\circ} \nu_r ds, \quad L_{2pm} = \int_{L_2} r^2 u_{pm} \nu_r ds \\ M_{0pm} &= \int_{L_0} r^2 \psi_{pm} ds, \quad M_{1pm} = \int_{L_1} r^2 \psi_{pm}^{\circ} \nu_x ds, \quad M_{2pm} = \int_{L_2} r^2 u_{pm} \nu_x ds \\ N_{0pm}^2 &= \int_{L_0} r \psi_{pm}^2 ds, \quad N_{1pm}^2 = \int_{L_1} r \psi_{pm}^{\circ} ds, \quad N_{2pm}^2 = \int_{L_2} r u_{pm}^2 ds \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для функций ψ_{pm}° и u_{pm} , исходя из (4.2) и (4.4), получим краевые задачи

$$\begin{aligned} \Delta' \psi_{pm}^{\circ} - \frac{m^2}{r^2} \psi_{pm}^{\circ} &= 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial \psi_{pm}^{\circ}}{\partial \nu} \Big|_{L_0+L_2} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{pm}^{\circ}}{\partial \nu} \Big|_{L_1} = \kappa_{pm}^{\circ} \psi_{pm}^{\circ} \\ \Delta' u_{pm} - \frac{m^2}{r^2} u_{pm} &= 0 \text{ в } G, \quad \frac{\partial u_{pm}}{\partial \nu} \Big|_{L_0+L_1} = 0, \quad \frac{\partial u_{pm}}{\partial \nu} \Big|_{L_2} = \mu_{pm} u_{pm} \end{aligned} \quad (4.7)$$

которые в зависимости от геометрии области G могут быть решены точно или приближенно. В случае области с кусочно-гладкой границей к ним применим изложенный выше вариационный метод. Соответствующие квадратичные функционалы в этом случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_G \left(\psi_{mx}^{\circ 2} + \psi_{mr}^{\circ 2} + \frac{m^2}{r^2} \psi_m^{\circ 2} \right) r dS - \kappa_m^{\circ} \int_{L_1} r \psi_m^{\circ 2} ds \\ V_2 &= \int_G \left(u_{mx}^2 + u_{mr}^2 + \frac{m^2}{r^2} u_m^2 \right) r dS - \mu_m^{\circ} \int_{L_2} r u_m^2 ds \end{aligned} \quad (4.8)$$

Представляя приближенные решения вариационных задач в виде

$$\psi_{pm}^{\circ} = \sum_{j=1}^q a_j^{\circ} v_j(x, r), \quad u_{pm} = \sum_{j=1}^q d_j v_j(x, r) \quad (4.9)$$

для определения компонентов векторов \mathbf{a}° и \mathbf{d} получим однородные уравнения

$$A\mathbf{a}^{\circ} - \kappa_m^{\circ} B^{\circ} \mathbf{a}^{\circ} = 0, \quad A\mathbf{d} - \mu_m^{\circ} D\mathbf{d} = 0 \quad (4.10)$$

причем элементы матриц A , B° и D определяются соответственно выражениями

$$\alpha_{jl} = \int_{L_0+L} v_j \frac{\partial v_l}{\partial v} r ds, \quad \beta_{jl}^{\circ} = \int_{L_1} v_j v_l r ds, \quad d_{jl} = \int_{L_2} v_j v_l r ds \quad (4.11)$$

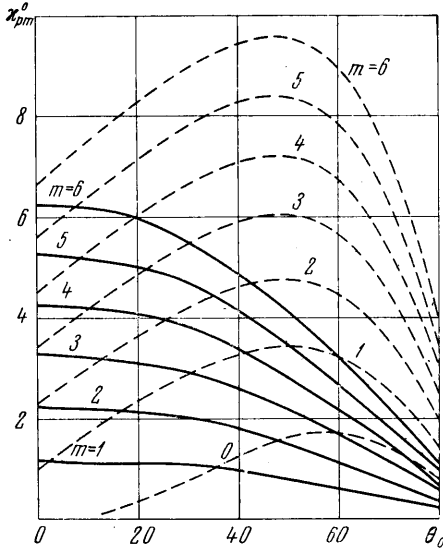
Приведем в заключение этого параграфа общие выражения коэффициентов уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned} \lambda_{n, 5-i} &= \frac{2\chi_i(\alpha)}{(1-m^2)} \kappa_{pm} M_{opm}, \quad \mu_{ni} = \alpha \sigma_0 \kappa_{pm} N_{opm}^2 \\ \lambda_{0n1} &= \alpha \kappa_{pm} \left[\sum_m \sum_k (A_{km}^{\circ} \gamma_{pkm}^{\circ} + A_{km} \gamma_{pkm}) - \frac{2K_{pm}}{(m^2-4)\alpha} \right] \\ \lambda_{0ni} &= (-1)^i \alpha \sigma_0 \kappa_{pm} \left[B_{ipm} M_{opm} + \sum_m \sum_k (D_{ikm} \gamma_{pkm}^{\circ} + C_{ikm} \gamma_{pkm}) \right] \\ J_1 &= Q \operatorname{tg} \alpha - 2 \sum_m \sum_p (A_{pm}^{\circ} \omega_{pm}^{\circ} + A_{pm} \omega_{pm}) \\ J_i &= \frac{2\chi_i(\alpha)}{1-m^2} \sum_m \sum_p (B_{ipm} \gamma_{pkm} + C_{ipm} \delta_{pkm} + D_{ipm} \gamma_{pkm}^{\circ}) + \\ &+ (-1)^i P \sin 2\alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2} (-1)^i \sin 2\alpha \right) R + 2a_i \sin \alpha J_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

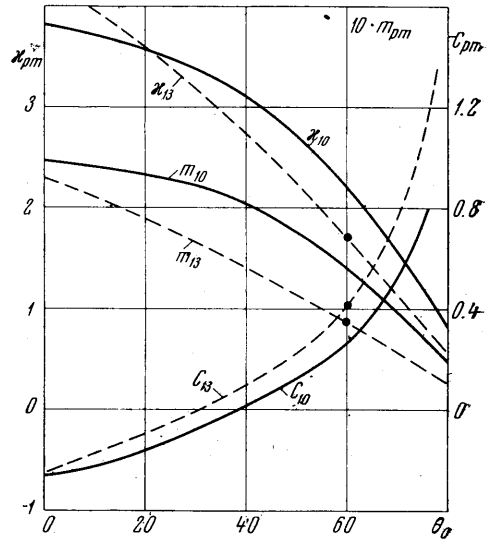
Введенные в формулах (4.12) обозначения имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} K_{pm} &= \int_{L_0} r^3 \psi_{pm} ds, \quad \gamma_{pkm} = \int_{L_2} r \psi_{pm} u_{km} ds, \quad \gamma_{pkm}^{\circ} = \int_{L_0} r \psi_{pm} \psi_{km}^{\circ} ds \\ \omega_{pm}^{\circ} &= \int_G r \psi_{pm}^{\circ 2} dS, \quad \omega_{pm} = \int_G r u_{pm}^2 dS, \quad Q = \int_G r^3 dS \\ J_0 &= \int_G r^2 dS, \quad P = \int_G x^2 r dS, \quad \gamma_{pm} = \int_{L_0} r^2 \psi_{pm} ds + 2 \int_L r^2 \psi_{pm} v_x ds \\ \gamma_{pm}^{\circ} &= \int_{L_0} r^2 \psi_{pm}^{\circ} ds + 2 \int_L r^2 \psi_{pm}^{\circ} v_x ds, \quad \delta_{pm} = \int_{L_0} r^2 u_{pm} ds + 2 \int_L r^2 u_{pm} v_x ds \\ R &= 3 \int_L x r^3 v_x ds + \int_{L_0} x r^3 ds - \int_L x^2 r^2 v_r ds \end{aligned}$$

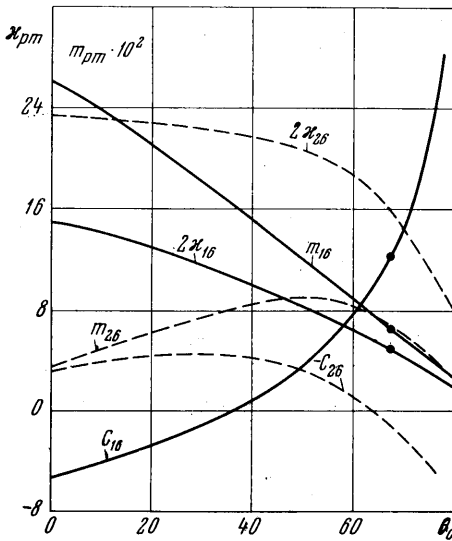
5. Результаты расчета присоединенных масс и частот свободных колебаний жидкости в случае конического сосуда. Для определения коэффициентов уравнения возмущенного движения сосуда, имеющего k отсеков, частично заполненных жидкостью, достаточно исследовать движение жидкости в одном из его отсеков. Рассмотрим движение тела с полостью, имеющей форму «перевернутого» конуса со



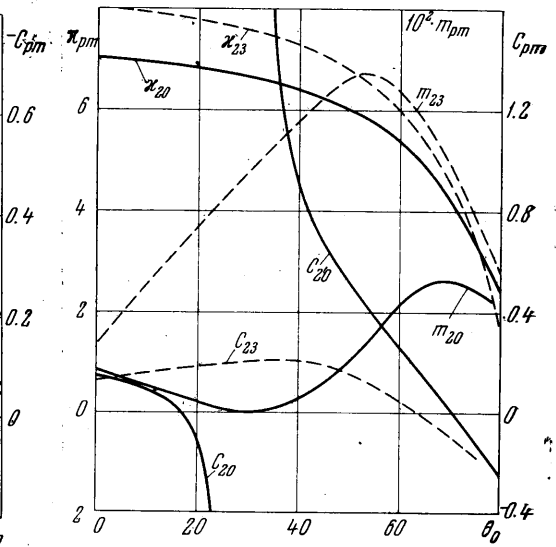
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

сплошными радиальными перегородками (фиг. 2). Численные результаты гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения получены методом, изложенным в предыдущем параграфе. Характерная точка O связана со свободной поверхностью жидкости, за характерный размер полости выбран радиус свободной поверхности $r_0 = 1$.

Подвижность жидкости в отсеке характеризуется двупараметрическим множеством (p, m) собственных частот и собственных форм колебаний. При проведе-

нии числовых расчетов для каждого m определялись две первые собственные функции и два собственных значения краевых задач (1.2), (4.2). Это оказалось достаточным для обеспечения удовлетворительной точности при определении присоединенных масс жидкости, которые рассчитаны для различного числа перегородок (от двух до двенадцати) и различных углов полураствора конуса θ_0 ($0^\circ - 75^\circ$).

На фиг. 2 показана зависимость частотного параметра κ_{pm} от числа m ($p = 1$ — сплошные кривые, $p = 2$ — пунктирные). На фиг. 3 показана зависимость собственных значений κ_{1m}^0 и κ_{2m}^0 краевой задачи (4.2) от угла полураствора конуса θ_0 при различных значениях параметра m ($p = 1$ — сплошные кривые, $p = 2$ — пунктирные).

	κ_{13}	κ_{23}	κ_{13}^0	κ_{23}^0
3	2.50604	33.68277	2.39107	6.07564
4	2.50528	10.02376	2.39104	6.05936
5	2.50497	7.60290	2.39100	6.01832
6	2.50493	7.27218	2.39098	5.99785
7	2.50493	7.16219	2.39098	5.99737
8	2.50493	7.11121	2.39098	5.99865
9	2.50493	7.09962	2.39098	5.99540
10	2.50493	7.09733	2.39098	5.99536

Сходимость собственных значений, определяемых вариационным методом, для конуса с углом полураствора $\theta_0 = 45^\circ$ при $m = 3$ иллюстрируется следующими числовыми данными для различного числа приближений j .

На фиг. 4—6 представлены графические зависимости гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения, точнее их инвариантных отношений κ_{pm} , m_{pm} и c_{pm} для некоторых вариантов задачи ($k = 6$). Точками отмечены точные значения соответствующих параметров (п.2).

Поступило 5 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л. В. Относительно устойчивости движения тела с идеальной жидкостью, заполняющей коническую полость. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 1, стр. 77—83.
2. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Косм. исслед., 1965, т. 3, вып. 2, стр. 179—207.
3. Levin E. Oscillations of a Fluid in Rectilinear Conical Container. AIAA Jour. 1963, vol. 1, № 6, pp. 1447—1448.
4. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Сочинения, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях. Укр. матем. ж., 1965, № 6.

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕПАДА ТЕМПЕРАТУР В ЗАЗОРЕ НА НЕСУЩЮЮ СПОСОБНОСТЬ РАДИАЛЬНОГО ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

И. И. ШИДЛОВСКАЯ

(Москва)

Рассмотрим радиальный газовый подшипник, схематическое изображение которого в двух проекциях показано на фиг. 1. Введем безразмерные обозначения, при которых размеры по направлениям осей x и z отнесены к радиусу r_1 , толщина смазочного слоя — в средней толщине δ_0 , давление — к давлению p_0 при $x = 0$, $b \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что температуры поверхностей шипа T_1 и подшипника T_2 в общем случае различны и отношение $\chi = T_2/T_1$, оставаясь в каждом конкретном случае постоянным, может принимать произвольные значения. Вводя обозначения: σ — число Прандтля, κ — отношение теплоемкостей и M — характерное число Маха, учтем, что в работах [1, 2] выведено уравнение для определения давлений в трехмерном смазочном слое при любом значении χ и при условии

$$\sigma(\kappa - 1)M^2 \ll 1 \quad (1)$$