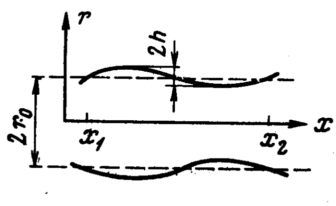
О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБКЕ С ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

С. А. РЕГИРЕР

(Москва)

Задача о течении несжимаемой жидкости в трубке с ритмически деформирующимися стенками, представляющая интерес в связи с исследованием некоторых физиологических процессов, была недавно рассмотрена в работе [1] на основе уравнений гидродинамики в стоксовом приближении. Статья содержит решение более общей задачи, полученное значительно более простым методом. При вполне удовлетворительном совпадении количественных данных с результатами [1] этот метод дает простые и удобные расчетные формулы, и, по-видимому, допускает ряд полезных обобщений и усовершенствований.



Фиг. 1

1. Будем рассматривать такое течение жидкости в деформируемой трубке, которое частично или полностью вызывается происходящими определенным образом деформациями стенки (проталкивание жидкости за счет ритмического сокращения стенок). В общем случае на течение оказывает влияние и зависящий от времени перепад давлений на концах трубки. Полная формулировка схематизированной задачи о перистальтическом движении сводится к следующему.

Несжимаемая вязкая жидкость движется в трубке (фиг. 1), стенка которой есть поверхность вращения, заданная уравнением $r = r_w(x, t)$. Между входным и выходным сечениями трубки поддерживается разность давлений, которую можно задать в виде $P(t) = p(x_1, 0, t) - p(x_2, 0, t)$. Течение осесимметрично и описывается уравнениями

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0 \tag{1.3}$$

где u, v — осевая и радиальная компоненты скорости, которые на стенке принимают значения

$$u=0,\quad v=\frac{\partial r_w}{\partial t}\quad \text{при } r=r_w \tag{1.4}$$

Вообще говоря, необходимо сформулировать еще начальные условия и условия в сечениях $x = x_1$, $x = x_2$, однако этот вопрос здесь не обсуждается, так как система (1.1)—(1.3) будет упрощена далее таким образом, что условий (1.4) и заданной разности давлений окажется достаточно для получения однозначного решения.

Пусть r_0 есть средний радиус трубки; λ — характерная длина, на которой изменяется радиус r_w; v_* и u_* — характерные значения радиальной и осевой скоростей, t_* — характерное время изменения скорости. Оценивая члены уравнений (1.1)—(1.3), последнее из которых показывает, что $|\partial u / \partial x| \sim v_* / r_0$, $|\partial^2 u / \partial x^2| \sim v_* / r_0\lambda$, можно установить, что при одновременном выполнении неравенств

$$\frac{\rho v_* r_0}{\mu}\ll 1,\qquad \frac{\rho r_0^2}{t_*\mu}\ll 1,\qquad \frac{v_* r_0}{u\ \lambda}\ll 1 \tag{1.5}$$

в уравнении (1.1) можно пренебречь инерционными членами, членом $\mu\partial^2 u / \partial x^2$ и считать давление p функцией только x, t. Система (1.1) — (1.3) приобретает тогда вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\quad \frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0 \tag{1.6}$$

Разумеется, что величины v_* или u_* могут не входить в число заранее известных (например, при пассивной деформации стенок, когда $r_w = r_w(p)$ или при $P(t) = 0$). Поэтому неравенства (1.5) носят, до некоторой степени, характер гипотез и подлежат, вообще говоря, проверке после построения решения. Это отличает оценки (1.5) от оценок гидродинамической теории смазки, приводящих к тем же уравнениям (1.6).

Заметим, что отказ от третьего из предположений (1.5) требует заменить уравнения (1.6) уравнениями в квазистационарном стоксовом приближении, а отказ еще и от второго предположения — добавляет в уравнения Стокса член $\rho\partial\mathbf{v}/\partial t$.

2. Уравнения (1.6), граничные условия (1.4) и условие

$$p(x_1, t) - p(x_2, t) = P(t) \tag{2.1}$$

определяют обе компоненты скорости и давление в трубке. Процедура решения этой задачи хорошо известна (благодаря упомянутому совпадению уравнений (1.6) с уравнениями теории смазки). После несложных выкладок из уравнения импульсов получается связь между u и p

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(r^2 - r_w^2) \tag{2.2}$$

а затем из уравнения неразрывности — уравнение для распределения давления

$$\frac{1}{16\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(r_w^4\frac{\partial p}{\partial x}\right) = r_w\frac{\partial r_w}{\partial t} \tag{2.3}$$

При заданной зависимости $r_w(x, t)$ это уравнение легко интегрируется и дает в итоге с учетом (2.1)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{16\mu}{r_w^4}\left\{F_w - \frac{\langle F_w r_w^{-4}\rangle}{\langle r_w^{-4}\rangle}\right\} - \frac{P(t)}{(x_2 - x_1) r_w^4 \langle r_w^{-4}\rangle} \tag{2.4}$$

$$\langle f\rangle = \frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} f\,dx, \qquad F_w = \int\limits_{x_1}^{x} r_w\frac{\partial r_w}{\partial t}\,dx$$

Затем можно вычислить расход жидкости через выходное сечение $x = x_2$ за время T

$$G = 2\pi\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^{r_w} ru\,dr\,dt\right)_{x=x_2} = G_1 + G_2 + G_3 \tag{2.5}$$

$$G_1 = -2\pi\int\limits_0^T F_w(x_2)\,dt. \qquad G_2 = 2\pi\int\limits_0^T \frac{\langle F_w r_w^{-4}\rangle}{\langle r_w^{-4}\rangle}\,dt, \quad G_3 = \frac{\pi}{8(x_2 - x_1)\mu}\int\limits_0^T \frac{P(t)\,dt}{\langle r_w^{-4}\rangle}$$

Последний член в формуле (2.5) есть обычное выражение связи между перепадом давления и расходом при квазипуазейлевском течении в трубке с гидравлическим радиусом $\langle r_w^{-4}\rangle^{-1/4}$.

Остальные слагаемые в (2.5) отражают вклад в расход от деформации стенок трубки. В приближении, не учитывающем инерционные силы, как и следовало ожидать [1], этот вклад не зависит от коэффициента вязкости. При этом величина G_1 действительно не зависит от вязких свойств жидкости, ибо она равна в точности изменению объема трубки между сечениями x_1 и x_2 за время T.

Второе же слагаемое G_2 обязано своим происхождением именно вязким членам в уравнении импульсов и играет весьма важную роль, так как оно иногда обеспечивает отличный от нуля расход при $G_1 = 0$.

Пусть, например, деформация стенки имеет характер бегущей волны, т. е.

$$r_w = r_w(\zeta), \qquad \zeta = 2\pi(x - Ut)/\lambda$$

где U и λ — скорость и длина волны. Тогда

$$\frac{\partial r_w}{\partial t} = -U\frac{\partial r_w}{\partial x}, \qquad G_1 + G_2 = \pi U\int\limits_0^T\left(r_w^2(x_2, t) - \frac{\langle r_w^{-2}\rangle}{\langle r_w^{-4}\rangle}\right)dt \tag{2.6}$$

$$\zeta_i = \frac{2\pi}{\lambda}(x_i - Ut), \qquad \langle f\rangle = \frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} f\,dx = \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1}\int\limits_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta)\,d\zeta$$

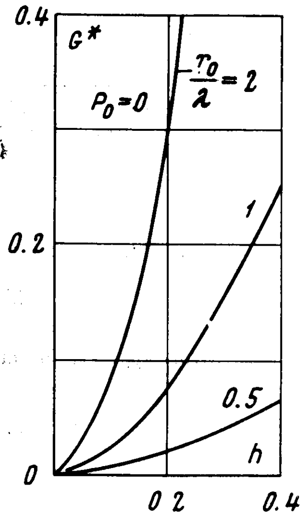
---

[1] При отсутствии инерционных сил и перепада давлений и при заданных скоростях на границе области решение можно получить из уравнения для вихря, не содержащего коэффициента вязкости.

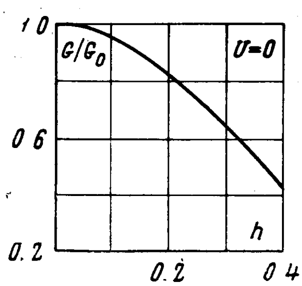
Если при $\zeta = \zeta^*$ радиус трубки обращается в нуль, а величина $r_w'(\zeta^*)$ при этом конечна, то интегралы $\langle r_w^{-2}\rangle$, $\langle r_w^{-4}\rangle$ расходятся, а их отношение бесконечно мало. Поэтому в случае полного пережатия трубки

$$G_1 + G_2 = \pi U \int_0^T r_w^2(\zeta_2)\,dt \qquad (2.7)$$

Эта формула имеет точный физический смысл — она выражает объем жидкости, вытесняемый пережатием при его движении со скоростью U от сечения $x_- = \lambda\zeta^*/2\pi$ до сечения $x_+ = \lambda\zeta^*/2\pi + UT$ (в предположении, что $x_1 \leqslant x_- \leqslant x_+ \leqslant x_2$). При неограниченном росте $r_w'(\zeta)$ в точке $\zeta = \zeta^*$ не будет справедливой формула (2.6), так как неравенства (1.5) не будут выполнены.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Рассмотрим в качестве примера частный случай течения в трубке, деформация которой определена, как и в [1], периодическим законом

$$r_w = r_0(1 + h\cos\zeta) \qquad (0 < h < 1)$$

и положим $x_2 - x_1 = n\lambda$, где n — целое число.

В качестве T примем период пульсаций стенки, т. е. $T = \lambda / U$. После несложных вычислений найдем

$$\langle r_w^{-2}\rangle = \frac{1}{r_0^2(1-h^2)^{3/2}}, \qquad \langle r_w^{-4}\rangle = \frac{2+3h^2}{2r_0^4(1-h^2)^{7/2}} \qquad (3.1)$$

Благодаря тому, что длина $x_2 - x_1$ кратна длине волны λ, эти величины не зависят от времени. После подстановки (3.1) в (2.6) и в формулу для G_3 получим

$$G = \pi UT\frac{r_0^2h^2(16-h^2)}{2(2+3h^2)} + \frac{\pi r_0^4(1-h^2)^{7/2}P_0T}{4\mu(x_2-x_1)(2+3h^2)} \qquad (3.2)$$

где P_0 — среднее за период значение $P(t)$.

На фиг. 2 и 3 представлены зависимости

$$G^* = \frac{G}{2\pi UT\lambda^2} = f_1\left(h, \frac{r_0}{\lambda}\right) \qquad (P_0 = 0),$$

$$\frac{G}{G_0} = f_2(h) \qquad (U = 0,\ G_0 = \lim_{h\to 0} G)$$

Графики функций $f_1(h, r_0/\lambda)$ практически совпадают с кривыми, построенными в [1] на основе значительно более громоздкого решения. Зависимость $f_2(h)$ совпадает с расчетами [1], если положить в последних $r_0/\lambda \leqslant 1$; в этом случае G/G_0 практически не зависит от r_0/λ. Различие в результатах при $r_0/\lambda > 1$ связано с нарушением третьего неравенства (1.5).

Формула (3.2) и вид кривых на фиг. 2, 3 свидетельствуют о том, что при определенных условиях существует оптимальная амплитуда деформаций h, обеспечивающая максимальный расход для заданных U и среднего перепада давления P_0.

Аналогичная теория может быть развита для течений, в которых деформации стенки не являются чисто активными. В этом случае $r_w = r_w(x, t, p)$ и уравнение (2.3) превращается в нелинейное параболическое уравнение, для которого известен ряд полезных аналогий.

Благодаря любезности Г. Г. Черного и П. Ликудиса автору удалось ознакомиться с работой [2], в которой рассмотрена близкая по содержанию и постановке задача о движении в щели. Однако метод решения использует предположение о том, что стенка деформируется по закону бегущей волны. Это ограничивает общность результатов.

НИИ механики МГУ

Поступило 11 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Burns J. C., Parkes T. Peristaltic motion. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, No. 4, pp. 731—743.
2. Shapiro A. H. Pumping and retrograde diffusion in peristaltic waves. Proc. Workshop on Uretral Reflux in Children. Washington, 1967, p. 109—133.