

Причем в (9) надо брать отрицательное значение  $z_1$ . Если же оба значения отрицательны, берется то, которое ближе к  $R \cos \beta$ .

Теперь, зная направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  и вектора  $\mathbf{v}$ , получим

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{S+1}(z_0+1)} \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta + Q(z_0+1)}{z_0 \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg} \beta + 1 \right] \quad (12)$$

$$\left( z_0 = \frac{z_1}{R \cos \beta} \right)$$

Для области I величина  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})$  считается по этой же формуле (12), лишь в (11) надо  $\beta$  заменить на  $\xi$ .

Поступило 6 IX 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Пятаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. М., «Наука», 1964.
2. Bird K. A. The Free — Molecule Flow Field of a Moving Body in the Upper Atmosphere. Rarefied Gas Dynamics. Proc. 2-d Intern. Symp. on raref. gas dynam Calif 1960. N.— Y., Acad. Press, 1961.
3. Баранцев Р. Г. Об ударных трансформантах кинетического уравнения аэродинамики разреженных газов. В сб. «Аэродинамика разреженных газов». Сб. I, Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1963.

### СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ ФИЛЬТРОВ В СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

Ю. М. ГЛУШКОВ (Обнинск)

Известно выражение для сопротивления свободно-молекулярному потоку изотропной пористой среды, полученное Б. В. Дерягиным [1] и С. П. Бакановым [2].

В предлагаемой работе рассмотрено течение газа через анизотропную пористую среду, образованную частично упорядоченными волокнами. В такой среде средний свободный пробег и средний косинус рассеяния зависят от направления скорости молекулы.

В качестве модели волокнистых фильтров принята бесконечная система беспорядочно переплетенных волокон, оси которых перпендикулярны массовой скорости газа. Рассмотрены волокна, имеющие в поперечном сечении круглую, произвольную выпуклую и гантелевидную фигуры.

Результаты расчета сравниваются с данными эксперимента, полученными для фильтров типа ФП и фильтров из стекловолокна.

#### I. СОПРОТИВЛЕНИЕ ФИЛЬТРОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ КРУГЛЫХ ВОЛОКОН

1. **Постановка задачи.** Задача сводится к нахождению функции распределения скоростей газовых молекул  $f$  в анизотропной среде фильтра и к последующему определению расхода газа через этот фильтр. По аналогии с [2] принимаем, что молекулы отражаются от стенки диффузно с сохранением скорости.

Кинетическое уравнение Больцмана для стационарного течения при отсутствии внешних сил имеет вид:

$$v\Omega \nabla f(v\Omega) = \frac{f(v\Omega)v}{\lambda(\Omega)} - \int \frac{f(v'\Omega')v'}{\lambda(\Omega')} w(v'\Omega'; v\Omega) dv' d\Omega' \quad (1)$$

Здесь  $v$  — скорость молекулы,  $\Omega$  — единичный вектор скорости,  $\lambda(\Omega)$  — свободный пробег молекулы,  $w(v'\Omega'; v\Omega)$  — плотность вероятности изменения скорости  $v'\Omega'$  на  $v\Omega$  при столкновении молекулы со стенкой.

Так как при обычной температуре средняя тепловая скорость молекул воздуха намного больше практически достижимой скорости движения газа через фильтр и, кроме того, задача имеет плоскую симметрию, то можно искать  $f$  в виде

$$f = f^{(0)} \left( 1 - \lambda(\theta) \psi \cos \theta \frac{|\operatorname{grad} n|}{n} \right) \quad (2)$$

Здесь второй член в скобках мал по сравнению с единицей. В этом выражении  $f^{(0)}$  — равновесное решение уравнения Больцмана для неподвижного разреженного газа в анизотропной пористой среде (функция Максвелла),  $n$  — концентрация молекул газа,  $\theta$  — угол между полярной осью, направленной в сторону —  $\operatorname{grad} n$  и век-

тором  $\Omega$ ,  $\psi$  — неизвестная функция. Подставляя (2) в (1), получаем уравнение:

$$-\cos \theta = -L(\theta) + \int L(\theta') w(\theta'; \theta) d\theta' \quad (3)$$

где  $L(\theta) = \psi \cos \theta$ .

Для нахождения  $\theta$  используется метод последовательных приближений [3].  
Решение ищем в виде ряда

$$L(\theta) = L_0(\theta) + L_1(\theta) + \dots + L_n(\theta) \quad (4)$$

Здесь  $L_0(\theta) = \cos \theta$  и  $L_n(\theta) = \int L_{n-1}(\theta') w(\theta'; \theta) d\theta'$ . Для конкретных вычислений нужно знать функции  $\lambda(\theta)$  и  $w(\theta'; \theta)$ .

**2. Определение вида функции  $\lambda(\theta)$ .** В рассматриваемой модели фильтра оси волокон параллельны плоскости поверхности материала. Вероятность встретить ось какого-либо волокна в элементе угла  $d\varphi$ , находящегося в этой плоскости, пропорциональна  $d\varphi$ . При такой структуре пористой среды линия пробега, например параллельная поверхности материала, параллельна и некоторой части волокон и, следовательно, не будет иметь с ними пересечений. В направлении  $\theta$  в среднем видна поверхность миделева сечения цилиндра единичной длины, равная (11)

$$4\pi^{-1} a E(\sin \theta)$$

Здесь  $a$  — радиус цилиндра,  $E(\sin \theta)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Торцевые поверхности не учитываются, так как волокна представляются бесконечно длинными.

Выделим в среде фильтра трубку с основанием  $4\pi^{-1} a E(\sin \theta)$  и длиной единица, ось которой параллельна линии пробега направления  $\theta$ . В этой трубке содержится

$$\frac{4}{\pi} a E(\sin \theta) a \frac{1}{\pi a^2}$$

отрезков цилиндров единичной длины. Здесь  $\alpha$  — плотность упаковки. Каждый из этих цилиндров пересечет линию пробега один раз. Отсюда находим, что среднее расстояние отрезка линии пробега в направлении  $\theta$  между двумя пересечениями равно

$$\lambda(\theta) = \lambda^* \frac{\pi}{2E(\sin \theta)} \quad (5)$$

где

$$\lambda^* = \frac{\pi a}{2} \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

**3. Определение вида функции  $w$ .** Функция плотности вероятности изменения направления скорости  $\Omega'$  на  $\Omega$  при столкновении имеет следующий вид:

$$w(\Omega'; \Omega) = \int_{\omega} p T d\omega \quad (6)$$

Здесь  $p$  — плотность вероятности встречи молекулы, имеющей направление скорости  $\Omega'$  с элементом поверхности  $ds$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , ориентированной в телесном угле  $d\omega$ ;  $T$  — плотность вероятности распределения молекул по направлениям после отражения от площади  $ds$ . При диффузном отражении

$$T = (\mathbf{n}\Omega) / \pi, \quad (\mathbf{n}\Omega) \geq 0 \quad (7)$$

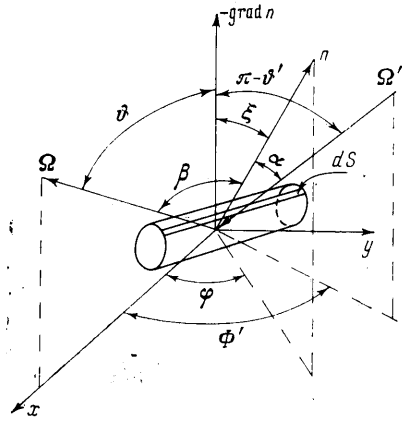
Вероятность  $p d\omega$  равна произведению вероятности встречи молекулы, имеющей направление скорости  $\Omega'$ , с цилиндром, ось которого ориентирована в  $d\varphi$  около  $\varphi$ , на вероятность того, что  $\mathbf{n}$  находится в  $d\xi$  около  $\xi$  (фиг. 1):

$$p d\omega = (-\Omega' \mathbf{n}) ds \frac{d\varphi}{\pi} \bigg/ \int (-\Omega' \mathbf{n}) ds \frac{d\varphi}{\pi}$$

$$(-\Omega' \mathbf{n}) \geq 0, \quad \varphi \in [-1/2\pi; \pi/2], \quad ds = a l d\xi$$

где  $l$  — длина цилиндра. При  $a$  и  $l$ , равных единице,

$$P = (-\Omega' \mathbf{n}) / \pi \sin \xi S_{\perp}(\Omega')$$



Фиг. 1

Здесь

$$S_{\perp}(\Omega') = \frac{1}{\pi} \int \frac{(-\Omega' \cdot \mathbf{n})}{\sin \xi} d\omega \quad (8)$$

представляет собой площадь миделева сечения цилиндра единичного радиуса и длины, видимого в направлении  $-\Omega'$ . Комбинируя (6), (7) и (8), для  $w$  получим:

$$w(\Omega'; \Omega) = \frac{1}{\pi^2 S_{\perp}(\Omega')} \int \frac{(-\Omega' \cdot \mathbf{n})(\Omega \cdot \mathbf{n})}{\sin \xi} d\omega \quad (9)$$

В нашем конкретном случае с плоской симметрией выражения  $(-\Omega' \cdot \mathbf{n})$  и  $(\Omega \cdot \mathbf{n})$  имеют одинаковую структуру. Поэтому мы получаем следующее равенство:

$$w(\Omega'; \Omega) = \frac{S_{\perp}(\Omega)}{S_{\perp}(\Omega')} w(\Omega; \Omega') \quad (10)$$

Из (10), в частности, следует, что в случае изотропной пористой среды функция  $w$  симметрична:  $w(\Omega'; \Omega) = w(\Omega; \Omega')$ .

4. Вычисление  $S_{\perp}(\theta')$ . Согласно (8),

$$S_{\perp}(\theta') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi \int_{-\theta'}^{\pi-\theta'} \cos \alpha d\xi$$

Здесь  $\alpha = \langle -\Omega', \mathbf{n} \rangle$ . Угол  $\theta$  определяет положение границы видимой части цилиндра для лучей направления  $\theta'$ :

$$\cos \theta' = \frac{\sin \theta' \cos \varphi}{(1 - \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

Окончательный результат:

$$S_{\perp}(\theta') = \frac{4}{\pi} E(\sin \theta') \quad (11)$$

5. Вычисление  $L_n$ . Согласно (4), (9) и (11),  $L_1$  вычисляется по формуле

$$L_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} d\omega \int_{\Omega'} \frac{\cos \theta' \cos \alpha \cos \beta}{\sin \xi E(\sin \theta')} d\Omega' = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} d\omega \int_{\Omega'} F d\Omega'$$

Для интеграла по  $d\Omega'$  имеем следующие выражения:

$$\int_{\Omega'} F d\Omega' = \begin{cases} \psi_1 & (0 \leq \xi \leq 1/2\pi) \\ \psi_2 & (1/2\pi \leq \xi \leq \pi) \end{cases}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi' \int_{\theta_0'}^{\pi} F \sin \theta' d\theta', \quad \theta_0' = \arccos \mu$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\Phi' \int_0^{\theta_0'} F \sin \theta' d\theta', \quad \theta_0' = \arccos -\mu$$

$$\mu = \frac{\sin \xi \cos \Phi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi \sin^2 \Phi'}}$$

При интегрировании функцию  $E(\sin \theta')$  заменяем приближенным выражением

$$E(\sin \theta') \approx \frac{\pi}{\pi - (\pi - 2) |\cos \theta'|}$$

которое дает ошибку 0.36% для угла  $45^\circ$  и максимальную ошибку 2.6% для значений угла около  $78^\circ$ . Сопоставляя значения двух интегралов

$$\int_2^{\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{E(\sin \theta)} d\theta = 0.4851 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \{ \pi - (\pi - 2) |\cos \theta| \} d\theta = 0.48497$$

можем предположить, что ошибка в определении  $\psi_{1,2}$  не превышает 0.1%.

Учитывая, что

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{\cos \beta \cos \xi}{\sin \xi} \left( \frac{\pi - 2}{8\pi} - \frac{1}{6} \right)$$

получаем для  $L_1$  выражение

$$L_1 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi \int_{-\theta}^{\pi-\theta} \psi \sin \xi \, d\xi$$

Окончательный результат:

$$L_1 = -0.598 \cos \theta \text{ и } L_n = (-0.598)^n \cos \theta \quad (12)$$

6. Функция  $f$ . Вид выражения (12) позволяет записать (4) следующим образом:

$$L = \cos \theta - 0.598 L$$

и, следовательно,

$$L = 0.626 \cos \theta \quad (13)$$

Таким образом, функция  $f$  в соответствии с (2), (5) и (13) имеет следующий вид:

$$f = f^{(0)} \left( 1 - 0.626 \lambda^* \frac{\pi}{2E(\sin \theta)} \cos \theta \frac{\text{grad } n}{n} \right) \quad (14)$$

7. Сопротивление фильтра, состоящего из круглых волокон. Расход газа через единицу поперечного сечения фильтра с учетом (14) равен

$$Q = (1 - \alpha) \int f v \Omega \, dv \, d\Omega = -0.238 \lambda^* (1 - \alpha) \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \text{grad } n \quad (15)$$

Преобразуя (15), получаем искомое выражение для сопротивления фильтров:

$$\Delta p = 4.19 \frac{1}{\lambda^* (1 - \alpha)} \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{-1/2} H p u \quad (16)$$

В формулах (15) и (16)  $\Delta p$  — сопротивление фильтра,  $m$  — масса молекулы газа,  $k$  — константа Больцмана,  $T$  — температура °К,  $H$  — толщина фильтра,  $p$  — давление газа,  $u$  — скорость течения газа через фильтр.

## II. СОПРОТИВЛЕНИЕ ФИЛЬТРОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ НЕКРУГЛЫХ ВОЛОКОН

Полученные в предыдущем разделе выражения нельзя применять для расчета некоторых типов реальных фильтров. Наблюдения под микроскопом показывают, что волокна фильтров типа ФП, например имеют гантелевидную фигуру в поперечном сечении. Кроме того, некоторое выделенное направление  $\tau$  на этой фигуре у разных волокон в фильтре имеет беспорядочную ориентацию (фиг. 2).

В качестве второго приближения к реальным фильтрам рассчитаем систему волокон, имеющих в сечении произвольную выпуклую фигуру. Решение такой задачи может быть сведено к решению задачи о течении разреженного газа через систему круглых цилиндров с той лишь разницей, что в кинетическом уравнении Больцмана используется другая функция для среднего свободного пробега молекул.

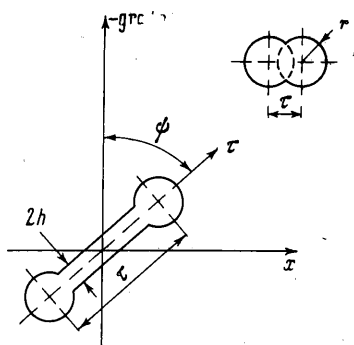
1. Сопротивление некруглого выпуклого волокна, расположенного перпендикулярно к направлению потока и с фиксированным направлением  $\tau$ , равно:

$$R = \int_s r(\mathbf{u}, \tau) \, ds \quad (17)$$

Здесь  $r$  — сопротивление элементарной площадки  $ds$ ,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости потока.

Предположим теперь, что волокно скручено, и вероятность обнаружить  $\tau$  в элементе плоского угла  $d\psi$  пропорциональна  $d\psi$  (фиг. 2). Тогда среднее сопротивление такого волокна равно

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\psi} \int_s r \, ds \, d\psi = \int_s ds \frac{1}{2\pi} \int_{\psi} r \, d\psi \quad (18)$$



Фиг. 2

Последний интеграл по  $d\varphi$  представляет собой сопротивление цилиндра на единицу его поверхности. Следовательно, среднее сопротивление рассматриваемого выпуклого волокна равно сопротивлению круглого цилиндра с такой же поверхностью. Это рассуждение справедливо только для волокон с выпуклой фигурой поперечного сечения, обтекаемых свободно молекулярным потоком.

2. Свободный пробег молекул в фильтре, состоящем из некруглых волокон. Как нетрудно убедиться, выражение для свободного пробега молекул в волокнистом фильтре, составленном из некруглых волокон, в общем виде имеет вид

$$\lambda(\vartheta) = \frac{S_n}{\bar{d}(\vartheta)} \frac{1-\alpha}{\alpha} \varphi(\vartheta) \quad (19)$$

Здесь  $S_n$  — площадь поперечного сечения волокна,  $\bar{d}(\vartheta)$  — средняя толщина волокон, находящихся в фильтре и рассматриваемых в направлении  $\vartheta$ ,  $\varphi(\vartheta)$  — функция, зависящая от фигуры поперечного сечения волокон и от плотности распределения  $\tau$ . В том случае, когда  $\tau$  распределено беспорядочно, как, например, в фильтрах ФП, свободный пробег определяется выражением

$$\lambda(\vartheta) = \frac{S_n}{\bar{d}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{\pi}{2E(\sin \vartheta)} \quad (20)$$

Эту формулу можно приближенно использовать и для фильтров, составленных из волокон с вогнутой фигурой поперечного сечения. При этом из рассмотрения выпадают вторичные столкновения некоторых отраженных молекул с тем же самым волокном.

3. Сопротивление фильтра, состоящего из волокон с произвольной фигурой поперечного сечения. Принимая во внимание результаты п. 1 и 2, можно заключить, что кинетическое уравнение, описывающее свободно-молекулярное течение газа через фильтр из некруглых выпуклых волокон с произвольной ориентацией  $\tau$ , отличается от соответствующего уравнения для фильтра из круглых волокон только разными функциями для свободного пробега. Для таких фильтров получаем искомое выражение, заменяя в формуле для сопротивления фильтров из круглых волокон член  $\pi a/2$  на  $S_n/\bar{d}$ :

$$\Delta p = 4.19 \frac{\bar{d}}{S_n} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \left( \frac{8kT}{\pi m} \right)^{-1/2} N p u \quad (21)$$

Полученное выражение можно приближенно использовать также для расчета фильтров из гантелевидных волокон, если учесть, что при диффузном отражении изменение сопротивления в большей степени зависит от изменения свободного пробега по сравнению с изменением условий рассеяния молекул вследствие частичного экранирования вогнутой поверхностью.

Сравнивая полученную формулу с известным выражением Б. В. Дерягина для изотропных порошков, можно заключить, что при одинаковой удельной поверхности фильтры из круглых волокон должны оказывать на 20% большее сопротивление кнудсеновскому потоку, чем порошки. Для фильтров из некруглых волокон это расхождение должно увеличиваться с ростом отношения среднего кажущегося диаметра к площади фигуры поперечного сечения волокна.

### III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. Методика эксперимента. В свободно-молекулярном потоке измерялось сопротивление стекловолокнистых фильтров из круглых волокон и фильтров ФП из полимерных гантелевидных волокон, имеющих разную степень вытянутости гантелевидной фигуры.

Средний кажущийся диаметр полимерных волокон  $\bar{d}$  рассчитывался из результатов 150—200 измерений «диаметров» отдельных волокон под микроскопом. Предполагалось, что распределение  $\tau$  волокон на микроскопном столике соответствует распределению  $\tau$  волокон в фильтре. Средний диаметр стеклянных волокон определялся аналогично.

Степень вытянутости гантелевидной фигуры  $\chi$  вычислялась по формуле

$$\chi = \frac{1}{n} \sum_n \frac{a_i - b_i}{b_i} \quad (22)$$

Здесь ширина  $a_i$  и толщина  $b_i$   $i$ -го волокна определялись также под микроскопом. При этом использовался тот факт, что некоторые волокна на микроскопном сто-

лике закручены вокруг своей оси. Количество таких измерений не превышало 40 для каждого фильтра. Толщина фильтров измерялась с помощью катетометра по границе легких покровных стекол, между которыми вкладывалось фильтрующее полотно. Плотность упаковки вычислялась как отношение веса квадратного сантиметра фильтрующего полотна к толщине фильтра, умноженной на плотность материала фильтра.

Расход газа контролировался реометром при нормальном давлении. Перепад давления на фильтрах и абсолютное давление измерялись микроманометром, чувствительность которого  $2 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст. По опытным данным вычислялся коэффициент

$$K_0 = \frac{\Delta p}{\rho u} [\text{сек/см}]$$

2. Результаты опытов и сравнение их с расчетом. Точных данных о фигуре поперечного сечения гантелевидных волокон пока нет. Поэтому мы при сопоставлении результатов опытов с расчетом полагаем, что такое волокно состоит из двух параллельных круглых цилиндров с диаметром  $2r$ , соединенных перешейком толщиной  $2h$ . В соответствии с такой моделью степень вытянутости определяется формулой

$$\chi = \frac{\tau}{2r} \quad (23)$$

Величины  $\bar{d}$  и  $S_n$  определяются соответственно формулами:

$$\bar{d} = \frac{4r}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \chi \right) \quad (24)$$

$$S_n = 2\pi r^2 - 2 \left( \frac{r^2 \arccos \chi}{360} - r^2 \chi + r^2 \chi^3 \right), \quad 0 \leq \chi \leq \chi_0, \quad \chi_0 = \left( 1 - \frac{h}{r} \right)^{1/2} \quad (25)$$

$$S_n = 2\pi r^2 - 2 \left( \frac{\pi r^2 \arccos \chi_0}{360} - r^2 \chi + r^2 \chi^3 \right) + (\chi - \chi_0) 4r h, \quad \chi > \chi_0$$

Так как у нас нет данных по прямому измерению толщины перешейка полимерного волокна, то сопоставление результатов опытов с расчетом для полимерных фильтров носит условный характер. Мы можем лишь отметить, попадает или нет вычисленное значение  $2h$  в область допустимых значений  $0 \leq 2h \leq 2r$ . Величина  $2h$  рассчитывается по формулам (24), (24) и (25), в которых используются значения  $\Delta p$ ,  $\bar{d}$  и  $\chi$ , найденные прямым измерением в эксперименте. Для стекловолоконистых филь-

Фильтр	Газ	$\bar{d} \cdot 10^4$ см	$\chi$	$H \cdot 10$ см	$\alpha \cdot 10^2$	$K_0 \cdot 10^2$	$K_p \cdot 10^3$	$\frac{h}{r}$
Стекловолоконно	Азот	3.14	0	3.09	1.88	2.26	2.18	—
Стекловолоконно	Азот	3.14	0	3.02	0.893	1.07	0.99	—
Стекловолоконно	Азот	3.14	0	3.42	0.745	1.04	0.965	—
ФП	Воздух	4.22	1.7	1.4	1.9	1.1	—	1.0
ФП	Воздух	6.01	1.9	1.55	1.9	1.072	—	0.65

тров вычислялась величина  $K_p$  по формуле (21) и сравнивалась с величиной  $K_0$ , найденной в опыте. Данные опыта и расчета приведены в таблице. Как видно из этих данных, опытные значения  $K_0$  для стекловолоконистых фильтров систематически выше  $K_p$ . При этом максимальное отклонение составляет около 8%.

В заключение автор благодарит Н. А. Фукса за предоставленную тему, а также В. М. Бережного, В. Н. Кириченко и И. Б. Стечкину за критические замечания.

Поступило 17 I 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В. Измерение удельной поверхности пористых и дисперсных тел по сопротивлению течению разреженных газов. Докл. АН СССР, 1946, т. 53, № 7, стр. 627.
2. Баканов С. П. К вопросу о молекулярном течении газа через пористую перегородку. Ж. техн. физ., 1957, т. 27, № 7, стр. 1620.
3. Михлин С. Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1947.