

## ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Функция распределения газовых молекул по скоростям вблизи твердой стенки в неоднородно нагретом газе. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, вып. 3.
2. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Газокинетический расчет скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, вып. 1.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И., Ивченко И. Н. Применение метода Бхатнага, Гросса и Крука для определения скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 6.
5. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. E. Transport phenomena in very Dilute Gases. VMN-3-F, Univ. of Michigan, 1949.
6. Jeans J. Dynamical Theory of Gases. N. Y., 4th 1925, p. 217.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

## ПОЛЕ ПЛОТНОСТИ ВОКРУГ КОНУСА В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

И. Н. ЛАРИНА (Москва)

При исследованиях ионосферы и межпланетного газа при помощи спутников и космических ракет возникает задача определения возмущений среды, которые они вызывают. Для случая движения тел произвольной формы со скоростью  $V_0 \gg v_i$  ( $v_i$  — тепловая скорость газа) в работах [1, 2] проведены расчеты концентрации газа в области, удаленной от тела на расстояние, намного большее характерного размера.

В ионосфере, уже на высоте порядка 200 км, длина свободного пробега частиц больше характерного размера движущегося тела, поэтому можно считать, что тело находится в свободномолекулярном потоке. Предполагается, что газ состоит из нейтральных частиц. В случае движения тела в разреженной плазме, решение сформулированной задачи может быть использовано в качестве первого приближения при расчете концентрации ионов [1].

Пусть конус с углом раствора  $2\alpha$  и высотой  $l$  движется со скоростью  $V_0$ . Максвелловская функция распределения в набегающем потоке имеет вид

$$f_0(v + V_0) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} n_0 \exp\left[-\frac{M(v + V_0)^2}{2kT}\right] \quad (1)$$

Здесь  $n_0$  — невозмущенная концентрация потока,  $T$  — температура,  $k$  — постоянная Больцмана.

Свяжем с конусом систему координат, как указано на фиг. 1. В точку с радиус-вектором  $r$  около конуса приходят частицы из набегающего потока с функцией распределения  $f_0(v + V_0)$  и частицы, отраженные поверхностью конуса. Для каждой точки можно построить в пространстве скоростей область затенения  $\Omega_r$ , в которой лежат векторы скоростей частиц, отраженных поверхностью конуса (приложение 1).

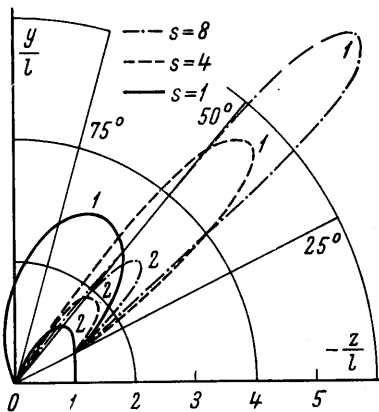
Пусть  $\omega(n, v, v_1)$  — вероятность того, что частица со скоростью  $v$ , попавшая на элемент поверхности с нормалью  $n$ , отразится от поверхности со скоростью  $v_1$ . Приравняв потоки падающих и отраженных частиц, получим

$$f(r, v)(nv) = - \int_{(nv_1) < 0} \omega(n, v, v_1)(nv_1)f(r, v_1)dv_1$$

Таким образом, функция распределения частиц около конуса имеет вид

$$f(r, v) = f_0(v + V_0) \quad (v \notin \Omega_r) \quad (2)$$

$$f(r, v) = - \frac{1}{(nv)} \int_{(nv_1) < 0} \omega(n, v, v_1)(nv_1)f_0(v + V_0)dv_1 \quad (v \in \Omega_r)$$



Фиг. 1

Конкретный вид функции  $\omega(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$  зависит от выбора закона взаимодействия частиц с поверхностью.

Осесимметричный характер задачи дает возможность ограничиться рассмотрением плотности газа в полуплоскости  $yz$ ,  $y > 0$ . Введем в плоскости  $yz$  полярные координаты  $r, \beta$  и безразмерную переменную  $R = r/l$ . Соответственно разделению функции распределения (2) на две части, концентрация частиц  $n(R, \beta)$  складывается из концентрации прямых частиц  $n_1(R, \beta)$  и концентрации отраженных частиц  $n_2(R, \beta)$

$$n(R, \beta) = n_1(R, \beta) + n_2(R, \beta)$$

Для получения концентрации прямых частиц  $n_1(R, \beta)$  проинтегрируем функцию распределения (2) по скоростям, не принадлежащим области  $\Omega_r$ :

$$n_1(R, \beta) = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} n_0 \int_{\Omega - \Omega_r} \exp \left[ - \frac{M(\mathbf{v} + \mathbf{V}_0)^2}{2kT} \right] d\mathbf{v} = n_0 [1 - N_1(R, \beta)] \quad (3)$$

где  $\Omega$  — все пространство скоростей

$$N_1(R, \beta) = \left( \frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{\Omega_r} \exp \left[ - \frac{M(\mathbf{v} + \mathbf{V}_0)^2}{2kT} \right] d\mathbf{v} \quad (4)$$

В пространстве скоростей переходим к сферической системе координат. Выбор направления оси  $\theta = 0$  и пределы интегрирования по телесному углу  $\theta^*(\varphi)$  и  $\varphi^*$  рассматриваются в приложении 1.

Выполнив в (4) интегрирование по  $v$ , получим

$$N_1^\mp(R, \beta) = \pi^{-3/2} \int_0^{\varphi^*} d\varphi \int_0^{\theta^*(\varphi)} \sin \theta \left\{ -sP_\mp \exp(-s^2 P_\mp^2) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2s^2 P_\mp^2) \times \right. \\ \left. \times [1 - \operatorname{erf}(sP_\mp)] \right\} \exp[-s^2(1 - P_\mp^2)] d\theta \quad (5)$$

$$P_\mp = \mp (\cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta \cos \varphi) \quad s = \frac{V_0}{\sqrt{2kT/M}}$$

Индексами (минус и плюс) отмечены величины, относящиеся соответственно к движению конуса вперед вершиной и вперед основанием.

Подставив (5) в (3), получим концентрацию прямых частиц.

Концентрацию отраженных частиц рассмотрим при двух законах отражения — зеркальном и диффузном.

1. *Зеркальное отражение.* В этом случае

$$\omega(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - 2(\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{n}]$$

и из (2) имеем

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v} + \mathbf{V}_0) \exp \frac{2M(\mathbf{n}\mathbf{V}_0)(\mathbf{n}\mathbf{v})}{kT} \quad (\mathbf{v} \in \Omega_r) \quad (6)$$

Проинтегрировав (6) по скоростям  $\mathbf{v} \in \Omega_r$ , получим

$$n_2^\mp(R, \beta) = \pi^{-3/2} n_0 \int_0^{\varphi^*} d\varphi \int_0^{\theta^*(\varphi)} \sin \theta \left\{ -sK_\mp \exp(-s^2 K_\mp^2) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + 2s^2 K_\mp^2) \times \right. \\ \left. \times [1 - \operatorname{erf}(sK_\mp)] \right\} \exp[-s^2(1 - K_\mp^2)] d\theta \quad (7)$$

где  $K_\mp = -P_\mp - 2 \cos(\mathbf{n}\mathbf{v}) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}_0)_\mp$ .

Для точек  $(R, \beta)$ , принадлежащих областям I и II (фиг. 3)  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}_0)_\mp = \pm \sin \alpha$ , а для точек области IV —  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}_0)_\mp = \mp 1$ . Формулы для  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})$  получены в приложении 2.

2. *Диффузное отражение.* Теперь предположим, что имеет место диффузное отражение частиц от поверхности. Для диффузного отражения [3]

$$\omega(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \frac{2h^2}{\pi} (\mathbf{n}\mathbf{v}) \exp(-h\nu^2), \quad h = \frac{M}{2kT_c} \quad (8)$$

где  $T_c$  — температура поверхности конуса.

Представим (8) в (2), проинтегрируем по  $v \in \Omega_r$ , получим

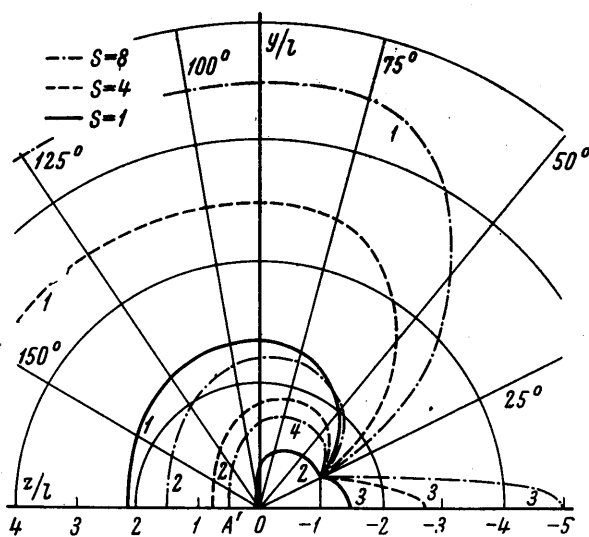
$$n_2^{\mp}(R, \beta) = \frac{n_0}{2\pi} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \left( \varphi^* - \int_0^{\varphi^*} \cos \theta^*(\varphi) d\varphi \right) \times$$

$$\times \{ \exp(-s^2 \sin^2 \alpha) \pm s \sin \alpha \sqrt{\pi} [1 \pm \operatorname{erf}(s \sin \alpha)] \} \quad (\beta > \alpha) \quad (9)$$

$$n_2^{\mp}(R, \beta) = \frac{n_0}{\pi} \left( \frac{T}{T_c} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^{\varphi^*} \cos \theta^*(\varphi) d\varphi \right) \{ \exp(-s^2) \mp s \sqrt{\pi} (1 \mp \operatorname{erf} s) \} \quad (\beta < \alpha)$$

Обычно считается, что тело находится в тепловом равновесии с потоком, т. е.  $T = T_c$ .

Формулы (5), (7), (9) дают возможность вычислить возмущение плотности в любой точке около конуса, как в области сгущения  $\beta > \alpha$ , так и в области разрежения  $\beta < \alpha$ . Интегралы в (5), (7), (9) считались методом Симпсона на ЭВМ «Стрела». Расчеты проводились для конуса с углом полураствора  $\alpha = 25^\circ$  и для чисел  $s (s = V_0/v_i)$  равных 1, 4, 8. На рис. 1 и 2 проводятся кривые одинаковых значений  $N = (n_1 + n_2)/n_0$  при зеркальном (фиг. 1) и при диффузном (фиг. 2) законах отражения. Для  $N = 1,01$  кривые отмечены цифрой 1, для  $N = 1,1$  цифрой 2. Область разрежения достаточно изучена в [1], поэтому здесь ограничимся лишь изображением кривой при  $N = 0,4$  (цифра 3). (Приводятся результаты расчета для случая движения конуса вершиной вперед).



Фиг. 2

Как видно из указанных выше фигур, поле плотности вокруг конуса существенно зависит от закона отражения. Интересно сравнить кривые на фиг. 1, 2 с кривыми одинаковых значений плотности при обтекании сферы, для  $s = 8$ . При зеркальном отражении кривые для сравнения можно взять из фиг. 6 работы [1]. Сравнение показывает, что для зеркального отражения возмущения, вносимые сферой и конусом, имеют явное различие.

В случае диффузного отражения сравним возмущения плотности, вызываемые сферой и конусом в точках оси  $z$ , из которых тела видны под одним и тем же телесным углом. Ясно, что различие плотности в этих точках обусловлено лишь формой тела. Рассмотрим на оси  $z$  точку  $A'$  на расстоянии  $3.3 R_0$  от основания конуса ( $R_0$  — радиус основания). На фиг. 2 через точку  $A'$  ( $z/l = 0.4$ ) проходит кривая для значения  $N = 1.26$  (цифра 4). При обтекании сферы, точке  $A'$  соответствует точка  $A$  на расстоянии  $3.3 R_0$  от центра сферы ( $R_0$  — радиус сферы).

Для диффузного закона отражения, задаваемого функцией (8), при  $s = 8$ , плотность частиц в точке  $A$  равна  $1.53 n_0$ .

Таким образом, конус с углом полураствора  $\alpha = 25^\circ$  при диффузном отражении поверхности вызывает в области перед телом меньшую избыточную плотность, чем сфера.

Приложение 1. При построении  $\Omega_r$  удобно разбить полуплоскость  $yz$ ,  $y > 0$  на области, как указано на фиг. 3. Для областей I и IV конусом затенения  $\Omega_r$  в пространстве скоростей является конус с вершиной в точке  $(R, \beta)$  и образующей — скружностью основания обтекаемого конуса. Уравнение поверхности конуса  $\Omega_r$  запишем в виде

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} - \frac{z'^2}{C^2} = 0$$

1 В [1] диффузным отражением называется закон отражения, задаваемый функцией  $\omega$ , отличной от (8).

где  $x'y'z'$  — система координат, полученная поворотом системы  $xyz$  вокруг оси  $x$  на угол  $\xi$

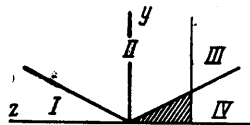
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\xi &= \frac{2R \sin \beta (1 - R \cos \beta)}{R^2 \sin^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha - (1 - R \cos \beta)^2}, & A^2 &= \frac{B^2 C^2}{(1 - R \cos \beta)^2} \\ B^2 &= (1 - R \cos \beta)^2 \{ \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \xi - [R \sin \beta \sin \xi + (1 - R \cos \beta) \sin \xi]^2 \} \\ C^2 &= (1 - R \cos \beta)^2 \{ [R \sin \beta \sin \xi - \cos \xi (1 - R \cos \beta)]^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \xi \} \end{aligned}$$

При интегрировании по скоростям, принадлежащим конусу  $\Omega_r$ , выберем за ось  $\theta = 0$  — ось конуса  $\Omega_r$ . Верхний предел интегрирования по  $\theta$  равен  $\theta^*(\varphi)$

$$\theta^*(\varphi) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \rho / C$$

Здесь  $\rho$  — отрезок, соединяющий центр эллипса, полученного в сечении конуса  $\Omega_r$  плоскостью  $z' = C$ , с точкой на эллипсе

$$\rho = \sqrt{A^2 \sin^2 t + B^2 \cos^2 t}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \operatorname{tg} t$$



Фиг. 3

Угол  $\varphi$  отсчитываем от оси  $y$ .

Для точек  $(R, \beta)$  области II направляющими конуса  $\Omega_r$  в пространстве скоростей являются линии касания обтекаемого косинуса с плоскостями, проходящими через точки 0 и  $(R, \beta)$ , и дуга окружности основания конуса, соединяющая линии касания (Фиг. 4). При переходе к сферической системе координат ось  $\theta = 0$  направим вдоль вектора  $r$ , ось  $\varphi = 0$  выберем в плоскости  $yz$ .

Угол  $\varphi$  изменяется от  $-\varphi^*$  до  $\varphi^*$

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}}$$

Предел интегрирования по  $\theta$  найдем следующим образом: сначала введем вспомогательный угол  $\xi$  (Фиг. 4) и запишем

$$\operatorname{tg} \theta^*(\varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \xi}{a + b}, \quad c = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \xi}{\sin \varphi}$$

$$a = (1 - \cos \xi) \operatorname{tg} \alpha \sin \beta, \quad b = R - \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Затем найдем связь между углами  $\xi$  и  $\varphi$

$$\begin{aligned} \sin \xi &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sqrt{\sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta) \operatorname{tg}^2 \varphi})}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \cos^2 \beta)} \end{aligned}$$

В области III конус  $\Omega_r$  состоит из двух частей: конуса  $\Omega_r^{IV}$ , построенного по правилам области IV, и конуса  $\Omega_r^{II}$  — по правилам области II.

Приложение 2. Формулы для  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})$ . Рассмотрим сначала область II. Частица со скоростью  $\mathbf{v} \in \Omega_r$  приходит в точку  $(R, \beta)$  из точки на конусе  $(x_1, y_1, z_1)$

$$x_1 = L(x_1 + R \cos \beta), \quad y_1 = Q(z_1 + R \cos \beta) \quad (10)$$

$$z_1 = R \cos \beta \frac{-(S + Q \operatorname{tg} \beta) \pm \sqrt{(S + Q \operatorname{tg} \beta)^2 - (S - \operatorname{tg}^2 \alpha)(S + 2Q \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta)}}{S - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$L = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}, \quad Q = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad S = \frac{1 - \lambda_3^2}{\lambda_3^2}$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{v}$  в системе координат  $xy_z$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sin \theta \sin \varphi \\ \lambda_2 &= \sin \theta \cos \varphi \cos \beta + \cos \theta \sin \beta \\ \lambda_3 &= \sin \theta \cos \varphi \sin \beta - \cos \theta \cos \beta \end{aligned} \quad (11)$$

Причем в (9) надо брать отрицательное значение  $z_1$ . Если же оба значения отрицательны, берется то, которое ближе к  $R \cos \beta$ .

Теперь, зная направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $(x_1, y_1, z_1)$  и вектора  $\mathbf{v}$ , получим

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{S+1}(z_0+1)} \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta + Q(z_0+1)}{z_0 \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg} \beta + 1 \right] \quad (12)$$

$$\left( z_0 = \frac{z_1}{R \cos \beta} \right)$$

Для области I величина  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{v})$  считается по этой же формуле (12), лишь в (11) надо  $\beta$  заменить на  $\xi$ .

Поступило 6 IX 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Пятаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме. М., «Наука», 1964.
2. Bird K. A. The Free — Molecule Flow Field of a Moving Body in the Upper Atmosphere. Rarefied Gas Dynamics. Proc. 2-d Intern. Symp. on raref. gas dynam Calif 1960. N.— Y., Acad. Press, 1961.
3. Баранцев Р. Г. Об ударных трансформантах кинетического уравнения аэродинамики разреженных газов. В сб. «Аэродинамика разреженных газов». Сб. I, Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1963.

### СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ ФИЛЬТРОВ В СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

Ю. М. ГЛУШКОВ (Обнинск)

Известно выражение для сопротивления свободно-молекулярному потоку изотропной пористой среды, полученное Б. В. Дерягиным [1] и С. П. Бакановым [2].

В предлагаемой работе рассмотрено течение газа через анизотропную пористую среду, образованную частично упорядоченными волокнами. В такой среде средний свободный пробег и средний косинус рассеяния зависят от направления скорости молекулы.

В качестве модели волокнистых фильтров принята бесконечная система беспорядочно переплетенных волокон, оси которых перпендикулярны массовой скорости газа. Рассмотрены волокна, имеющие в поперечном сечении круглую, произвольную выпуклую и гантелевидную фигуры.

Результаты расчета сравниваются с данными эксперимента, полученными для фильтров типа ФП и фильтров из стекловолокна.

#### I. СОПРОТИВЛЕНИЕ ФИЛЬТРОВ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ КРУГЛЫХ ВОЛОКОН

1. Постановка задачи. Задача сводится к нахождению функции распределения скоростей газовых молекул  $f$  в анизотропной среде фильтра и к последующему определению расхода газа через этот фильтр. По аналогии с [2] принимаем, что молекулы отражаются от стенки диффузно с сохранением скорости.

Кинетическое уравнение Больцмана для стационарного течения при отсутствии внешних сил имеет вид:

$$v\Omega \nabla f(v\Omega) = \frac{f(v\Omega)v}{\lambda(\Omega)} - \int \frac{f(v'\Omega')v'}{\lambda(\Omega')} w(v'\Omega'; v\Omega) dv' d\Omega' \quad (1)$$

Здесь  $v$  — скорость молекулы,  $\Omega$  — единичный вектор скорости,  $\lambda(\Omega)$  — свободный пробег молекулы,  $w(v'\Omega'; v\Omega)$  — плотность вероятности изменения скорости  $v'\Omega'$  на  $v\Omega$  при столкновении молекулы со стенкой.

Так как при обычной температуре средняя тепловая скорость молекул воздуха намного больше практически достижимой скорости движения газа через фильтр и, кроме того, задача имеет плоскую симметрию, то можно искать  $f$  в виде

$$f = f^{(0)} \left( 1 - \lambda(\theta) \psi \cos \theta \frac{|\operatorname{grad} n|}{n} \right) \quad (2)$$

Здесь второй член в скобках мал по сравнению с единицей. В этом выражении  $f^{(0)}$  — равновесное решение уравнения Больцмана для неподвижного разреженного газа в анизотропной пористой среде (функция Максвелла),  $n$  — концентрация молекул газа,  $\theta$  — угол между полярной осью, направленной в сторону —  $\operatorname{grad} n$  и век-