

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В СЛОЕ КНУДСЕНА

Б. В. ДЕРЯГИН, И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(Москва)

Рассмотрен метод моментных уравнений для решения кинетического уравнения Больцмана в слое Кнудсена; приводится вычисление одного из моментов от интеграла столкновений.

1. При определении функции распределения газовых молекул по скоростям в слое Кнудсена необходимо решить кинетическое уравнение Больцмана с учетом интеграла столкновения. В работах [1, 2] найдена функция распределения газовых молекул по скоростям в неоднородно нагретом газе вблизи твердой стенки. При нахождении функции распределения в цитируемых выше работах был использован метод моментных уравнений. Приведем идею этого метода для нахождения функции распределения газов молекул по скоростям в поле тангенциального к твердой стенке градиента температуры.

Рассмотрим простой газ, находящийся над твердой стенкой. Введем систему координат, в которой начало координат находится на поверхности стенки, ось x направлена по нормали, ось y — вдоль поверхности стенки. Вдоль оси y в газе имеется градиент температуры. Функция распределения может быть найдена из кинетического уравнения Больцмана, которое в стационарном случае имеет вид

$$(e\nabla)f = \delta f / \delta t \tag{1.1}$$

Здесь e есть безразмерная скорость молекулы, $\delta f / \delta t$ — интеграл столкновений:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \int dv_1 \int gb db d\varepsilon (f_1'f' - f_1f), \quad g = |c - c_1| \tag{1.2}$$

Здесь g есть относительная скорость двух сталкивающихся молекул, b — прицельный параметр столкновения, ε — азимутальный угол рассеяния.

На больших расстояниях газ описывается распределением Чепмена — Энскога [3], которое можно записать в виде

$$f = f^{(0)} \left[1 + 2c_y u + \tau c_y S_{3/2}^{(1)}(c^2) \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right] \tag{1.3}$$

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right), \quad \tau = \frac{15}{16} \lambda \sqrt{\pi} \quad S_{3/2}^{(1)}(c^2) = {}^{5/2} - c^2$$

Здесь u — безразмерная массовая скорость, λ — длина свободного пробега. Будем искать функцию распределения в виде

$$f^\pm = f^{(0)} [1 + \Psi(\infty, y, c) + \Phi^\pm(x, y, c)] \tag{1.4}$$

Верхние индексы плюс и минус здесь и в дальнейшем означают величины для молекул, летящих от стенки и к стенке соответственно; $f^{(0)} [1 + \Psi(\infty, y, c)]$ — распределение Чепмена — Энскога. Из оценок, приведенных в работе [4], следует:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|$$

Это соотношение дает возможность считать Φ функцией только от x и c .

Учитывая разный характер функции распределения вблизи стенки при $c_x = 0$, будем искать функцию распределения в виде разложения в ряд по полупространственным полиномам от скоростей с коэффициентами, зависящими от пространственных координат. Ограничимся такими полиномами от скоростей, при которых функция распределения на больших расстояниях от стенки будет точно переходить в распределение Чепмена — Энскога. Будем искать поправку к функции распределения в виде трех членов

$$\Phi(x, c) = \Phi_1(x, c) + \Phi_2(x, c) + \Phi_3(x, c) \tag{1.5}$$

Функции $\Phi_i(x, c)$ будем искать в виде разложения по полупространственным полиномам от скоростей

$$\Phi_1(x, c) = 1/2 [a_0^+(x) + a_0^-(x)] c_y + 1/2 [a_0^+(x) - a_0^-(x)] c_y \text{ sign } c_x + 1/2 [a_1^+(x) + a_1^-(x)] c_x c_y + 1/2 [a_1^+(x) - a_1^-(x)] c_x c_y \text{ sign } c_x \tag{1.6}$$

$$\Phi_2(x, c) = 1/2 [a_2^+(x) + a_2^-(x)] c_x c_y + 1/2 [a_2^+(x) - a_2^-(x)] c_x c_y \text{ sign } c_x$$

$$\Phi_3(x, c) = 1/2 [a_3^+(x) + a_3^-(x)] c_y S_{3/2}^{(1)}(c^2) + 1/2 [a_3^+(x) - a_3^-(x)] c_y S_{3/2}^{(1)}(c^2) \text{ sign } c_x$$

Подставим функцию распределения (1.4) в уравнение (1.1) и, оставляя члены линейные по поправкам, получим уравнение

$$c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + c_y \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial y} = I(\Phi) + I(\Psi)$$

Здесь $I(\Phi)$, $I(\Psi)$ — линейризованные интегралы столкновений, которые имеют вид

$$I(\Phi) = \int dv_1 f_1^{(0)} \int |c - c_1| b db d\varepsilon (\Phi_1' + \Phi' - \Phi_1 - \Phi)$$

Функция $\Psi(\infty, y, c)$ удовлетворяет уравнению

$$c_y \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial y} = I(\Psi)$$

Учитывая это, $\Phi(x, c)$ будет удовлетворять уравнению

$$c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = I(\Phi) \quad (1.7)$$

Функции $\Phi_i(x, c)$ выберем так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$c_x \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = I(\Phi_i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.8)$$

Сумма функций $\Phi_i(x, c)$ будет удовлетворять уравнению (1.7).

Из уравнений (1.8) легко получить системы моментных уравнений для функций $a_i^{\pm}(x)$. Для этого (1.8) надо умножить на некоторые функции скоростей и проинтегрировать по всему пространству скоростей; умножим первое из уравнений (1.8) на

$$c_y (1 \pm \text{sign } c_x) e^{-c^2} dc, \quad c_x c_y (1 \pm \text{sign } c_x) e^{-c^2} dc$$

второе из уравнений (1.8) на

$$c_x c_y (1 \pm \text{sign } c_x) e^{-c^2} dc$$

третье из уравнений (1.8) на

$$c_y S_{1/2}^{(1)}(c^2) (1 \pm \text{sign } c_x) e^{-c^2} dc$$

После интегрирования уравнений по скоростям для функций $a_i^{\pm}(x)$ получаем системы моментных уравнений, которые будут линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Коэффициенты дифференциальных уравнений будут выражаться линейной комбинацией моментов от интеграла столкновений вида

$$[F(c), H(c)] = \int F(c) I[H(c)] e^{-c^2} dc \quad (1.9)$$

На больших расстояниях от стенки функция распределения должна совпадать с распределением Чапмена — Энскога, поэтому все функции $\Phi_i(x, c)$ обращаются в нуль при $x \rightarrow \infty$. Произвольные постоянные моментных уравнений определяются из граничных условий на стенке.

Решение уравнений (1.8) содержится в работе [2].

Вычисления интегралов (1.9) представляет основную трудность решения задачи. В работе Ван Чана и Уленбека [3] дается вычисление интегралов типа (1.9), содержащих $\text{sign } c_x$ для произвольного вида потенциала взаимодействий молекул. Однако применение этого метода в случае, когда молекулы взаимодействуют как упругие сферы, приводит к очень громоздким вычислениям. Приведем метод аналитического вычисления одного из интегралов для молекул, взаимодействующих как упругие сферы, который является значительно менее трудоемким, чем применение общего метода [3].

2. Проведем вычисление величины

$$I_1 = [c_y \text{sign } c_x, c_y \text{sign } c_x]$$

Этот символ означает многократный интеграл

$$I_1 = \frac{n}{\pi^{3/2}} \int \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |c - c_1| c_y \text{sign } c_x \exp(-c^2 - c_1^2) (c_y' \text{sign } c_x' + \right. \\ \left. + c_{1y}' \text{sign } c_{1x}' - c_y \text{sign } c_x - c_{1y} \text{sign } c_{1x}) \right\} dc dc_1 \int db d\varepsilon \quad (2.1)$$

Введем безразмерные скорость центра инерции и относительную скорость двух сталкивающихся молекул G и g . Выражая c и c_1 через G и g , получим

$$c = 1/2\sqrt{2}(G - g), \quad c_1 = 1/2\sqrt{2}(G + g), \quad dc_1 dc = dG dg$$

Для дальнейшего перейдем к цилиндрическим координатам для G и сферическим для g

$$G_x = G \cos \varphi, \quad G_y = G \sin \varphi, \quad G_z = G \sin \varphi, \quad G^2 = G_x^2 + G_r^2$$

$$g_x = g \cos \alpha, \quad g_y = g \sin \alpha \cos \beta, \quad g_z = g \sin \alpha \sin \beta$$

При столкновении двух молекул скорость центра инерции не меняется, а относительная скорость меняется только по направлению. Компоненты относительной скорости после столкновения имеют вид [9]

$$g_x' = g(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta \cos \varepsilon)$$

$$g_y' = g(\sin \alpha \cos \beta \cos \theta + \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \theta \sin \varepsilon)$$

$$g_z' = g(\sin \alpha \sin \beta \cos \theta + \cos \alpha \sin \beta \sin \theta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \theta \sin \varepsilon)$$

(θ — угол рассеяния)

Подынтегральное выражение интеграла (2.1) содержит сумму четырех слагаемых. Из динамики столкновения ясно, что достаточно вычислить интеграл с одним слагаемым, скажем с $c_y' \text{ sign } c_x'$, другие вычисляются точно таким же образом, но заменой θ на $\pi - \theta$, 0 и π соответственно. Выражение для этих интегралов ниже будем обозначать через $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$. Вводя интегральное представление сигнум-функции

$$\text{sign } c_x = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(itc_x)}{t} dt$$

будем иметь следующее выражение для интеграла (2.1):

$$I^{(1)} = -\frac{\sqrt{2} n \sigma^2}{8\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} dg g^3 e^{-g^2} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varepsilon \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dG_x e^{-G_x^2} \int_0^{\infty} dG_r G_r e^{-G_r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\beta \exp[2iv(G_x - g \cos \alpha) +$$

$$+ 2it(G_x - g \cos \alpha \cos \theta + g \sin \alpha \sin \theta \cos \varepsilon)] (G_r \cos \varphi - g \sin \alpha \cos \beta) \times$$

$$\times (G_r \cos \varphi - g \sin \alpha \cos \beta \cos \theta - g \cos \alpha \cos \beta \sin \theta \cos \varepsilon + g \sin \beta \sin \theta \sin \varepsilon)$$

Произведем первые пять интегрирований по β , φ , G_r , G_x , ε . Интегрирование по G_x производим при помощи формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + ixb} dx = \sqrt{\pi} e^{-1/4 b^2}$$

Интегрирование по ε при помощи формул

$$\int_0^{2\pi} \exp(ia \cos \varepsilon) d\varepsilon = 2\pi J_0(a), \quad \int_0^{2\pi} \cos \varepsilon \exp(ia \cos \varepsilon) d\varepsilon = 2\pi i J_1(a)$$

Здесь $J_0(a)$ и $J_1(a)$ — цилиндрические функции.

После вычисления первых пяти интегралов будем иметь

$$I^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{4} n \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} e^{-(v+t)^2} \int_0^{\infty} dg g^3 e^{-g^2} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \exp \times$$

$$\times \exp(-2ivg \cos \alpha - 2igt \cos \alpha \cos \theta) \{ (1 + g^2 \sin^2 \alpha \cos \theta) J_0(2gt \sin \alpha \sin \theta) +$$

$$+ ig^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta J_1(2gt \sin \alpha \sin \theta) \}$$

Интервал $[0, \pi]$ интегрирования по θ разобьем на два интервала $[0, 1/2\pi]$ и $[1/2\pi, \pi]$.

При интегрировании в интервале $[\frac{1}{2}\pi, \pi]$ сделаем замену переменной $\theta \rightarrow \pi + \theta$, после чего интегрирование легко произвести, воспользовавшись формулами

$$\cos(a \cos \alpha) = (\frac{1}{2}\pi a \cos \alpha)^{1/2} J_{-1/2}(a \cos \alpha), \quad \sin(a \cos \alpha) = (\frac{1}{2}\pi a \cos \alpha)^{1/2} J_{1/2}(a \cos \alpha)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_\mu(b \sin \theta) J_\nu(\cos \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{\nu+1} \theta d\theta = \frac{b^\mu a^\nu J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{a^2 + b^2})}{(\sqrt{a^2 + b^2})^{\mu+\nu+1}}$$

Интегрирование по α можно произвести при помощи формулы [7]

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu} x \exp(i\beta \cos x) dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{2}{\beta}\right)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(\beta)$$

После интегрирования по θ и α будем иметь

$$I^{(1)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} n \sigma^2 \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} e^{-(v+t)^2} \int_0^\infty \frac{J_{1/2}(2gv)}{(2gv)^{1/2}} \frac{J_{1/2}(2gt)}{(2gt)^{1/2}} g^3 e^{-g^2} dg$$

Произведение цилиндрических функций при помощи формулы [7]

$$\frac{J_\nu(\alpha)}{\alpha^\nu} \frac{J_\nu(\beta)}{\beta^\nu} = \frac{1}{2^\nu \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi (\sin x)^{2\nu} \frac{J_\nu(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x})}{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos x})^\nu} dx$$

легко представить в виде линейной комбинации цилиндрических функций. После простых вычислений будем иметь

$$\frac{J_{1/2}(2gv)}{(2gv)^{1/2}} \frac{J_{1/2}(2gt)}{(2gt)^{1/2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi g^2 vt} \left\{ \frac{J_{-1/2}[2g(v+t)]}{[2g(v+t)]^{-1/2}} - \frac{J_{-1/2}[2g(v-t)]}{[2g(v-t)]^{-1/2}} \right\} \quad (2.2)$$

Интегрирование по g производим при помощи формулы

$$\int_0^\infty J_\nu(at) \exp(-p^2 t^2) t^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(1/2\nu + 1/2\mu)}{2p^\mu \Gamma(\nu + 1)} \exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right) \left(\frac{a}{2p}\right)^\nu F\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\mu}{2} + 1, \nu + 1, \frac{a^2}{4p^2}\right) \quad (2.3)$$

Здесь $F(a, \gamma, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. После интегрирования по g получим

$$I^{(1)} = \frac{\sqrt{2} n \sigma^2}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v+t)^2} \times \\ \times \left[e^{-(v+t)^2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (v+t)^2\right) - e^{-(v-t)^2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (v-t)^2\right) \right] \frac{dt}{t^2} \quad (2.4)$$

Интегрирование по v и t осуществляется при помощи дифференцирования по параметру

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v+t)^2} e^{-(v-t)^2} (v \pm t)^{2k} \frac{dt}{t^2} = (-1)^k \left\{ \frac{\partial^k}{\partial p^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v+t)^2 - p(v \pm t)^2} \frac{dt}{t^2} \right\}_{p=1}$$

Рассмотрим вычисление последнего интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v+t)^2 - p(v \pm t)^2} \frac{dt}{t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+p)v^2 - (1+p)t^2 - 2v \pm 2vt} \frac{dt}{t^2} \quad (\gamma = 1 \pm p) \quad (2.5)$$

Вычисление интеграла (2.5) производится при помощи двойного дифференцирования по параметру γ и затем нужно дважды проинтегрировать по γ ; постоянная интегрирования не существенна, так как легко видно из выражения (2.4), что она сокращается.

После простых интегрирований выражение (2.5) будет равно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1+p)v^2 - (1+p)t^2 - 2vt} \frac{dt}{t^2} = 4\pi \left[\gamma \arcsin \frac{\gamma}{1+p} + \sqrt{(1+p)^2 - \gamma^2} \right] \quad (2.6)$$

Здесь постоянная интегрирования опущена. После интегрирования по v и t получим

$$I^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{16} n \sigma^2 \left\{ 2\pi^2 F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) (1+p) - 4\pi F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) \left[(1-p) \arcsin \frac{1-p}{1+p} + 2\sqrt{p} \right] \right\}_{p=1} \quad (2.7)$$

При помощи рекуррентных соотношений для вырожденной гипергеометрической функции получим

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) + 2 \frac{\partial}{\partial p} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

Выражения

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p), \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p)$$

легко вычисляются аналитически, если воспользоваться оператором сдвига

$$\exp\left(\alpha \frac{\partial}{\partial p}\right) f(p) = f(\alpha + p)$$

Из свойств вырожденной гипергеометрической функции имеем

$$\left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p) \right]_{p=1} = \left[\exp\left(-\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p) \right]_{p=1} = f(0)$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp\left(-\rho \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}$$

Следовательно,

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\partial}{\partial p}\right) f(p) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} f(p - \rho)$$

Окончательное выражение $I^{(1)}$ будет равно

$$I^{(1)} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

Легко видеть, что $I^{(1)} = I^{(2)}$. Выражение $I^{(3)}$ лучше вычислять с самого начала, так как оно не будет содержать $\text{sign } x$. Интегрирования проводятся элементарно.

Вычисление $I^{(4)}$ производится так же, как $I^{(1)}$. После интегрирования по e , полагаем $\theta = \pi$ и производим дальнейшие интегрирования. Следуя изложенному, в результате получим

$$I^{(3)} = -\frac{7}{6} \frac{\pi}{\lambda} \quad I^{(4)} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{3 - 2\sqrt{2}}{12}$$

Окончательно интеграл (2.1) равен

$$I_1 = 2I^{(1)} + I^{(3)} + I^{(4)} = \frac{1 - 8\sqrt{2}}{12} \frac{\pi}{\lambda}$$

Вычисления других интегралов, встречающихся в задаче, производятся таким же образом, однако вычисления будут существенно более громоздкими.

Поступило 31 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Функция распределения газовых молекул по скоростям вблизи твердой стенки в неоднородно нагретом газе. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, вып. 3.
2. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Газокинетический расчет скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, вып. 1.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Дерягин Б. В., Яламов Ю. И., Ивченко И. Н. Применение метода Бхатнага, Гросса и Крука для определения скорости теплового скольжения газа вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, вып. 6.
5. Wang Chang C. S., Uhlenbeck G. E. Transport phenomena in very Dilute Gases. VMN-3-F, Univ. of Michigan, 1949.
6. Jeans J. Dynamical Theory of Gases. N. Y., 4th 1925, p. 217.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.

ПОЛЕ ПЛОТНОСТИ ВОКРУГ КОНУСА В СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ ПОТОКЕ

И. Н. ЛАРИНА (Москва)

При исследованиях ионосферы и межпланетного газа при помощи спутников и космических ракет возникает задача определения возмущений среды, которые они вызывают. Для случая движения тел произвольной формы со скоростью $V_0 \gg v_i$ (v_i — тепловая скорость газа) в работах [1, 2] проведены расчеты концентрации газа в области, удаленной от тела на расстояние, намного большее характерного размера.

В ионосфере, уже на высоте порядка 200 км, длина свободного пробега частиц больше характерного размера движущегося тела, поэтому можно считать, что тело находится в свободномолекулярном потоке. Предполагается, что газ состоит из нейтральных частиц. В случае движения тела в разреженной плазме, решение сформулированной задачи может быть использовано в качестве первого приближения при расчете концентрации ионов [1].

Пусть конус с углом раствора 2α и высотой l движется со скоростью V_0 . Максвелловская функция распределения в набегающем потоке имеет вид

$$f_0(v + V_0) = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} n_0 \exp\left[-\frac{M(v + V_0)^2}{2kT}\right] \quad (1)$$

Здесь n_0 — невозмущенная концентрация потока, T — температура, k — постоянная Больцмана.

Свяжем с конусом систему координат, как указано на фиг. 1. В точку с радиус-вектором r около конуса приходят частицы из набегающего потока с функцией распределения $f_0(v + V_0)$ и частицы, отраженные поверхностью конуса. Для каждой точки можно построить в пространстве скоростей область затенения Ω_r , в которой лежат векторы скоростей частиц, отраженных поверхностью конуса (приложение 1).

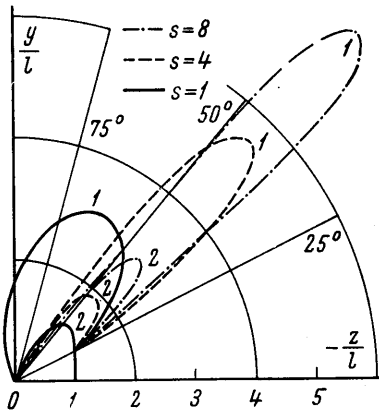
Пусть $\omega(n, v, v_1)$ — вероятность того, что частица со скоростью v , попавшая на элемент поверхности с нормалью n , отразится от поверхности со скоростью v_1 . Приравняв потоки падающих и отраженных частиц, получим

$$f(r, v) (nv) = - \int_{(nv_1) < 0} \omega(n, v, v_1) (nv_1) f(r, v_1) dv_1$$

Таким образом, функция распределения частиц около конуса имеет вид

$$f(r, v) = f_0(v + V_0) \quad (v \notin \Omega_r) \quad (2)$$

$$f(r, v) = - \frac{1}{(nv)} \int_{(nv_1) < 0} \omega(n, v, v_1) (nv_1) f_0(v + V_0) dv_1 \quad (v \in \Omega_r)$$



Фиг. 1