

которые не зависят от φ_0 . Если условиться, что $Q_0 = 0$, то из (2.61) получим

$$[A \operatorname{sh} 2n\theta_0 + \operatorname{ch} 2n\theta_0]Q_n + [A \operatorname{sh} 2(n-1)\theta_0 - \operatorname{ch} 2(n-1)\theta_0]Q_{n-1} = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.73)$$

При $y \rightarrow \infty$ при помощи (2.44) найдем

$$\frac{d(ka)}{dy} = -Q\varphi_0, \quad Q = 2\beta(h-1) \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \quad (2.74)$$

Это означает, что амплитуда искривления границы раздела неограниченно возрастает. При $t \rightarrow \infty$ этот рост происходит по линейному закону. Постоянная Q обычно положительна, т. е. на участках с повышенной плотностью граница отстаёт.

Получило 20.III.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М. Развитие возмущений в плоских ударных волнах. ПМТФ, 1967, № 4.
2. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.

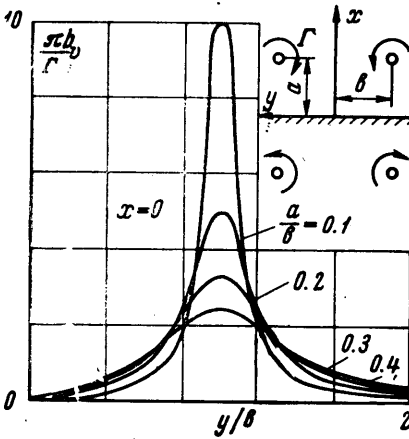
ВИХРИ ЗА ГОЛОВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Г. И. МАЙКАПАР

(Москва)

Получено выражение для составляющей вихря за головной ударной волной, направленной по вектору скорости. В тех случаях, когда вихри сосредоточены в окрестности максимума они эквивалентны дискретным вихрям и могут быть причиной появления максимумов теплового потока на поверхности тела.

1. В опытах [1] обнаружены резкие максимумы теплового потока на поверхности моделей несущих тел в потоке газа, не связанные с непосредственным взаимодействием скачков уплотнения и пограничного слоя или взаимодействием скачков уплотнения. В случае притупленного полуконуса, рассмотренном в [1], причиной появления этих максимумов является отрыв потока, однако представляется вероятной причиной также наличие за головной ударной волной вихрей, близких к дискретным. Такие вихри могут также управлять срывными явлениями и вызывать их. Вихри за головной ударной волной не обладают свойством сохраняемости, но как и всегда являются характеристикой внутреннего вращения газа. В случаях осесимметричного или плоского течения отлична от нуля только нормальная к вектору скорости составляющая вихря, эта составляющая характеризует распределение скорости поперек ударного слоя. Если же течение трехмерное, то отлична от нуля также и составляющая вихря, направленная по вектору скорости, именно эта составляющая характеризует поперечное течение, которое может вызвать местное утоньшение пограничного слоя и появление максимума теплового потока.

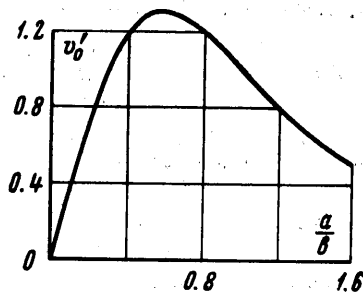


Фиг. 1

Вихрь обращается в нуль в точке, где ударная волна является прямой и на линии перехода ее в характеристику, поэтому максимальной величины вихрь достигает где-то в промежутке [2] и если при этом вихри сосредоточены в окрестности максимума, то их действие эквивалентно дискретному вихрю.

Величину вихря можно вычислить по форме головной волны, последняя тем ближе к поверхности тела, чем больше число M , следовательно, вихрь может дать представление об особенностях течения в тех случаях, когда нет полного расчета.

Величина вихря, возможно, будет также характерным параметром. Следует отметить, что по величине давления на поверхности тела наличие интенсивных вихрей можно не обнаружить, так как при гиперзвуковых скоростях увеличение скорости от скорости невозмущенного потока до максимальной приводит к небольшому уменьшению коэффициента давления; о направлении скорости по давлению вообще непосредственно судить нельзя. Если головная волна имеет плоскость симметрии и вектор скорости невозмущенного потока находится в этой плоскости, то вихрей будет два и о влиянии их на течение можно судить по простейшему примеру плоской твердой поверхности (фиг. 1). Непосредственно под вихрем ($y/b = 1$) будет иметь место увеличение скорости поперечного течения, эквивалентное по влиянию на пограничный слой увеличению кривизны поверхности, и, кроме того, в плоскости симметрии (на линии «растекания» $y = 0$) вихри вызовут увеличение производной (dv/dy) (фиг. 2), характеризующей величину теплового потока (v — скорость на стенке, $v'_0 = \pi b^2 / \Gamma (dv/dy)_0$).



Фиг. 2

2. Формулы для вычисления величины вихря за головной ударной волной получены в ряде работ, укажем одну из первых [3], однако в этих работах не приведены окончательные формулы для составляющих вихря. Воспользуемся для вычисления интересующей нас составляющей вихря криволинейной ортогональной системой координат, связанной с волной: координата ζ отсчитывается по нормали к волне в направлении к телу, координаты ξ, η отсчитываются вдоль главных линий кривизны, w, u, v — соответствующие составляющие скорости, поверхность волны предполагается аналитической. Так как составляющие u, v не меняются при прохождении через волну, то, очевидно, что нормальная к волне составляющая вихря равна нулю.

Для определения касательной составляющей вихря воспользуемся уравнениями движения [4]:

непосредственной перед волной

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \left(\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{E}} \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial \xi} \right) - \frac{uw_1}{R_\xi} = 0$$

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial \eta} - u \left(\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{E}} \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial \xi} \right) - \frac{vw_1}{R_\eta} = 0 \quad (1)$$

непосредственно за волной

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + w_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_2 + v \left(\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{E}} \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial \xi} \right) - \frac{uw_2}{R_\xi} = - \frac{1}{\rho_2 \sqrt{E}} \frac{\partial p_2}{\partial \xi}$$

$$\frac{u}{\sqrt{E}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial \eta} + w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)_2 - u \left(\frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \ln \sqrt{E}}{\partial \eta} - \frac{v}{\sqrt{E}} \frac{\partial \ln \sqrt{G}}{\partial \xi} \right) - \frac{uw_2}{R_\eta} = - \frac{1}{\rho_2 \sqrt{G}} \frac{\partial p_2}{\partial \eta}$$

E, G — коэффициенты первой основной квадратичной формы, R_ξ, R_η главные радиусы кривизны. Вычитая из уравнений (2) уравнения (1), имеем

$$w_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_2 + \frac{u(w_1 - w_2)}{R_\xi} = - \frac{1}{\rho_2 \sqrt{E}} \frac{\partial p_2}{\partial \xi}, \quad w_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)_2 + \frac{v(w_1 - w_2)}{R_\eta} = - \frac{1}{\rho_2 \sqrt{G}} \frac{\partial p_2}{\partial \eta}$$

Составляющие вихря

$$\omega_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{v}{R_{\eta}}, \quad \omega_{\eta} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{u}{R_{\xi}} - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

перед волной равны нулю, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{v}{R_{\eta}} = \frac{u}{R_{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (4)$$

Подставляя производные, $\partial u / \partial \zeta$, $\partial v / \partial \zeta$ из (3), а u / R_{ξ} , v / R_{η} из (4) в выражение для w_{ξ} , w_{η} , получим

$$\omega_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial w_2}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho_1 w_1} \frac{\partial p_2}{\partial \eta} - \frac{w_1}{w_2} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right), \quad \omega_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_1 w_1} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} - \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right) \quad (5)$$

Воспользуемся теперь известными формулами для характеристик газа за ударной волной

$$w_2 = w_1 \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{w_1^2 / a_1^2} \right), \quad p_2 = (1 - \varepsilon) \left(\rho_1 w_1^2 - \frac{\varepsilon \rho_1 a_1^2}{1 + \varepsilon} \right), \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{1}{6}$$

Получим

$$\omega_{\xi} = - \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\sqrt{G} \rho_1 \rho_2} \frac{\partial w_1}{\partial \eta}, \quad \omega_{\eta} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\sqrt{E} \rho_1 \rho_2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi}$$

составляющая вихря по направлению скорости

$$\omega = \frac{\omega_{\xi} u + \omega_{\eta} v}{V_2} = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_1 \rho_2 V_2} \left(\frac{v}{\sqrt{E}} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right)$$

$$V_2 = \left(V^2 + \left(\varepsilon w_1 + \frac{1 - \varepsilon}{w_1 / a_1^2} \right)^2 - w_1^2 \right)^{1/2}$$

Составляющие скорости равны

$$u = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{\xi}}{\sqrt{E}}, \quad v = \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}_{\eta}}{\sqrt{G}}, \quad w_1 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{m}$$

Здесь \mathbf{m} — единичный нормальный вектор, а производные равны

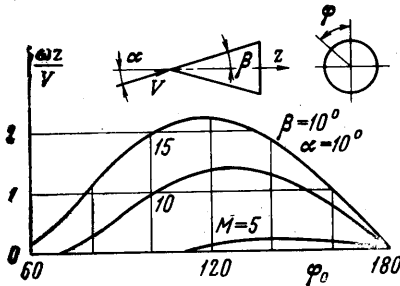
$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \eta}$$

Но в соответствии с формулой Родрига [5] для главных направлений

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi} = -K_{\xi} \mathbf{r}_{\xi}, \quad \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \eta} = K_{\eta} \mathbf{r}_{\eta}$$

K_{ξ} , K_{η} — главные кривизны, поэтому окончательно

$$w = \frac{\rho_1 \rho_2 V_2}{(\rho_2 - \rho_1)^2} uv (K_{\eta} - K_{\xi}) \quad (6)$$



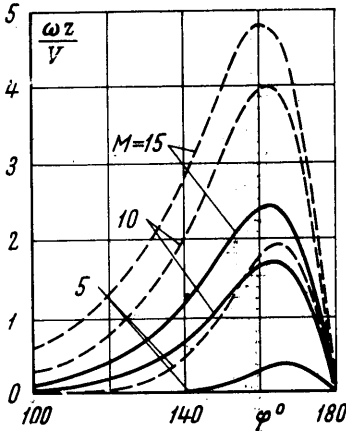
Фиг. 3

В (6) первый множитель зависит от числа M и угла наклона волны к вектору скорости невозмущенного потока, остальные множители зависят только от геометрии волны.

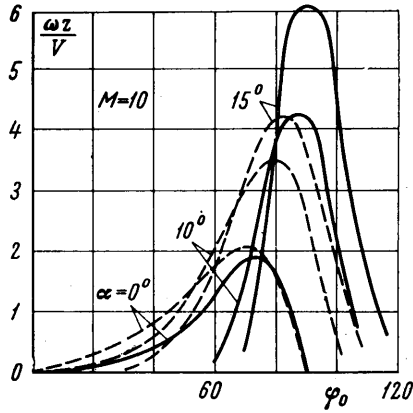
Составляющая вихря ω равна нулю, если волна сферическая; равна нулю она также в точке, в которой волна прямая ($u = 0$, $v = 0$) и на линии перехода волны в характеристику ($\rho_2 - \rho_1 = 0$).

3. Приведем результаты вычислений для волн простейшей формы, дающие представление о распределении ω .

В случае конической волны, ось которой не совпадает с вектором скорости невозмущенного потока (фиг. 3), вихри распределены по значительной части окруж-

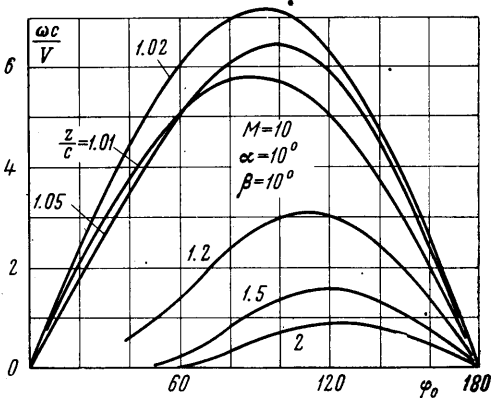


Фиг. 4



Фиг. 5

ности, интенсивность их растет с увеличением числа M . Заметно изменяется распределение вихрей в случае эллиптической конической волны (фиг. 4, 5), вихри концентрируются в областях большой кривизны волны и занимают участки $30-60^\circ$, т. е. приближаются к вихревому слою. На фиг. 4 большой угол полураствора β находится в плоскости угла атаки α , меньший угол полураствора γ определяется отношением $\text{tg } \gamma / \text{tg } \beta = 1/2$, $\beta = 20^\circ$, сплошные линии соответствуют $\alpha = 0$, пунктирные $\alpha = 10^\circ$. На фиг. 5 отношение $\text{tg } \gamma / \text{tg } \beta = 2$, сплошные линии — $\beta = 10^\circ$, пунктирные $\beta = 20^\circ$. В случае головной волны, имеющей форму осесимметричного гипербоида, вихри концентрируются в узком слое вблизи начальной точки гипербоида ($z/c = 1$, фиг. 6).



Фиг. 6

В случае несимметричной волны вихрь имеет максимум по обеим координатам и концентрируется в узких областях.

Из приведенных примеров видно, что действительно можно ожидать в пространственных течениях появления концентрации вихрей, по действию аналогичных дискретным вихрям. Естественно, что влияние этих вихрей будет существенно зависеть как от геометрии течения, так и от числа Рейнольдса.

Поступило 8.1.1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровой В. Я., Давлет-Кильдеев Р. З., Рыжкова М. В. Об особенностях теплообмена на поверхности некоторых несущих тел при больших сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
2. Майкапар Г. И. Изменение характеристик течения невязкого нетеплопроводного газа в слое за головной волной уплотнения. Техн. отчеты ЦАГИ, 1960, вып. 168.
3. Hayes W. D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, No. 6.
4. Майкапар Г. И. Учет влияния центробежных сил на давление воздуха на поверхность тела произвольной формы, обтекаемого потоком с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1959, вып. 1.
5. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии, М., Гостехиздат, 1938.