

$< m < 1$ ), то главный член решения будет такой же, как и в плоском случае (если изучается «тройная точка», то необходимо иметь в виду, что поток в области  $\mathcal{E}$  уже не будет равномерным). Если же  $m \geq 1$ , то вместо решения  $\beta$ ,  $\lambda \sim r^m$  будет

$$\beta = \beta_0 + C\psi + (D-1) \frac{\sin \beta_0}{y_0} \psi, \quad \lambda = \lambda_0 \left[ 1 + C\psi + \frac{D \sin \beta_0}{y_0(M_0^2 - 1)} \psi - \frac{S - S_0}{kRM_0^2} \right] \quad (3.2)$$

Постоянные  $C$  и  $D$  могут быть определены из граничных условий соответствующих задач. Ударная волна имеет при этом конечную кривизну. Таким образом, в осесимметричном течении при  $\beta_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$  случай особенности с нулевой кривизной ударной волны отсутствует.

Заметим, что возможность построения решения (3.2), соответствующего значению  $m = 1$  и удовлетворяющего граничным условиям, появляется в осесимметричном течении, по сравнению с плоским случаем, оттого, что в выражении для  $\beta$  имеется коэффициент  $(D-1)$  (в плоском случае было бы  $D$ ); это приводит к тому, что система для определения постоянных  $C$ ,  $D$  ( $C_i$ ,  $D_i$ ) становится линейно независимой.

4. Рассмотрим теперь случай, когда исследуемая точка находится на оси симметрии. При этом будем полагать также  $\beta_0 = 0$ , так как в противном случае получим коническую особенность.

Пусть в системе (2)  $F(\psi) = \psi q(\lambda_0)$ ,  $h_0 = 1$ . Подставляя (1.3) при  $N = 1$  в (1.2) и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим, учитывая, что  $y = \psi + o(\varepsilon)$

$$\beta_\psi = \frac{1}{\lambda_0} \lambda_\psi + \frac{1}{kRM_0^2} \frac{dS}{d\psi}, \quad \frac{M_0^2 - 1}{\lambda_0} \lambda_\psi = \beta_\psi + \frac{\beta}{\psi} \quad (3.3)$$

В качестве примера рассмотрим течение в окрестности точки ортогональности ударной волны оси симметрии. Граничными условиями здесь будут:  $\beta = 0$  при  $\psi = 0$  и  $d\lambda/d\beta = 0$  при  $\psi/\lambda = 0$ ; последнее возьмем в виде  $\lambda = \lambda_0$  при  $\psi = 0$ . Решение (3.3), удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет вид

$$\beta = B J_1(\psi m) \operatorname{ch}(\psi m \sqrt{1 - M_0^2}), \quad \lambda = \lambda_0 [1 - B \sqrt{1 - M_0^2} J_0(\psi m) \operatorname{sh}(\psi m \sqrt{1 - M_0^2})]$$

где  $J_0$ ,  $J_1$  — функции Бесселя,  $B$ ,  $m$  — постоянные.

Таким образом, в осесимметричном течении кривизна отошедшей ударной волны в точке пересечения с осью симметрии всегда ограничена и не равна нулю.

Поступило 23 XI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley K. G. Considerations on the Structure of Mixed Subsonic-Supersonic Flow Patterns. Tech. Report F-TR-2168-ND, Head Quarters Air Materiel Command, Wright Field Dayton, Ohio, 1947.
2. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, вып. 2, т. 22.
4. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 2.

### ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ РАЗНОПЛОТНОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Р. М. ЗАЙДЕЛЬ (Москва)

Одной из причин, вызывающих искажение формы фронта ударной волны, является разноплотность вещества, по которому ударная волна распространяется. В данной работе рассмотрена в линейном приближении задача о движении плоской (вначале) ударной волны по веществу, начальная плотность которого изменяется также и в направлении, параллельном плоскости фронта невозмущенной ударной волны. Для упрощения вычислений вещество считаем идеальным газом с нулевым начальным давлением. В п. 1 решена задача для бесконечного пространства. В п. 2 рассмотрено влияние твердого поршня, а также границы с невесомым газом.

1. Пусть по однородному веществу распространяется плоская ударная волна. Используем систему координат, в которой фронт волны покоится, так что ось  $x$  направлена по движению газа, а плоскость  $yz$  совпадает с фронтом ударной волны. При  $x < 0$  (холодное вещество) газ течет со скоростью  $v_0$ , при  $x > 0$  (сжатое вещество) скорость газа равна  $v$ . Плотность газа равна, соответственно,  $\rho_0$  и  $\rho$ , так что

$\rho_0 v_0 = \rho v$ . Газ считаем идеальным с показателем изэнтропы  $\gamma$ . Причиной, вызывающей искажение течения, является разноплотность холодного газа. Не уменьшая общности, будем считать, что эта разноплотность в системе координат, где холодный газ неподвижен, имеет вид

$$\rho_0'(x, y) = \rho_0 f(x) e^{ikhv} \quad (1.1)$$

В системе координат, где фронт волны покоится, имеем, следовательно, граничное условие

$$\rho_0' = \rho_0 \psi(t) e^{ikhv}, \quad x = 0 \quad (1.2)$$

причем функции  $f(x)$  и  $\psi(t)$  связаны соотношением

$$\psi(t) = f(-v_0 t) \quad (1.3)$$

В области  $x > 0$  для возмущений, отмеченных штрихом, имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x'}{\partial t} + v \frac{\partial v_x'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, & \frac{\partial v_y'}{\partial t} + v \frac{\partial v_y'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + v \frac{\partial p'}{\partial x} + \rho c^2 \left( \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

причем  $c$  — скорость звука в сжатом веществе. Возмущения плотности  $\rho'$  исключены при помощи условия адиабатичности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + v \frac{\partial p'}{\partial x} = c^2 \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right) \quad (1.5)$$

Отметим, что возмущение давления  $p'$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' - c^2 \left( \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Поскольку начальное давление  $p_0 = 0$ , то невозмущенные величины имеют следующие значения:

$$\rho = h\rho_0, \quad v = \frac{v_0}{h}, \quad p = \frac{h-1}{h} \rho_0 v_0^2 \quad \left( h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \quad (1.7)$$

Пусть  $\xi(y, t)$  — смещение фронта волны от плоскости  $x = 0$ , причем  $\xi > 0$ , если фронт сместился в сторону сжатого вещества. Из законов сохранения следуют граничные условия для возмущений

$$\begin{aligned} \rho' &= h\rho_0', & v_y' &= \frac{h-1}{h} v_0 \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ v_x' &= \frac{h-1}{h} \frac{\partial \xi}{\partial t}, & \frac{p'}{p} &= \frac{\rho_0'}{\rho_0} - \frac{2}{v_0} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad x = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Предположим, что функция  $\psi(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  стремится к некоторому пределу

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = \psi_0 \quad (1.9)$$

При этом, очевидно, с течением времени должен выработаться некоторый стационарный режим, который можно найти, считая, что в предыдущих уравнениях все величины от времени не зависят, а зависимость от координаты  $y$  дается множителем  $\exp(iky)$ . Стационарное решение, удовлетворяющее условию ограниченности возмущений при  $x \rightarrow +\infty$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{p'}{p} &= \psi_0 \exp\left(iky - \frac{kx}{\kappa}\right), & \frac{\rho'}{\rho_0} &= \frac{h}{\gamma} \psi_0 \left[ \gamma - 1 + \exp\left(-\frac{kx}{\kappa}\right) \right] e^{ikhv} \\ \frac{v_x'}{v_0} &= \frac{h-1}{h} \psi_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{kx}{\kappa}\right) \right] e^{ikhv}, & \frac{v_y'}{v_0} &= \frac{i\psi_0}{\gamma\kappa} \exp\left(iky - \frac{kx}{\kappa}\right) \\ k\xi &= \kappa\psi_0 e^{ikhv} & \psi &= \left(\frac{h}{h+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Последняя из этих формул дает связь между амплитудой относительной разности плотности и амплитудой смещения фронта ударной волны в установившемся режиме. За фронтом волны ротор скорости отличен от нуля

$$(\text{rot } \vec{v}) = \frac{\partial v_y'}{\partial x} - \frac{\partial v_x'}{\partial y} = -ik \frac{h-1}{h} \psi_0 v_0 e^{ikhv} \quad (1.11)$$

Вдали от фронта вихревой характер течения становится особенно наглядным. Действительно,

$$v_y' \rightarrow 0, \quad v_x' \rightarrow (1-1/h)\psi_0, \quad v_0 e^{ikhv} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty$$

т. е. распределение скоростей имеет слоистый вид.

При решении нестационарной задачи применим преобразование Лапласа по времени, т. е. от функции оригинала  $f(x, t)$  перейдем к функции-образу  $f(x, s)$  по формуле

$$f(x, s) = \int_0^{\infty} f(x, t) e^{-st} dt \quad (1.12)$$

Будем считать, что до момента  $t = 0$  ударная волна двигалась по однородному веществу, поэтому начальные условия для всех возмущений будут нулевыми, в частности,  $\xi(y, t = 0) = 0$ . Из (1.4) и (1.8) получим для изображений уравнения и граничные условия

$$sv_x' + v \frac{dv_x'}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dx} = 0, \quad sv_y' + v \frac{dv_y'}{dx} + \frac{ik}{\rho} p' = 0 \quad (1.13)$$

$$sp' + v \frac{dp'}{dx} + \rho c^2 \left( \frac{dv_x'}{dx} + ikv_y' \right) = 0$$

$$\frac{v_y'}{v_0} = \frac{h-1}{h} ik\xi, \quad v_x' = \frac{h-1}{h} s\xi, \quad \frac{p'}{p} = \Psi(s) - \frac{2}{v_0} s\xi, \quad x = 0 \quad (1.14)$$

Функция  $\Psi(s)$  будет изображением для  $\psi(t)$

$$\Psi(s) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-st} dt \quad (1.15)$$

Имея в виду воспользоваться принципом Дюамеля, рассмотрим вначале случай, когда  $\psi(t < 0) = 0$  и  $\psi(t > 0) = \text{const} = \psi_0$ . При этом  $\Psi(s) = \psi_0/s$ . Интегрируя систему (1.13) с граничными условиями (1.14) и требуя ограниченности решения при  $x \rightarrow +\infty$  для амплитуды искривления фронта, после вычислений получим

$$k\xi(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(z) e^{Tz} \frac{dz}{z} \quad (1.16)$$

$$\Phi(z) = \psi_0 \sqrt{h} \frac{\sqrt{(h+1)(z^2+1)} - 2z}{(h-3)z^2 + h + 1}, \quad z = \frac{s\sqrt{h}}{kv_0}, \quad T = \frac{kv_0 t}{\sqrt{h}} = kL$$

Величина  $L$  — путь, пройденный сигналом за время  $t$  вдоль поверхности фронта. Для радикала берется та ветвь, которая для положительных чисел дает арифметическое значение корня.

Пусть  $\varphi(T)$  имеет  $\Phi(z)$  своим изображением, так что

$$\varphi(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(z) e^{Tz} dz \quad (1.17)$$

Тогда, как известно из теории преобразования Лапласа

$$k\xi(T) = \int_0^T \omega(\tau) d\tau \quad (1.18)$$

Ударная волна в идеальном газе устойчива, поэтому [1] интеграл в (1.17) можно вычислять по двум берегам разреза, проведенного вдоль отрезка  $(-i, i)$  мнимой оси плоскости  $z$ . Полагая  $z = ix$ , получим

$$\varphi(T) = \frac{2}{\pi} \kappa \psi_0 \int_0^1 \cos(Tx) \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{q(x)}, \quad q(x) = 1 - \frac{h-3}{h+1} x^2 \quad (1.19)$$

Интегрируя по  $T$  под знаком интеграла, получим согласно (1.18)

$$k\xi(T) = \frac{2}{\pi} \kappa \psi_0 \int_0^1 \sin(Tx) \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{xq(x)} \quad (1.20)$$

Условие  $\xi(T=0) = 0$ , очевидно, выполняется. Нетрудно также найти производную  $\partial \xi / \partial t$  в начальный момент времени. Применяем известное правило

$$\left. \frac{d(k\xi)}{dT} \right|_{T=0} = \varphi(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} z\Phi(z) = \frac{\psi_0 \sqrt{h}}{\sqrt{h+1}+2} \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(t=0) = \frac{\psi_0 v_0}{\sqrt{h+1}+2}$$

Этот результат в точности совпадает с тем, что дает одномерный расчет изменения скорости ударной волны по распаду разрыва. Таким образом, при  $T \ll 1$

$$k\xi(T) = \frac{\psi_0 \sqrt{h}}{\sqrt{h+1}+2} T + O(T^3) \quad (1.22)$$

так как вторая и вообще все четные производные в начальный момент равны нулю. Рассмотрим теперь асимптотическое поведение  $\xi(T)$ .

При  $T \gg 1$  основной вклад в интеграл (1.20) дадут точки  $x = 0$  и  $x = 1$ . Заменяя, где это возможно,  $x$  нулем или единицей, запишем

$$k\xi(T \gg 1) = \frac{2}{\pi} \kappa \psi_0 \left\{ \int_0^1 \sin Tx \frac{dx}{x} + \frac{h+1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \sin(Tx) \sqrt{1-x} dx \right\}$$

Первое слагаемое в скобках при  $T \rightarrow \infty$  стремится к постоянному пределу  $1/2\pi$ . Во втором слагаемом в качестве нижнего предела интегрирования можно взять  $x = -\infty$ . Тогда, вводя обрезкающий множитель, получаем

$$\int_{-\infty}^1 \sin(Tx) \sqrt{1-x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^1 e^{\alpha x} \sin(Tx) \sqrt{1-x} dx = -\frac{\sqrt{\pi} \sin(T+\pi/4)}{2 T^{3/2}} \quad (1.23)$$

Таким образом, функция, определяемая формулой (1.20), стремится к постоянному пределу  $\kappa\psi_0$ , что находится в полном соответствии с (1.10).

Нетрудно обобщить формулу (1.20) на случай, когда  $\psi(T > 0)$  не равна постоянной. Для этого заметим, что если постоянное, равное  $\psi_0$ , относительное возмущение плотности начинается с некоторого момента  $T' > 0$ , то амплитуду смещения фронта  $\xi(T)$  можно получить из (1.20) заменой  $T$  на  $T - T'$

$$k\xi(T < T') = 0$$

$$k\xi(T > T') = \frac{2}{\pi} \kappa \psi_0 \int_0^1 \sin[(T - T')x] \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{xq(x)} \quad (1.24)$$

Если постоянное, равное  $\psi(T')$ , значение  $\psi(T)$  сохраняется лишь в интервале  $T' < T < T' + \Delta T'$ , а вне его  $\psi(T) = 0$ , то в этом случае для  $T < T' + \Delta T'$  функция  $k\xi(T)$  определяется (1.24), где  $\psi_0$  нужно заменить на  $\psi(T')$ , а для  $T > T' + \Delta T'$

$$k\xi(T) = \frac{2}{\pi} \kappa \psi(T') \int_0^1 [\sin(T - T')x - \sin(T - T' - \Delta T')x] \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{xq(x)} \quad (1.25)$$

Наконец, устремляя  $\Delta T'$  к нулю и пользуясь принципом суперпозиции, в случае, когда  $\psi(T)$  произвольная функция, находим

$$k\xi(T) = \frac{2}{\pi} \times \int_{-\infty}^T \psi(T') dT' \int_0^1 \cos[(T-T')x] \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{q(x)}$$

2. Рассмотрим теперь следующую задачу. В момент  $t = 0$  твердый плоский поршень начинает двигаться со скоростью  $U$  по холодному (начальное давление  $p_0 = 0$ ) идеальному газу, относительно которого скорость ударной волны равна  $D$ . Скорость волны относительно поршня обозначим через  $V$ , так что  $D = U + V$ . Метод решения и обозначения взяты из [2]. Пусть  $\rho_0$  — начальная плотность газа,  $\rho$ ,  $c$  — плотность и скорость звука сжатого газа. Тогда

$$\frac{\rho}{\rho_0} = h, \quad V = \frac{D}{h}, \quad \beta^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \frac{1}{h+1} \quad \left(h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \quad (2.1)$$

Рассмотрим, какое влияние на движение ударной волны, толкаемой поршнем, оказывает начальная разнородность вещества. Возмущенную часть плотности запишем в виде

$$\rho_0'(X, Y) = \rho_0 \psi(X) \exp(ikY) \quad (2.2)$$

Используем систему координат, в которой плоскость  $YZ$  совпадает с поршнем, а ось  $X$  направлена по движению поршня. В области  $0 < X < Vt$  для возмущений имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho c^2 \left( \frac{\partial v_x'}{\partial X} + \frac{\partial v_y'}{\partial Y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_x'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial X} &= 0, \quad \frac{\partial v_y'}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условие адиабатичности имеет вид

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (2.4)$$

На поверхности поршня имеем

$$v_x' = 0, \quad \frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \quad X = 0 \quad (2.5)$$

Отклонение фронта волны от плоскости  $X = Vt$  обозначим  $\xi(Y, t)$ , причем  $\xi > 0$ , если смещение направлено от поршня. На фронте волны должны выполняться условия

$$v_y' = -U \frac{\partial \xi}{\partial Y}, \quad v_x' = \frac{h-1}{h} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad p' = \rho_0 DU + 2\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad X = Vt \quad (2.6)$$

Первое из этих соотношений дифференцируем по времени вдоль линии  $X = Vt$ , а третье — по  $Y$ . Используя также последнее уравнение системы (2.3), исключим  $\xi(Y, t)$  из граничных условий

$$p' = \rho_0' DU + 2\rho_0 Dv_x' \quad (2.7)$$

$$V \frac{\partial v_y'}{\partial X} = \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho_0} \right) \frac{\partial p'}{\partial Y} + \frac{DU}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0'}{\partial Y}, \quad X = Vt$$

Начальные условия вытекают из того, что в момент  $t = 0$  фронт ударной волны совпадает с поверхностью поршня, на которой всегда  $v_x' = 0$ . Поэтому

$$p' = 2U\rho_0'(X=0, Y), \quad v_x' = v_y' = \xi = 0, \quad t = 0 \quad (2.8)$$

Поскольку, кроме переменной плотности (2.2), иных возмущающих течение факторов нет, то зависимость всех величин от  $Y$  определяется множителем  $\exp(ikY)$ , который в дальнейшем для краткости опускаем. Вводим обозначения

$$\frac{p'}{\rho c} = w, \quad v_x' = u, \quad v_y' = -iv, \quad kX = x, \quad kct = y \quad (2.9)$$

Задача сводится к решению системы

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} + v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - w = 0 \quad (2.10)$$

Функция  $w(x, y)$  удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = 0 \quad (2.11)$$

Граничные и начальные условия:

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0 \quad (2.12)$$

$$v = Uk\xi, \quad u = Aw - 1/2 U\psi, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Bw - \frac{h}{2} U\psi, \quad x = \beta y \quad (2.13)$$

$$u = v = \xi = 0, \quad w = \beta U\psi(0), \quad x = y = 0 \quad (2.14)$$

где

$$A = 1 / (2\beta), \quad B = A(h - 2), \quad \psi = \psi(X = Vt)$$

Вводя новые переменные

$$y = r \operatorname{ch} \theta, \quad x = r \operatorname{sh} \theta; \quad r = \sqrt{y^2 - x^2}, \quad \operatorname{th} \theta = x / y \quad (2.15)$$

вместо (2.10) и (2.11) получим

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \operatorname{ch} \theta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \operatorname{sh} \theta = 0 \quad (2.16)$$

$$\operatorname{ch} \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\operatorname{sh} \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w = 0 \quad (2.17)$$

Линии  $x = 0$  соответствует  $\theta = 0$ , линии  $x = \beta y$  соответствует  $\theta = \theta_0$ , причем  $\operatorname{th} \theta_0 = \beta$ . В новых переменных краевые и начальные условия запишутся так:

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.18)$$

$$u = Aw - 1/2 U\psi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = (B \operatorname{sh} \theta_0 + \operatorname{ch} \theta_0) w - \frac{h}{2} \operatorname{sh} \theta_0 U\psi, \quad \theta = \theta_0 \quad (2.19)$$

$$u = v = 0, \quad w = \beta U\psi(0), \quad r = 0 \quad (2.20)$$

В формулах (2.19)  $\psi$  — известная функция переменной  $r$ .

Воспользуемся теперь преобразованием Лапласа по переменной  $r$ , т. е. от оригинала  $f(r, \theta)$  перейдем к изображению  $f_1(p, \theta)$  по формуле

$$f_1(p, \theta) = \int_0^{\infty} f(r, \theta) e^{-pr} dr \quad (2.21)$$

Система уравнений и краевых условий для изображений такова:

$$\frac{\partial}{\partial p}(pw_1) - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \operatorname{ch} \theta \frac{\partial v_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p}(pu_1) - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + \operatorname{sh} \theta \frac{\partial v_1}{\partial p} = 0 \quad (2.22)$$

$$\operatorname{ch} \theta \frac{\partial}{\partial p}(pv_1) + \operatorname{sh} \theta \frac{\partial v_1}{\partial \theta} - \frac{\partial w_1}{\partial p} = 0, \quad (p^2 + 1) \frac{\partial^2 w_1}{\partial p^2} + 3p \frac{\partial w_1}{\partial p} + w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.23)$$

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.24)$$

$$u_1 = Aw_1 - 1/2 U\psi_1, \quad pv_1 = (B \operatorname{sh} \theta_0 + \operatorname{ch} \theta_0) w_1 - \frac{h}{2} \operatorname{sh} \theta_0 U\psi_1, \quad \theta = \theta_0 \quad (2.25)$$

Кроме того, для всех изображений должно быть

$$f_1(p, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty \quad (2.26)$$

Подстановка

$$p = \operatorname{sh} q, \quad w_1(p, \theta) = w_2(q, \theta) / \operatorname{ch} q \quad (2.27)$$

преобразует (2.23) к виду

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.28)$$

Решением этого уравнения при условии (2.24) будет

$$w_2(q, \theta) = F(q + \theta) + F(q - \theta) \quad (2.29)$$

где  $F(q)$  — произвольная функция. Подставляя (2.29) во второе уравнение системы (2.22), получим

$$p u_1 - [F(q + \theta) - F(q - \theta)] + \operatorname{sh} \theta v_1 = 0 \quad (2.30)$$

При этом мы воспользовались условием (2.26), а также тем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p u_1 &= \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} q u_1 = u(0) = 0 \\ \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p w_1 &= \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty} \operatorname{th} q w_2 = 2F(\infty) = w(0) = \beta U \psi(0) \end{aligned} \quad (2.31)^\dagger$$

Положим в (2.30)  $\theta = \theta_0$ . Используя (2.25), найдем, что  $F(q)$  удовлетворяет следующему уравнению в конечных разностях:

$$A \operatorname{ch} q [F(q + \theta_0) + F(q - \theta_0)] - \operatorname{sh} q [F(q + \theta_0) - F(q - \theta_0)] = \frac{1}{2} U \operatorname{ch}^2 q \psi_1 \quad (2.32)^\dagger$$

Ограничимся частным случаем, когда, начиная от самого поршня, амплитуда переменной части плотности не зависит от координаты  $X$ , т. е. в (2.2)  $\psi(X) = \operatorname{const} = \psi_0$ . Тогда, согласно (2.21),  $\psi_1(p) = \psi_0 / p = \psi_0 / \operatorname{sh} q$ . Уравнение (2.32) в этом случае примет вид

$$A \operatorname{sh} 2q [F(q + \theta_0) + F(q - \theta_0)] - (\operatorname{ch} 2q - 1) [F(q + \theta_0) - F(q - \theta_0)] = \frac{\psi_0}{2} U (\operatorname{ch} 2q + 1)$$

Единственность решения обеспечивается тем, что решение однородного уравнения неограниченно растет при  $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$ . Частное решение, ограниченное при  $\operatorname{Re} q \rightarrow +\infty$ , ищем в виде

$$F(q) = U \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-2nq) \quad (2.34)$$

Подставляя в (2.33), для величин  $B_n = 2A_n \operatorname{ch} 2n\theta_0$  получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} B_0 &= \beta \psi_0, \quad B_1 = B_0 \frac{2A}{A + \operatorname{th} 2\theta_0}, \quad B_2 = B_1 \frac{A + 3 \operatorname{th} \theta_0}{A + \operatorname{th} 4\theta_0} \\ [A + \operatorname{th} 2(n+1)\theta_0] B_{n+1} + [A - \operatorname{th} 2n\theta_0] B_n &= \\ = [A + \operatorname{th} 2n\theta_0] B_n + [A - \operatorname{th} 2(n-1)\theta_0] B_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Левая часть последнего равенства отличается от правой лишь заменой  $n \rightarrow n + 1$ . Это позволяет понизить порядок

$$[A + \operatorname{th} 2(n+1)\theta_0] B_{n+1} + [A - \operatorname{th} 2n\theta_0] B_n = 4A B_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.36)$$

Как видно из (2.29) и (2.34)

$$w_2(q, \theta_0) = U \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(-2nq) \quad (2.37)$$

Переходим к оригиналу так же, как в [2]

$$w(r, \theta_0) = U \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_{2n}(T) \quad (2.38)$$

Аргумент  $T$  у функций Бесселя имеет тот же смысл, что и в (1.16)

$$T = r|_{\theta=0} = \sqrt{y^2 - x^2}|_{x=\beta y} = y\sqrt{1 - \beta^2} = \frac{kDt}{\sqrt{h}} = kL \quad (2.39)$$

Выделим в решении (2.38) постоянное слагаемое  $UB_0$  и применим известное соотношение

$$J_0(T) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(T) = 1 \quad (2.40)$$

Тогда получим

$$w(r, \theta_0) = U \left\{ B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_{2n}(T) \right\} \quad (2.41)$$

где  $C_n = B_n - 2B_0$ , так что

$$C_1 = -B_0 \frac{2 \operatorname{th} 2\theta_0}{A + \operatorname{th} 2\theta_0} \quad (2.42)$$

$$[A + \operatorname{th} 2(n+1)\theta_0]C_{n+1} + [A - \operatorname{th} 2n\theta_0]C_n = -2B_0[\operatorname{th} 2(n+1)\theta_0 - \operatorname{th} 2n\theta_0] \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Подставим теперь (2.41) в (2.19) и проинтегрируем

$$\frac{v(r, \theta_0)}{U} = k\xi(T) = \frac{1}{2} \sqrt{h(h+1)} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^T J_{2n}(x) dx \quad (2.43)$$

Так как

$$\int_0^{\infty} J_n(x) dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.44)$$

то предельное значение

$$k\xi(T \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \sqrt{h(h+1)} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \quad (2.45)$$

Нетрудно убедиться, что  $C_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Просуммируем теперь в (2.42) по индексу от единицы до  $n$

$$2A \sum_{k=1}^n C_k = -2B_0 \operatorname{th} 2(n+1)\theta_0 - [A + \operatorname{th} 2(n+1)\theta_0] C_{n+1} \quad (2.46)$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = -\frac{2\psi_0}{h+1} \quad (2.47)$$

Подставляя в (2.43), получим

$$k\xi(T \rightarrow \infty) = -k\psi_0 \quad (2.48)$$

который отличается от (1.10) лишь знаком: это объясняется обратной ориентацией оси  $X$ . Выражение (2.43) можно существенно упростить, если применить формулу

$$\int_0^T J_{2n}(x) dx = \int_0^T J_0(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n J_{2k-1}(T) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.49)$$

Подставляя в (2.43) и меняя порядок суммирования, получим с учетом (2.47) и (2.48)

$$\Phi(T) = \frac{\xi(T)}{\xi(\infty)} = \int_0^T J_0(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_{2n-1}(T) \quad (2.50)$$



где коэффициенты

$$D_n = \frac{h+1}{\psi_0} \sum_{k=n}^{\infty} C_k \quad (2.51)$$

определяются из соотношений

$$D_1 = -2 \\ (A + \text{th } 2n\theta_0)D_{n+1} + (A - \text{th } 2n\theta_0)D_n = -4A(1 - \text{th } 2n\theta_0) \quad (2.52)$$

Из (2.43) следует, что  $d\xi/dT = 0$  при  $T = 0$ . Физически это объясняется тем, что в самом начале движения поршня взаимодействием отдельных участков фронта можно пренебречь (справедливо так называемое секторное приближение). Но скорость ударной волны в холодном идеальном газе пропорциональна скорости поршня. Поэтому в секторном приближении получилось бы, что фронт ударной волны не искривляется. В п. 1 взаимодействие разных участков фронта ограничивает смещение фронта предельным значением (1.10).

В данном же случае именно этим взаимодействием объясняется искривление фронта также и в начальной стадии движения.

Теперь кратко рассмотрим задачу, когда ударная волна в холодном идеальном газе с начальной разнородностью (2.2) возникает под действием соседнего невесомого газа, в котором, начиная с момента  $t = 0$ , поддерживается постоянное давление  $p$ . Скорость движения границы раздела

$$U = \left( \frac{h-1}{h} \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (2.53)$$

В невесомом газе возмущения давления отсутствуют, поэтому вместо (2.5) имеем условие

$$p' = 0, \quad X = 0 \quad (2.54)$$

Начальные условия в отличие от (2.8) примут теперь вид

$$\xi = p' = v_y' = 0, \quad v_x' = -1/2 U \psi(0), \quad t = 0 \quad (2.55)$$

Вместо (2.29) для функции  $w_2(q, \theta)$  получим формулу

$$w_2(q, \theta) = F(q + \theta) - F(q - \theta) \quad (2.56)$$

Если к  $F(q)$  добавить постоянное слагаемое, то  $w_2(q, \theta)$ , очевидно, не изменится. Поэтому можно считать, что  $F(q) \rightarrow 0$  при  $\text{Re } q \rightarrow +\infty$ . Аналогично (2.30) получим соотношение

$$p u_1 - [F(q + \theta) + F(q - \theta)] + \text{sh } \theta v_1 = -1/2 U \psi(0) \quad (2.57)$$

Положив здесь  $\theta = \theta_0$ , при помощи (2.25) получим для  $F(q)$  уравнение

$$A \text{ch } q [F(q + \theta_0) - F(q - \theta_0)] - \text{sh } q [F(q + \theta_0) + F(q - \theta_0)] = \\ = 1/2 U [\psi_1 \text{ch}^2 q - \psi(0) \text{sh } q] \quad (2.58)$$

В частном случае, когда

$$\psi(X) = \text{const} = \psi_0,$$

принимает вид

$$A \text{sh } 2q [F(q + \theta_0) - F(q - \theta_0)] - (\text{ch } 2q - 1) [F(q + \theta_0) + F(q - \theta_0)] = U \psi_0 \quad (2.59)$$

Решение, исчезающее при  $\text{Re } q \rightarrow +\infty$ , опять ищем в виде (2.34), причем для величин  $B_n = -2A_n \text{sh } 2n\theta_0$  получаются соотношения

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \frac{2\psi_0}{A + \text{cth } 2\theta_0}, \quad B_2 = 2B_1 \frac{\text{cth } 2\theta_0}{A + \text{cth } 4\theta_0} \\ [A + \text{cth } 2(n+1)\theta_0] B_{n+1} - 2 \text{cth } 2n\theta_0 B_n + [\text{cth } 2(n-1)\theta_0 - A] B_{n-1} = 0 \\ (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (2.60)$$

Как и ранее, можно понизить порядок этого уравнения

$$[A + \text{cth } 2n\theta_0] B_n + [A - \text{cth } 2(n-1)\theta_0] B_{n-1} = 2\psi_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.61)$$

Формулы (2.37) и (2.38) сохраняют свой вид. Затем при помощи (2.19), (2.40) и (2.55) получаем

$$k\xi(T) = \frac{1}{2} \sqrt{h(h+1)} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^T J_{2n}(x) dx \quad (2.62)$$

где  $C_0 = -\beta\psi_0$ ,  $C_n = B_n - 2\beta\psi_0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), так что

$$C_1 = 2\beta\psi_0 \frac{1 - 2\beta \operatorname{cth} 2\theta_0}{1 + 2\beta \operatorname{cth} 2\theta_0} \quad (2.63)$$

$$[A + \operatorname{cth} 2n\theta_0]C_n + [A - \operatorname{cth} 2(n-1)\theta_0]C_{n-1} = 2\beta\psi_0[\operatorname{cth} 2(n-1)\theta_0 - \operatorname{cth} 2n\theta_0] \\ (n = 2, 3, 4, \dots)$$

Очевидно, что  $C_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Суммируя по индексу, найдем

$$2A \sum_{k=0}^{n-1} C_k = -2\beta\psi_0 \operatorname{cth} 2n\theta_0 - (A + \operatorname{cth} 2n\theta_0)C_n \quad (2.64)$$

Отсюда следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = -\frac{2\psi_0}{h+1} \quad (2.65)$$

Соотношения (2.62), (2.44) и (2.65) вновь приводят к (2.48). Формула (2.50) для  $\varphi(T)$  остается справедливой, но коэффициенты  $D_n$ , выражающиеся через  $C_n$ , согласно (2.51), теперь находятся из соотношений

$$D_1 = \sqrt{h+1} - 2 \\ (A + \operatorname{cth} 2n\theta_0)D_{n+1} + (A - \operatorname{cth} 2n\theta_0)D_n = 4A(\operatorname{cth} 2n\theta_0 - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.66)$$

Из (2.62) получаем  $d\xi/dt = -1/2 D\psi_0$ ,  $t = 0$ , что в точности соответствует изменению скорости ударной волны вследствие изменения начальной плотности вещества при условии, если давление за фронтом волны неизменно.

Найдем форму границы раздела. Второе уравнение в системе (2.16) при  $\theta = 0$  дает

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad r(\theta = 0) = y = kct \quad (2.67)$$

Для произвольных  $r, \theta$  имеем

$$w(r, \theta) = U \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh} 2n\theta}{\operatorname{sh} 2n\theta_0} J_{2n}(r) \quad (2.68)$$

Подставим в (2.67) и проинтегрируем с начальным условием (2.55)

$$u(y) = -U \left\{ \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nB_n}{\operatorname{sh} 2n\theta_0} \int_0^y \frac{J_{2n}(x)}{x} dx \right\} \quad (2.69)$$

Пусть  $a(t) \exp(ikY)$  — отклонение границы от плоскости  $X = 0$ . Тогда, очевидно,  $da/dt = u(r, \theta = 0) = u(y)$ , при помощи формулы

$$\frac{2n}{x} J_{2n}(x) = J_{2n-1}(x) + J_{2n+1}(x) \quad (2.70)$$

Запишем

$$\frac{d(ka)}{dy} = -\frac{U}{c} \left\{ \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\operatorname{sh} 2n\theta_0} \left[ \int_0^y J_{2n-1}(x) dx + \int_0^y J_{2n+1}(x) dx \right] \right\} \quad (2.71)$$

Введем более удобные величины

$$Q_n = \frac{B_n}{\psi_0 \operatorname{sh} 2n\theta_0} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.72)$$

которые не зависят от  $\varphi_0$ . Если условиться, что  $Q_0 = 0$ , то из (2.61) получим

$$[A \operatorname{sh} 2n\theta_0 + \operatorname{ch} 2n\theta_0]Q_n + [A \operatorname{sh} 2(n-1)\theta_0 - \operatorname{ch} 2(n-1)\theta_0]Q_{n-1} = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.73)$$

При  $y \rightarrow \infty$  при помощи (2.44) найдем

$$\frac{d(ka)}{dy} = -Q\varphi_0, \quad Q = 2\beta(h-1) \left( \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \quad (2.74)$$

Это означает, что амплитуда искривления границы раздела неограниченно возрастает. При  $t \rightarrow \infty$  этот рост происходит по линейному закону. Постоянная  $Q$  обычно положительна, т. е. на участках с повышенной плотностью граница отстает.

Получило 20.III.1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М. Развитие возмущений в плоских ударных волнах. ПМТФ, 1967, № 4.
2. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.

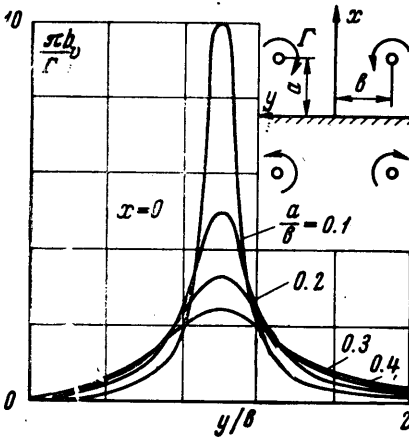
### ВИХРИ ЗА ГОЛОВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Г. И. МАЙКАПАР

(Москва)

Получено выражение для составляющей вихря за головной ударной волной, направленной по вектору скорости. В тех случаях, когда вихри сосредоточены в окрестности максимума они эквивалентны дискретным вихрям и могут быть причиной появления максимумов теплового потока на поверхности тела.

1. В опытах [1] обнаружены резкие максимумы теплового потока на поверхности моделей несущих тел в потоке газа, не связанные с непосредственным взаимодействием скачков уплотнения и пограничного слоя или взаимодействием скачков уплотнения. В случае притупленного полуконуса, рассмотренном в [1], причиной появления этих максимумов является отрыв потока, однако представляется вероятной причиной также наличие за головной ударной волной вихрей, близких к дискретным. Такие вихри могут также управлять срывными явлениями и вызывать их. Вихри за головной ударной волной не обладают свойством сохраняемости, но как и всегда являются характеристикой внутреннего вращения газа. В случаях осесимметричного или плоского течения отлична от нуля только нормальная к вектору скорости составляющая вихря, эта составляющая характеризует распределение скорости поперек ударного слоя. Если же течение трехмерное, то отлична от нуля также и составляющая вихря, направленная по вектору скорости, именно эта составляющая характеризует поперечное течение, которое может вызвать местное утоньшение пограничного слоя и появление максимума теплового потока.



Фиг. 1

Вихрь обращается в нуль в точке, где ударная волна является прямой и на линии перехода ее в характеристику, поэтому максимальной величины вихрь достигает где-то в промежутке [2] и если при этом вихри сосредоточены в окрестности максимума, то их действие эквивалентно дискретному вихрю.

Величину вихря можно вычислить по форме головной волны, последняя тем ближе к поверхности тела, чем больше число  $M$ , следовательно, вихрь может дать представление об особенностях течения в тех случаях, когда нет полного расчета.