

О ТЕЧЕНИЯХ С ДОЗВУКОВОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Э. Г. ШИФРИН (Москва)

Рассматриваются некоторые примеры плоских и осесимметричных вихревых течений идеального газа в окрестности особой точки ударной волны (в которой ее кривизна обращается в нуль или бесконечность), когда эта точка принадлежит области дозвуковых скоростей.

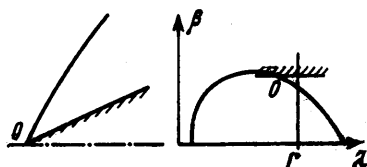
1. Дозвуковое течение в окрестности носика клина за присоединенной ударной волной изучалось К. Г. Гудерлеем [1] (см. также [2], стр. 162—166) в предположении потенциальности течения (т. е. в диапазоне малых сверхзвуковых скоростей набегающего потока). Это решение допускает обобщение на случай вихревого течения.

Рассмотрим плоское течение идеального газа за ударной волной, возникающей в равномерном сверхзвуковом потоке. Уравнения вихря и неразрывности вместе с двумя полными производными вдоль ударной волны от составляющих скорости u, v могут быть представлены на ударной волне в виде

$$u_x - v_y = F_1 \frac{d\sigma}{dx} \quad (1.1)$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) u_x - \frac{uv}{c^2} (u_y + v_x) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) v_y = 0$$

$$u_x + u_y \operatorname{tg} \sigma = F_2 \frac{d\sigma}{dx}, \quad v_x + v_y \operatorname{tg} \sigma = F_3 \frac{d\sigma}{dx}$$



Фиг. 1

Здесь σ — угол наклона ударной волны к вектору скорости набегающего потока, выражения $F_i = F_i(\sigma, M_\infty, k)$, $i = 1, 2, 3$, приведены в работе [3]; M_∞ — число Маха набегающего потока; k — показатель адиабаты; ось абсциссов совмещена с вектором скорости набегающего потока. Обозначим, кроме того, λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости, $\partial/\partial s_1$ — производную вдоль линии тока, S — энтропию, R — газовую постоянную.

В каждой точке ударной волны, в которой ее кривизна ограничена и не равна нулю, можно определить углы наклона в физической плоскости линий $\lambda = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ и т. д., разрешая (1.1) относительно производных u_x, u_y, v_x, v_y и подставляя полученные выражения в соответствующие формулы. В связи с тем, что правая часть (1) пропорциональна $d\sigma/dx$, производные также пропорциональны $d\sigma/dx$, и поэтому углы наклона этих линий, в выражениях для которых входят только отношения производных, не зависят от кривизны ударной волны [3]. Аналогично, отношение $(\partial\beta/\partial s_1) : (\partial\lambda/\partial s_1) = \operatorname{tg} \nu$ производных вдоль линии тока на ударной волне зависит только от положения соответствующей точки на ударной волне; здесь ν — угол наклона на ударной волне образа линии ток к оси $\beta = 0$ в плоскости $\lambda\beta$. Это означает, что для функции тока на ударной волне имеет место граничное условие $\partial\psi/\partial l = 0$, где направление дифференцирования определяется углом ν . Граничное условие этого вида в диапазоне малых сверхзвуковых скоростей набегающего потока было получено Ф. И. Франклем [4] и К. Г. Гудерлеем [1] ([2], стр. 145).

Дозвуковое течение за присоединенной ударной волной имеет особую точку в носике клина. Действительно, регулярное решение здесь не существует, так как в противном случае граничное условие $\partial\psi/\partial l = 0$ в точке ударной волны, изображающей носик клина, в общем случае противоречило бы граничному условию вдоль стенки клина $\psi = 0$ при $\beta = \beta_0$. Исключением здесь является только «точка Крокко» ударной волны, в которой $\nu = 0$. Соответственно этому, в физической плоскости угол наклона линии $\beta = \text{const}$, определяемый вышеуказанным способом в точке присоединения ударной волны, в общем случае не совпадает с углом наклона клина.

Поместим точку O — носик клина — в начало криволинейной системы координат, линиями которой являются линии тока $\psi = \text{const}$ и их ортогональные траектории $\varphi = \text{const}$. Уравнения вихря и неразрывности можно представить в виде

$$\frac{H}{h} \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial\psi} + \frac{1}{kRM^2} \frac{dS}{d\psi}, \quad (M^2 - 1) \frac{\partial \ln \lambda}{\partial\varphi} = \frac{h}{H} \frac{\partial\beta}{\partial\psi} + h \sin \beta \frac{N}{y} \quad (1.2)$$

$$h\lambda \exp \int \frac{dS}{kRM^2} = \Phi(\varphi), \quad y^N q(\lambda) H = F(\varphi), \quad q(\lambda) = \lambda \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \lambda^2 \right)^{1/(k-1)}$$

Здесь $N = 0$ в плоском течении, $N = 1$ в осесимметричном течении. Произвольные функции выберем так, чтобы на ударной волне было $h = H = 1$.

Следуя [1], будем предполагать, что кривизна ударной волны в окрестности точки O выражается в виде $\kappa = O(s^{m-1})$, где s — длина дуги ударной волны (из ограниченности угла наклона ударной волны следует, что $m > 0$) и что

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon^m \lambda_*(\varphi_*, \psi_*), & \psi &= \varepsilon \psi_*, & S &= S_0 + \varepsilon^m S_*(\psi_*) \\ \beta &= \beta_0 + \varepsilon^m \beta_*(\varphi_*, \psi_*), & \varphi &= \varepsilon \varphi_* \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий размер окрестности точки O , индекс O отмечены значения в точке O .

Подставляя при $N = 0$ (1.3) в (1.2) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим (индекс * будем далее опускать)

$$\beta_\varphi = \frac{1}{\lambda_0} \lambda_\psi + \frac{1}{kRM_0^2} S_\psi, \quad \beta_\psi = \frac{M_0^2 - 1}{\lambda_0} \lambda_\varphi \quad (1.4)$$

Граничное условие на ударной волне, упрощенное в окрестности точки O , можно представить в форме

$$\beta_\varphi = \lambda_\varphi \operatorname{tg} \nu_0 = \frac{\lambda_0}{M_0^2 - 1} \beta_\psi \operatorname{tg} \nu_0 \quad \text{при } \psi = \varphi \operatorname{tg}(\sigma_0 - \beta_0) \quad (1.5)$$

или в форме

$$\beta = \lambda \operatorname{tg} \mu_0 \quad \text{при } \psi = \varphi \operatorname{tg}(\sigma_0 - \beta_0) \quad (1.6)$$

Здесь μ_0 — угол наклона ударной поляры в плоскости $\lambda\beta$ к оси $\beta = 0$ в рассматриваемой точке.

Решение системы (1.4), удовлетворяющее граничному условию на клине, берем в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 \left[1 - \frac{Br^m \cos m\theta}{(1 - M_0^2)^{1/2}} - \frac{S - S_0}{kRM_0^2} \right], & \operatorname{tg} \theta &= (1 - M_0^2)^{1/2} \frac{\psi}{\varphi} \\ \beta &= \beta_0 + Br^m \sin m\theta, & r^2 &= \varphi^2 + (1 - M_0^2) \psi^2 \end{aligned}$$

Для определения показателя m используем граничное условие на ударной волне, причем в зависимости от формы записи — (1.5) или (1.6) — получаются различные интерпретации для m , что оказывается полезным для анализа. Так, если взять граничное условие в форме (1.5), то

$$m = 1 - \frac{1}{\vartheta} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\lambda_0}{(1 - M_0^2)^{1/2}} \operatorname{tg} \nu_0 \right], \quad \vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[(1 - M_0^2)^{1/2} \operatorname{tg}(\sigma_0 - \beta_0) \right] \quad (1.7)$$

а если в форме (1.6), то

$$m = -\frac{1}{\vartheta} \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} \left\{ \frac{(1 - M_0^2)^{1/2}}{\lambda_0} \operatorname{ctg} \mu_0 \left[1 + \frac{\lambda_0}{kRM_0^2} \left(\frac{dS}{d\lambda} \right)_0 \right] \right\} \quad (1.8)$$

При получении последней формулы использовалось упрощенное в окрестности точки O выражение для энтропии, вычисляемой вдоль ударной волны

$$S = \beta \left(\frac{dS}{d\lambda} \right)_0 \left(\frac{d\lambda}{d\beta} \right)_0 = Br^m \sin m\vartheta \operatorname{ctg} \mu_0 \left(\frac{dS}{d\lambda} \right)_0$$

Формулы (1.7), (1.8) многозначны. Ввиду неотрицательности показателя m , в качестве главной его ветви выберем ту, что дает минимально возможные значения. Из формулы (1.7) следует, что значение $m = 1$, соответствующее регулярному решению, может достигаться только в точке Крюкова ударной поляры, на главной ветви значений m . Если перемещать точку O вдоль ударной поляры по направлению к звуковой точке, то из формул (1.7), (1.8) следует, что $m \rightarrow \infty$. Если же перемещать точку O по направлению к точке максимального отклонения вектора скорости (на ударной поляре), то, как следует из (1.8), главное значение m будет стремиться либо к нулю (при $kRM_0^2 > \lambda_0 (dS/d\lambda)_0$), либо к отличному от нуля значению (в противоположном случае). Первый случай имеет место при достаточных малых скоростях набегающего потока, второй — при достаточно больших ($S \rightarrow 0$ при $M_\infty \rightarrow 1$, $S \rightarrow \infty$ при $M_\infty \rightarrow \infty$). Таким образом, качественно влияние завихренности на величину m сказывается в основном только при расположении точки O вблизи точки максимального отклонения вектора скорости.

Заметим, что окончательный выбор показателя m и множителя B (который в локальной задаче, ввиду отсутствия характерного размера, несуществен) может быть сделан только при исследовании «в целом» той задачи, в которой возникает особенность.

Полученное решение описывает также течение в окрестности точки ортогональности ударной волны оси симметрии. Из формулы (1.8) получим, что m может принимать только значения 1, 3, 5, ... Это доказывает, что уравнение отпавшей ударной волны в окрестности этой точки не может быть записано в виде $x = K|y|^n + \dots$, где n не является четным числом.

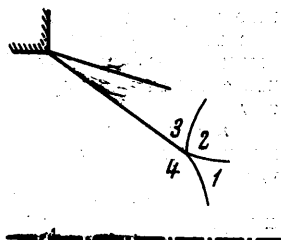
2. Рассмотрим течение в окрестности точки пересечения трех ударных волн в случае, когда поток по обе стороны тангенциального разрыва, исходящего из этой точки, является дозвуковым. При определенном соотношении параметров такая точка возникает в сверхзвуковой струе, истекающей в область повышенного давления (точка O на фиг. 2). Ударные волны и тангенциальный разрыв разбивают окрестность точки O на четыре области. Обозначим их индексами 1—4 как показано на фиг. 2.

Аналогично вышеизложенному, течение в окрестности точки O в областях 1, 2 описывается выражениями

$$\lambda_i = \lambda_{0i} \left[1 - \frac{B_i r_i^{m_i} \cos m_i (\theta_i - \gamma_i)}{(1 - M_{0i})^{1/2}} - \frac{S_i - S_{0i}}{k R M_{0i}^2} \right] \quad (2.1)$$

$$\beta = \beta_{0i} + B_i r_i^{m_i} \sin m_i (\theta_i - \gamma_i)$$

$$r_i^2 = \varphi^2 + (1 - M_{0i}^2) \psi^2, \quad \operatorname{tg} \theta_i = (1 - M_{0i}^2)^{1/2} \psi / \varphi$$



Фиг. 2

Легко убедиться, что используя соотношения на всех скачках уплотнения и тангенциальном разрыве в «первом» приближении (пренебрегая в (2.1) членами порядка r^m), можно определить постоянные β_{0i} , λ_{0i} . Для определения постоянных B_i , m_i , γ_i снова используются, уже с учетом членов порядка r^m , соотношения на тангенциальном разрыве и скачках уплотнения, ограничивающих области 1, 2.

На тангенциальном разрыве (при $\theta_i = 0$) имеем $\beta_1 = \beta_2$, $p_1 = p_2$ (p — давление). Отсюда получим

$$m_1 = m_2 = m, \quad B_1 \sin m \gamma_1 = B_2 \sin m \gamma_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{p_{01} \varepsilon(\lambda_{01}) \lambda_{01}^2}{(1 - M_{01}^2)^{1/2}} \operatorname{ctg} m \gamma_1 = \frac{p_{02} \varepsilon(\lambda_{02}) \lambda_{02}^2}{(1 - M_{02}^2)^{1/2}} \operatorname{ctg} m \gamma_2 \quad (2.3)$$

$$\varepsilon(\lambda) = [1 - \lambda^2(k-1)/(k+1)]^{1/(k-1)}$$

Здесь p_{0i} — полные давления в точке O .

Соотношения на ударных волнах, взятые в форме (1.6), дают

$$\operatorname{ctg} m (\theta_i - \gamma_i) = - \left[1 + \frac{\lambda_{0i}}{k R M_{0i}^2} \left(\frac{dS}{d\lambda} \right)_{0i} \right] \frac{(1 - M_{0i}^2)^{1/2}}{\lambda_{0i}} \operatorname{ctg} \mu_{0i} = a_i \quad (2.4)$$

Так как величины β_{0i} , λ_{0i} можно считать известными, фигурирующие здесь постоянные θ_i , μ_{0i} , $(dS/d\lambda)_{0i}$ могут быть вычислены с помощью соотношений на скачках уплотнения. Из (2.3), (2.4) можно получить уравнение для определения m

$$\frac{p_{01} \varepsilon(\lambda_{01}) \lambda_{01}^2}{p_{02} \varepsilon(\lambda_{02}) \lambda_{02}^2} \left(\frac{1 - M_{02}^2}{1 - M_{01}^2} \right)^{1/2} \operatorname{ctg} (m \theta_1 - \alpha_1) = \operatorname{ctg} (m \theta_2 - \alpha_2), \quad \alpha_i = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a_i$$

Легко видеть, что при $\theta_1 \neq \theta_2$ это уравнение имеет счетное множество положительных корней. При $\theta_1 = \theta_2$ ограниченных решений может и не быть.

Зная m , из (2.4) можно найти γ_i , а затем из (2.2) — B_1/B_2 .

Таким образом, в этой задаче, так же как и в предыдущей, окончательный выбор показателя m и множителей B_i может быть сделан только при решении задачи в целом.

3. В классе осесимметричных течений можно получить аналогичные результаты. Пусть особая точка лежит вне оси симметрии.

Подставляя (1.3) при $N = 1$ в (1.2) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, учитывая, что $y = y_0 + O(\varepsilon)$

$$\beta_\varphi = \frac{1}{\lambda_0} \lambda_\varphi + \frac{1}{k R M_0^2} \frac{dS}{d\psi}, \quad \frac{M_0^2 - 1}{\lambda_0} \lambda_\varphi = \beta_\psi + \frac{\sin \beta_0}{y_0} k \quad (3.1)$$

Здесь y_0 — ордината особой точки, $k = 0$ при $m < 1$, $k = 1$ при $m \geq 1$. Из (3.1) следует, что если ударная волна имеет в точке O бесконечную кривизну (т. е. $0 <$

$< m < 1$), то главный член решения будет такой же, как и в плоском случае (если изучается «тройная точка», то необходимо иметь в виду, что поток в области \mathcal{E} уже не будет равномерным). Если же $m \geq 1$, то вместо решения β , $\lambda \sim r^m$ будет

$$\beta = \beta_0 + C\psi + (D-1) \frac{\sin \beta_0}{y_0} \psi, \quad \lambda = \lambda_0 \left[1 + C\psi + \frac{D \sin \beta_0}{y_0(M_0^2 - 1)} \psi - \frac{S - S_0}{kRM_0^2} \right] \quad (3.2)$$

Постоянные C и D могут быть определены из граничных условий соответствующих задач. Ударная волна имеет при этом конечную кривизну. Таким образом, в осесимметричном течении при $\beta_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ случай особенности с нулевой кривизной ударной волны отсутствует.

Заметим, что возможность построения решения (3.2), соответствующего значению $m = 1$ и удовлетворяющего граничным условиям, появляется в осесимметричном течении, по сравнению с плоским случаем, оттого, что в выражении для β имеется коэффициент $(D-1)$ (в плоском случае было бы D); это приводит к тому, что система для определения постоянных C , D (C_i , D_i) становится линейно независимой.

4. Рассмотрим теперь случай, когда исследуемая точка находится на оси симметрии. При этом будем полагать также $\beta_0 = 0$, так как в противном случае получим коническую особенность.

Пусть в системе (2) $F(\psi) = \psi q(\lambda_0)$, $h_0 = 1$. Подставляя (1.3) при $N = 1$ в (1.2) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, учитывая, что $y = \psi + o(\varepsilon)$

$$\beta_\psi = \frac{1}{\lambda_0} \lambda_\psi + \frac{1}{kRM_0^2} \frac{dS}{d\psi}, \quad \frac{M_0^2 - 1}{\lambda_0} \lambda_\psi = \beta_\psi + \frac{\beta}{\psi} \quad (3.3)$$

В качестве примера рассмотрим течение в окрестности точки ортогональности ударной волны оси симметрии. Граничными условиями здесь будут: $\beta = 0$ при $\psi = 0$ и $d\lambda/d\beta = 0$ при $\psi/\lambda = 0$; последнее возьмем в виде $\lambda = \lambda_0$ при $\psi = 0$. Решение (3.3), удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет вид

$$\beta = B J_1(\psi m) \operatorname{ch}(\psi m \sqrt{1 - M_0^2}), \quad \lambda = \lambda_0 [1 - B \sqrt{1 - M_0^2} J_0(\psi m) \operatorname{sh}(\psi m \sqrt{1 - M_0^2})]$$

где J_0 , J_1 — функции Бесселя, B , m — постоянные.

Таким образом, в осесимметричном течении кривизна отошедшей ударной волны в точке пересечения с осью симметрии всегда ограничена и не равна нулю.

Поступило 23 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley K. G. Considerations on the Structure of Mixed Subsonic-Supersonic Flow Patterns. Tech. Report F-TR-2168-ND, Head Quarters Air Materiel Command, Wright Field Dayton, Ohio, 1947.
2. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, вып. 2, т. 22.
4. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, т. 9, № 2.

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ РАЗНОПЛОТНОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Р. М. ЗАЙДЕЛЬ (Москва)

Одной из причин, вызывающих искажение формы фронта ударной волны, является разноплотность вещества, по которому ударная волна распространяется. В данной работе рассмотрена в линейном приближении задача о движении плоской (вначале) ударной волны по веществу, начальная плотность которого изменяется также и в направлении, параллельном плоскости фронта невозмущенной ударной волны. Для упрощения вычислений вещество считаем идеальным газом с нулевым начальным давлением. В п. 1 решена задача для бесконечного пространства. В п. 2 рассмотрено влияние твердого поршня, а также границы с невесомым газом.

1. Пусть по однородному веществу распространяется плоская ударная волна. Используем систему координат, в которой фронт волны покоится, так что ось x направлена по движению газа, а плоскость yz совпадает с фронтом ударной волны. При $x < 0$ (холодное вещество) газ течет со скоростью v_0 , при $x > 0$ (сжатое вещество) скорость газа равна v . Плотность газа равна, соответственно, ρ_0 и ρ , так что