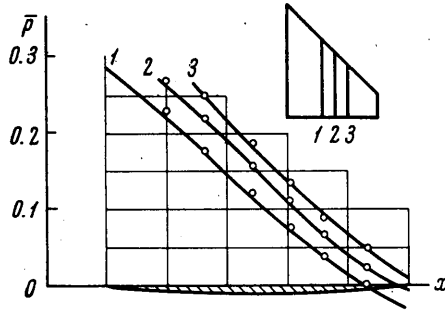


ками нанесены экспериментальные точки, полученные для крыла с теми же относительной толщиной и стреловидностью и близким уравнением поверхности (эксперимент автора, 1954 г.). Имеет место совпадение в пределах точности эксперимента.



Фиг. 10

Пользуясь случаем, автор благодарит Н. А. Зайцеву, оказавшую большую помощь в программировании и проведении расчетов.

Поступило 2 XI 1967

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1051—1060.
2. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
3. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания нижней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6, стр. 1086—1101.
4. Randall R. F., Bell D., Burk J. Pressure distribution tests of several sharp leading edge wings, bodies and body-wing combinations at mach 5 and 8. A.E.D.C. Techn. Note, 1960, No. 173, Sept.

### НЕКОТОРЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА, СОДЕРЖАЩИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

М. Д. УСТИНОВ (Калинин)

Частные решения нелинейной системы уравнений одномерного адиабатического движения идеального газа, содержащие определенный произвол (произвольные функции или постоянные), представляют теоретический и практический интерес. Например, найденное Л. И. Седовым [1] точное решение этих уравнений, содержащее произвольную функцию, нашло применение в решении ряда задач [2].

В данной работе найденное ранее автором решение уравнений одномерного (с плоской симметрией) адиабатического движения газа, содержащее произвольную функцию [3], используется для построения течений, содержащих ударные волны.

Точное решение, зависящее от четырех произвольных постоянных [4], рассматривается как решение некоторой задачи Коши. Показано, что линии, вдоль которых давление постоянно, могут быть приняты за ударные волны конечной амплитуды. Течение за ними описывается также упомянутым выше решением, в котором три из четырех постоянных являются теми же самыми.

1. Известные уравнения одномерного (с плоской симметрией) адиабатического движения идеального газа имеют следующее точное решение [3]:

$$\begin{aligned}
 u &= \varphi(\tau)(h + \xi) - \frac{(1 + \varepsilon)\psi'(\tau)}{2\psi(\tau)}(h + \xi) \\
 p &= \{\varphi(\tau)(h + \xi)^2 + [C\psi(\tau)]^{-\varepsilon}\}^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon} \\
 \rho &= \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon f(\tau)} p^{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}, \quad f(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2\psi}, \quad \gamma = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $u$  — скорость газа в направлении оси  $x$ ,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность газа,  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель адиабаты,  $C$ ,  $h$  — произвольные постоянные,  $\psi(\tau)$  — произвольная функция своего аргумента,  $\tau$ ,  $\xi$  — независимые переменные ( $\tau$  — функция тока), связанные с геометрической координатой  $x$  и временем  $t$  равенствами

$$d\tau = \rho dx - \rho u dt, \quad d\xi = \rho u dx - (p + \rho u^2) dt \quad (1.2)$$

Применим решение (1.1) к построению течения за ударной волной конечной интенсивности, распространяющейся со скоростью  $U_0(\tau)$  по покоящемуся газу, давление которого постоянно и равно  $p_0$ , а плотность равна  $\rho_0(\tau)$ , где  $U_0(\tau)$  и  $\rho_0(\tau)$  — пока неизвестные функции  $\tau$ , причем  $d\tau = \rho_0(\tau) a x$ .

Условия на ударной волне имеют вид [2]

$$p = (1 - \varepsilon) \rho_0 U_0^2 - \varepsilon p_0, \quad \rho = \frac{\rho_0 U_0^2}{(1 + \varepsilon) p_0 + \varepsilon \rho_0 U_0^2} \quad (1.3)$$

$$u = (1 - \varepsilon) U_0 - \frac{(1 + \varepsilon) p_0}{\rho_0 U_0}$$

Полагая в (1.1) произвольную постоянную  $C$  равной нулю, считая  $h > 0$  и учитывая [4], что на ударной волне

$$\xi = - \int_0^\tau \frac{p_0}{\rho_0 U_0} d\tau \quad (1.4)$$

получим при подстановке (1.1) в (1.3) систему трех уравнений, содержащую неизвестные функции  $\rho_0(\tau)$ ,  $U_0(\tau)$ ,  $\psi(\tau)$ , а также  $\psi'(\tau)$  и  $\psi''(\tau)$ .

Решение этой системы можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{(1 - \varepsilon) B^2}{\varepsilon A p_0} \left( A - \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{w}{p_0} \right)^4 \left( A - \frac{w}{\varepsilon p_0} \right)^{-1} \\ U_0 &= \frac{\varepsilon A p_0}{(1 - \varepsilon) B} \left( A - \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{w}{p_0} \right)^{-2}, \quad \psi = \left[ \left( A - \frac{w}{\varepsilon p_0} \right)^2 w \right]^{-2/(1 + \varepsilon)} \\ \frac{d\tau}{dw} &= - \frac{B}{p_0} \left( A - \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \frac{w}{p_0} \right)^2 \left( A - \frac{w}{\varepsilon p_0} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные положительные постоянные,  $w$  — параметр, связанный с  $\tau$  последним из равенств (1.5)

Для дальнейшего положим, что

$$A = \frac{h_0}{u_0}, \quad B = \frac{p_0}{h_0}, \quad w = \frac{(1 + \sigma) p_0 h_0 \varepsilon}{(1 + \varepsilon) u_0} \quad (1.6)$$

где произвольные постоянные  $h_0$  и  $u_0$  имеют размерности длины  $w$  и скорости соответственно,  $\sigma$  — новая переменная, и приведем (1.5) к виду

$$\rho_0 = \frac{(1 - \varepsilon^2) p_0 \sigma^4}{\varepsilon u_0^2 (\varepsilon - \sigma)}, \quad U_0 = \frac{\varepsilon u_0}{(1 - \varepsilon) \sigma^2}, \quad d\tau = - \frac{\varepsilon p_0 h_0 \sigma^2}{u_0^2 (\varepsilon - \sigma)} d\sigma \quad (1.7)$$

Обозначив через  $M_0$  отношение скорости ударной волны к скорости звука покоящегося перед ней газа, найдем

$$M_0^2 = \left( 1 - \frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad 0 < \sigma < \varepsilon \quad (1.8)$$

Последнее неравенство вытекает из того, что  $M_0 > 1$ .

Будем считать, что покоящийся газ находится в области  $x > 0$  и что ударная волна, находящаяся в момент  $t = 0$  в сечении  $x = 0$ , движется в положительном направлении оси  $Ox$ . Тогда, поскольку на волне  $d\tau > 0$ , имеем из (1.6), что  $d\sigma < 0$ . Если  $\sigma_0$  — произвольное значение  $\sigma$  из интервала (1.8), соответствующее  $x = t = 0$ , то из равенств

$$dx = \rho_0^{-1} d\tau, \quad dt = U_0^{-1} dx \quad (1.9)$$

найдем в параметрическом виде закон движения  $x(t)$  ударной волны. Оказывается.

$$x(t) = \frac{\varepsilon^2 u_0 h_0 t}{\sigma_0 [\sigma_0 \varepsilon h_0 - (1 + \varepsilon) u_0 t] (1 - \varepsilon)}, \quad x = \frac{\varepsilon^2 h_0 (\sigma_0 - \sigma)}{(1 - \varepsilon^2) \sigma_0 \sigma} \quad (1.10)$$

Используя второе равенство (1.10), связывающее  $x$  и  $\sigma$  на ударной волне, найдем из (1.7) плотность покоящегося перед ней газа

$$\rho_0(x) = \frac{\varepsilon^6(1 - \varepsilon^2)p_0 h_0^4 \sigma_0^4}{u_0^2 [h_0 \varepsilon^2 + (1 - \varepsilon^2)\sigma_0 x]^3 \{ (1 - \varepsilon^2)\sigma_0 x + h_0 \varepsilon(\varepsilon - \sigma_0) \}} \quad (1.11)$$

Траектории частиц газа за ударной волной в плоскости  $x, t$  можно найти из (1.1) и (1.2) при  $d\tau = 0$ . Можно показать, что

$$t - t_* = \varepsilon [(h + \xi)^{-1/\varepsilon} - (h + \xi_*)^{-1/\varepsilon}] [\psi(\sigma_*)]^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon} \quad (1.12)$$

$$x - x_* = \frac{\varepsilon \varphi(\sigma_*)}{1 - \varepsilon} [(h + \xi)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon} - (h + \xi_*)^{(\varepsilon-1)/\varepsilon}] [\psi(\sigma_*)]^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon}$$

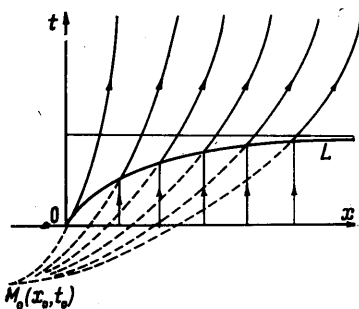
Параметры со звездочкой относятся здесь к значениям соответствующих величин на ударной волне, функции  $\varphi(\sigma)$  и  $\psi(\sigma)$  определяются с помощью (1.1), (1.5), (1.7). При движении вдоль линии (1.12)  $\xi$  уменьшается от значения  $\xi_*$ , определяемого из (1.4) при  $\tau = \tau(\sigma_*)$ , до нуля. Исключая параметр  $\xi$ , приведем уравнения траекторий частиц газа к следующему виду:

$$x - x_0 = k(\sigma_*) (t - t_0)^{1-\varepsilon}$$

$$k(\sigma_*) = \frac{u_0^{1-\varepsilon}}{(1 - \varepsilon)\sigma_*} \left[ \frac{h_0 \varepsilon}{1 + \varepsilon} (\varepsilon - \sigma_0) \right]^\varepsilon \quad (1.13)$$

$$x_0 = - \frac{\varepsilon h_0}{(1 - \varepsilon^2)\sigma_0} (\varepsilon - \sigma_0)$$

$$t_0 = - \frac{\varepsilon h_0}{(1 + \varepsilon)u_0} (\varepsilon - \sigma_0)$$



Фиг. 1

Окончательно имеем следующий результат: пусть в области  $x > 0$  находится покоящийся газ, давление которого постоянно и равно  $p_0$ , а плотность  $\rho_0$  зависит от  $x$  и определяется равенством (1.11), в котором  $h_0, u_0$  — произвольные положительные постоянные, имеющие размерность длины и скорости соответственно,  $\sigma_0$  — произвольная постоянная из интервала (1.8). В момент  $t = 0$  в области  $x > 0$  начинает двигаться ударная волна по закону (1.10), которая за конечный промежуток времени уходит в бесконечность (линия  $L$ , фиг. 1). Траектории частиц за ударной волной (сплошные линии со стрелками) представляют собой параболы (1.13). Поскольку  $x_0$  и  $t_0$  не зависят от  $\sigma_*$ , все эти траектории, будучи продолжены (пунктирные линии), сходятся в одной точке  $M_0(x_0, t_0)$ . Параметр  $\sigma_*$ , входящий в выражение (1.13) для  $k(\sigma_*)$ , постоянен для каждой линии тока, причем  $0 < \sigma_* \leq \sigma_0$ . В частности, кривая (1.13) при  $\sigma_* = \sigma_0$  соответствует линии тока, проходящей через начало координат. Параметры газа за ударной волной определяются равенствами (1.1) при  $C = 0$ , где функция  $\psi$  определена выше, а постоянная

$$h = \frac{\varepsilon p_0 h_0 (1 + \sigma_0)}{(1 + \varepsilon)u_0}$$

2. Определенный интерес представляет исследование течений, определяемых решением (1.1) при  $C \neq 0$ . Рассмотрим для простоты случай, когда по покоящемуся газу, давление которого  $p_0$  равно нулю, а плотность  $\rho_0$  переменна, движется ударная волна. Считая, что за ударной волной течение газа описывается решением (1.1) при  $C \neq 0$ , найдем  $\rho_0$  и скорость  $U_0$  ударной волны. В этом случае ( $p_0 = 0$ ) на ударной волне  $\xi = 0$ , условия (1.3) при  $p_0 = 0$  упрощаются, и, решая их, получим

$$\rho_0 = \frac{(1 - \varepsilon)b^2}{h^2} e^{-\eta/\varepsilon} (\psi_0 h^2)^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon} (1 + ae^{2\eta})^{(1+3\varepsilon)/2\varepsilon}$$

$$U_0 = \frac{h}{b(1 - \varepsilon)\sqrt{1 + ae^{2\eta}}}, \quad \frac{d\tau}{d\eta} = b\sqrt{1 + ae^{2\eta}}, \quad \psi = \psi_0 e^{-2\eta/(1+\varepsilon)}$$

Здесь  $\psi_0, a, b, h$  — произвольные положительные постоянные ( $C$  определенным образом выражается через них),  $\eta$  — переменный параметр, связанный с  $\tau$ . Закон дви-

жения ударной волны можно получить, используя (1.9) и (2.1). Нетрудно показать (считая для определенности, что при  $\eta = 0, x = t = 0$ , что справедливы равенства

$$x = \frac{1}{(1-\varepsilon)b} \psi_0^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon} h^{\varepsilon(1-\varepsilon)/\varepsilon} \int_0^\eta e^{z/\varepsilon} (1 + ae^{2z})^{-(1+2\varepsilon)/2\varepsilon} dz, \quad x(\infty) = L \quad (2.2)$$

$$t = \psi_0^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon} h^{-1/\varepsilon} \int_0^\eta [e^{2z} (1 + ae^{2z})^{-1-\varepsilon}]^{1/2\varepsilon} dz, \quad t(\infty) = T$$

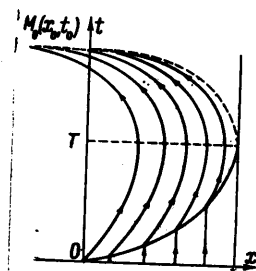
При  $\eta \rightarrow \infty$  интегралы (2.2) стремятся к конечным значениям, которые обозначены соответственно через  $L$  и  $T$ . Нетрудно также найти уравнения траекторий частиц газа в плоскости  $x, t$ . Эти уравнения в параметрическом виде таковы:

$$x = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)b} \psi_0^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon} h^{\varepsilon(1-\varepsilon)/\varepsilon} \left\{ \left[ \left( \frac{h+\xi}{h} \right)^2 + ae^{2\eta_*} \right]^{(1-\varepsilon)/2\varepsilon} (1 + ae^{2\eta_*})^{-1/2\varepsilon} e^{\eta_*/\varepsilon} - (1+a)^{-1/2\varepsilon} \right\}$$

$$t = (ah^2 \psi_0^{1+\varepsilon})^{-1/\varepsilon} \int_{z_0}^{z_*} (1+z^2)^{-(1+\varepsilon)/2\varepsilon} dz, \quad z_0 = \frac{h+\xi}{h\sqrt{a}} e^{-\eta_*}, \quad z_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (2.3)$$

Вдоль каждой линии тока  $\eta_* = \text{const}$ , а переменная  $\xi$  уменьшается от 0 на ударной волне до  $-\infty$ .

Таким образом, имеем следующий результат: пусть в области  $0 < x < L$  находится покоящийся газ, давление которого постоянно и равно нулю, а плотность  $\rho_0$  определяется в параметрическом виде первыми равенствами (2.1) и (2.2), в которых  $\psi_0, a, b, h$  — произвольные постоянные, а параметр  $\eta$  меняется от 0 до  $\infty$ . В момент  $t = 0$  в область  $x > 0$  начинает двигаться ударная волна, закон движения которой определяется равенствами (2.2). При  $t = T$  ( $\eta = \infty$ ) ударная волна достигает сечения  $x = L$ , и скорость ее, как видно из (2.1), обращается в нуль при  $t = T$ . За ударной волной частицы газа сначала движутся за ней и их траектории определяются равенствами (2.3), в которых для каждой линии тока  $\eta_* = \text{const}$ , а  $\xi$  меняется от 0 до  $-\infty$ . Из (2.3) видно, что при  $\xi = -h$  значение  $t$  не зависит от  $\eta_*$  и, как нетрудно проверить, равно  $T$ . Это означает, согласно (1.1), что в момент достижения ударной волной сечения  $x = L$  скорости всех частиц обращаются в нуль. Затем частицы газа начинают двигаться в отрицательном направлении оси  $Ox$ . При  $\xi \rightarrow -\infty$   $x$  и  $t$  имеют конечные пределы  $x_0$  и  $t_0$  соответственно. Эти пределы не зависят от  $\eta_*$ , т. е. частицы газа одновременно приходят в точку  $M_0(x_0, t_0)$ . Картина течения в плоскости  $x, t$  изображена на фиг. 2.



Фиг. 2

3. Пусть  $A, B, a, K$  — произвольные положительные постоянные. Нетрудно превратить [4], что функции  $u, p, \rho$ , зависящие от переменных  $\tau$  и  $w$  и определяемые равенствами

$$p = K(w+1), \quad \rho = \frac{p^{1/\nu}}{f(\tau)}, \quad u = \varphi(\tau)w, \quad \varphi(\tau) = \frac{A}{B-\tau}, \quad f(\tau) = \gamma a \varphi^2(\tau) \quad (3.1)$$

$$ds = -\frac{A}{w} (w+1)z(w)dw, \quad z(w) = 1 - \sigma(w+1)^{-(\nu+1)/\nu}, \quad \sigma = aK^{(\nu-1)/\nu}$$

удовлетворяют уравнениям одномерного адиабатического движения газа, причем переменные  $x$  и  $t$  определяются из равенств

$$p\rho dx = (p + \rho u^2 + \rho u\varphi) d\tau - \rho u ds$$

$$p dt = (u + \varphi) d\tau - ds \quad (3.2)$$

Истолковывая решение (3.1) как решение некоторой задачи Коши, будем считать, что при  $t = 0$  значению  $w = w_1$  соответствует  $\tau = 0$  и  $x = 0$ . Тогда из (3.1) и (3.2) при  $t = 0$  имеем

$$\ln \frac{B-\tau}{B} = \int_{w_1}^w \frac{z(w)}{w} dw, \quad x = h \int_{w_1}^w \frac{B d\tau}{(B-\tau)^2 (w+1)^{1/\nu}} \quad (3.3)$$

$$u = \frac{A w_1}{B} e^{\sigma v}, \quad v = \int_{w_1}^w (w+1)^{-(\nu+1)/\nu} \frac{dw}{w}, \quad h = \frac{\gamma a A^2}{BK^{1/\nu}}$$

Полагая в (3.2)  $dt = 0$ , получим, используя (3.1) и (3.3), в параметрическом виде траектории частиц газа

$$x = x_* + \frac{Bh}{\gamma\sigma(B - \tau_*)} [w - w_* + \gamma\sigma(w + 1)^{-1/\gamma} - \gamma\sigma(w_* + 1)^{-1/\gamma}] \quad (3.4)$$

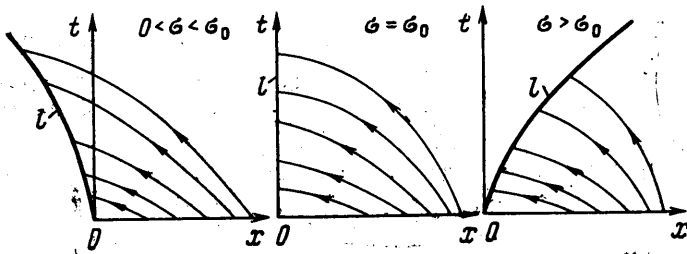
$$t = k \int_{w_*}^w z(w) \frac{dw}{w}, \quad k = \frac{A}{K}$$

Величины со звездочкой относятся здесь к значениям соответствующих переменных при  $t = 0$ . Из (3.3) следует

$$(B - \tau)^{-1} d\tau = -w^{-1} z(w) dw \quad \text{при } t = 0$$

и так как  $dt$  сохраняет знак при движении вдоль оси  $x$ , следует рассмотреть пять случаев.

*Первый случай.*  $0 < \sigma < \sigma_0$ ,  $w_1 \leq w < 0$  ( $z \geq 0$ ). Из (3.3) следует, что при  $t = 0$  при изменении  $w$  от  $w_1$  до 0, величина  $\tau$  изменяется от 0 до  $B$ , координата  $x$  изменя-



Фиг. 3

ется от 0 до  $\infty$ , скорость  $u$  — от  $Aw_1/B$  до 0, давление — от  $K(w_1 + 1)$  до  $K$ , плотность — от некоторого значения  $\rho_1$ , определяемого из (3.1), до 0. Масса газа в области  $0 \leq x < \infty$  оказывается конечной и равной  $B$ .

При движении вдоль линии тока  $\tau = \tau_*$   $\sigma = \text{const}$  значение  $ds$  должно быть меньше нуля, так как  $dt > 0$ . Следовательно,  $dw < 0$ . Поэтому для каждой линии тока существует предельная точка, в которой  $w = w_1$ . Вдоль каждой линии тока  $\tau = \tau_*$  величина  $w$  изменяется от  $w_* > w_1$  до  $w_1$ . Совокупность предельных точек дает предельную линию. Полагая в (3.4)  $w = w_1$  и изменяя  $w_*$  в интервале  $w_1 \leq w_* < 0$ , получим уравнение этой линии. При этом  $x_*$  и  $\tau_*$  определяются из (3.3) при  $w = w_*$ . Несложные вычисления приводят к уравнению

$$x = \frac{h}{\gamma\sigma} [(\gamma + 1)\sigma^{\gamma/(\gamma+1)} - 1](e^{t/h} - 1), \quad \sigma \neq \sigma_0 \quad (3.5)$$

$$x = 0, \quad \sigma = \sigma_0 = \left(\frac{1}{\gamma + 1}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}$$

Далее, из (3.1) находим, что вдоль предельной линии (3.5), т. е. при  $w = w_1$ ,

$$u + c = \frac{Aw_1}{B - \tau_*} + \left(\gamma \frac{p}{\rho}\right)^{1/2}_{\tau=\tau_*} = \frac{Bh}{k\gamma\sigma(B - \tau_*)} [(\gamma + 1)\sigma^{\gamma/(\gamma+1)} - 1]$$

и поскользку из второго равенства (3.4) и из (3.2) следует

$$dt = -k \frac{z(w_*)}{w_*} dw_* = -k \frac{d\tau_*}{B - \tau_*} \quad (3.6)$$

закключаем, что вдоль предельной линии (3.5)

$$dx/dt = u + c$$

т. е. линия (3.5) является  $C_+$  — характеристикой [6] (Фиг. 3).

Второй случай.  $0 < \sigma < 1, -1 < w \leq w_1 (z \leq 0)$ . В этом случае при  $t = 0$  с изменением  $w$  от  $w_1$  до  $-1$  величина  $\tau$  изменяется от  $0$  до  $B$ , координата  $x$  — от  $0$  до  $\infty$ , скорость  $u$  — от  $Aw_1/B$  до  $-\infty$ , давление — от  $K(w_1 + 1)$  до  $0$ , плотность — от  $\rho_1$  до  $0$ .

Масса газа в области  $x \geq 0$  оказывается также конечной и равной  $B$ . Используя уравнение движения и (3.2), можно показать, что вдоль линий тока

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Kw}{(B - \tau)z(w)} \quad (3.6)$$

Так как  $z < 0, w < 0$ , то  $x_{tt}'' > 0$ , следовательно, линии тока обращены выпуклостью влево. Линия (3.5) будет одновременно предельной линией течения и  $C_+$  — характеристикой.

Третий случай.  $\alpha > 1, w \geq w_1 > 0 (z \geq 0)$ . При  $t = 0$  с изменением  $w$  в интервале  $w_1 \leq w < \infty$  величина  $\tau$  изменяется от  $0$  до  $-\infty$ ,  $x$  — от  $0$  до  $x_1 < 0$ , скорость  $u$  — от  $Aw_1/B$  до  $u_1$ , где  $x_1$  и  $u_1$  определяются из (3.3) при  $w \rightarrow \infty$ . Вдоль линии тока  $dw > 0$ , и при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $x \rightarrow \infty$ .

Предельной линии не существует. Так как, согласно (3.6),  $x_{tt}'' > 0$ , линии тока обращены выпуклостью влево (фиг. 4, а).

Четвертый случай.  $\sigma > 1, 0 < w \leq w_1 (z \leq 0)$ . При  $t = 0$  с изменением  $w$  от  $w_1$  до  $0$  величина  $\tau$  изменяется от  $0$  до  $-\infty$ , координата  $x$  — от  $0$  до  $x_1 < 0$ , скорость — от  $Aw_1/B$  до  $0$ , давление — от  $K(w_1 + 1)$  до  $K$ , плотность — от  $\rho_1$  до  $\infty$ . Как и в предыдущем случае, на конечном участке  $(x_1, 0)$  сосредоточена бесконечная масса газа. Вдоль линии тока  $dw < 0$  и  $w$  уменьшается от  $w^* < w_1$  до  $0$ .

Предельной линии нет. Каждая линия тока  $\tau = \tau_*$  имеет вертикальную асимптоту  $x = h_*$ , где  $h_*$  определяется из первого равенства (3.4) при  $w \rightarrow 0$

$$h_* = x_* + \frac{Bh}{\gamma\sigma(B - \tau_*)} [\gamma\sigma - w_* - \gamma\sigma(w_* + 1)^{-1/\gamma}]$$

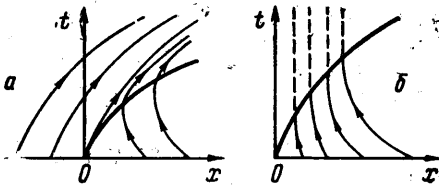
$$H = \frac{h}{\gamma\sigma} [\gamma\sigma + 1 - (\gamma + 1)\sigma^{\gamma/(\gamma+1)}]$$

Здесь  $x = H > 0$  — вертикальная асимптота для линии тока, выходящей из начала координат (фиг. 4, б).

Пятый случай.  $\sigma = 1$ . При  $t = 0$  с изменением  $w$  в интервале от  $-1$  до  $\infty$  величина  $\tau$  изменяется от  $-\infty$  до  $B$ , координата  $x$  — от  $x_1 < 0$  до  $\infty$ , скорость  $u$  — от  $u_0$  до  $-\infty$ , причем  $x = 0$  соответствует  $u = 0$ .

Вдоль линий тока  $dw > 0$ , поскольку  $w^{-1}z(w) > 0$  при всех значениях  $w$ . Поэтому каждая частица, расположенная в момент  $t = 0$  в области  $x > 0$ , сначала будет двигаться с замедлением в отрицательном направлении оси  $x$ , затем остановится и начнет двигаться в положительном направлении. Уравнение линии  $L$ , на которой  $u = 0$ , имеет как нетрудно показать следующий вид:

$$x = h(e^{t/h} - 1)$$



Фиг. 5

Можно доказать также, что линия  $L$  будет  $C_+$  — характеристикой (фиг. 5, а). Поскольку линия  $L$  — характеристика, и на ней давление постоянно (а скорость равна 0), можно склеить два течения, т. е. считать, что выше  $L$  (в области  $x \geq 0$ ) находится покоящийся газ (фиг. 5, б).

4. Возьмем в области течения, описываемого решением (3.1), линию  $L$ , на которой  $w = w_0 = \text{const}$ . Можно считать, что на ней

$$u = \varphi(\tau)w_0, \quad p = d_0, \quad \rho = r_0\varphi^{-2}(\tau)$$

$$d_0 = K(w_0 + 1), \quad r_0 = K\gamma^{-1}\sigma^{-1}(w_0 + 1)^{1/\gamma} \quad (4.1)$$

Потребуем, чтобы линия  $l$  была ударной волной. Для этого необходимо [4], чтобы

$$\varphi(\tau) = \frac{p + \rho u^2 - \rho u U}{\rho(U - u)}, \quad U = \frac{dx}{dt} \quad (4.2)$$

Отсюда, полагая  $U = k_0 \varphi(\tau)$ , найдем

$$d_0 = (k_0 - w_0)(1 + w_0)r_0 \quad (4.3)$$

Пусть  $u_1 = \varphi(\tau)w_1$ ,  $p_1 = d_1$ ,  $\rho_1 = r_1/\varphi^2(\tau)$  газодинамические величины за ударной волной. Тогда, используя условия на ударной волне [5], получим с учетом (4.3)

$$d_1 = \frac{2d_0^2 - (\gamma - 1)d_0(1 + w_0)^2 r_0}{(\gamma + 1)(1 + w_0)^2 r_0}, \quad r_1 = \frac{(\gamma + 1)d_0 r_0}{2\gamma(1 + w_0)^2 r_0 + (\gamma - 1)d_0} \quad (4.4)$$

$$w_1 = \frac{2d_0 - (\gamma - 1)(1 + w_0)^2 r_0}{(1 + w_0)(\gamma + 1)r_0} - 1$$

Уравнения линии  $l$  получаются из (3.2) при  $ds = 0$

$$dx = \left( \frac{1}{r_i} + \frac{w_i^2}{d_i} + \frac{w_i}{d_i} \right) \varphi^2(\tau) d\tau, \quad dt = \frac{w_i + 1}{d_i} \varphi(\tau) d\tau \quad (i = 0, 1) \quad (4.5)$$

Из (4.4) следует, что (4.5) при  $i = 0, 1$  дают в параметрическом виде уравнения одной и той же линии в плоскости  $x, t$ . На линии  $l$  должно выполняться неравенство

$$U \geq u + c, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho}$$

причем знак равенства имеет место, когда  $l$  будет  $C_+$ -характеристикой. Отсюда получаем, что перед ударной волной

$$\sigma = aK^{(\gamma-1)/\gamma} \geq (w_0 + 1)^{(\gamma+1)/\gamma} \quad (4.6)$$

или  $z(w_0) \leq 0$ . Из предыдущих рассуждений вытекает, что  $z$  сохраняет постоянный знак всюду, где течение непрерывно. Следовательно, в области течения перед ударной волной  $z(w) < 0$ .

Используя условия (4.4), легко показать, что непосредственно за ударной волной  $z(w_1) > 0$ . Значит, в области за ударной волной  $z(w) > 0$ . Нетрудно показать также, что при переходе через  $l$  постоянные  $A, B, K$  не изменяются, а величина  $a = a_i = \gamma^{-1} r_i^{-1} d_i^{1/\gamma}$  ( $i = 0, 1$ ). Интегрируя (4.5), находим уравнение линии  $l$

$$x = \begin{cases} C_1 e^{t/k} + C_2 & \text{при } d_0 \neq -r_0(w_0 + 1)w_0 \\ C_2 & \text{при } d_0 = -r_0(w_0 + 1)w_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

Изложенное выше можно резюмировать следующим образом: пусть в некоторой области плоскости  $x, t$  имеем течение типа, соответствующего случаям 2 или 4 ( $z \leq 0$ ), которое описывается решением (3.1). Возьмем в области течения произвольную линию  $l$   $w = w_0$ , вдоль которой давление постоянно и выполняется неравенство (4.6). Эта линия может быть принята за ударную волну конечной амплитуды. Течение газа за ней будет описываться по-прежнему решением (3.1), причем константы  $A, B$  и  $K$  будут теми же, а постоянная  $a$  находится, как указано выше.

Поступило 24 V 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 90, № 5.
2. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. Построение точных разрывных решений одномерной газодинамики и их приложения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
3. Устинов М. Д. О движении поршня под действием давления газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
4. Устинов М. Д. О течении идеального газа за ударной волной конечной амплитуды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. Станюкович К. П. Неустойчивости движения сплошной среды. Гостехиздат, 1965.
6. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд-во иностр. лит., 1950.