

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В ОБЛАСТИ СЖАТИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Г. П. ВОСКРЕСЕНСКИЙ (Москва)

Предлагается численный метод расчета сверхзвукового обтекания произвольной поверхности крыла треугольного вида в области течения сжатия. Передняя кромка крыла может быть и не прямолинейной, но ударная волна должна быть повсюду присоединена к ней.

Смесь газов, обтекающая крыло, предполагается невязкой, однако в ней при высокой температуре могут происходить физико-химические процессы, такие как диссоциация, ионизация и образование новых соединений.

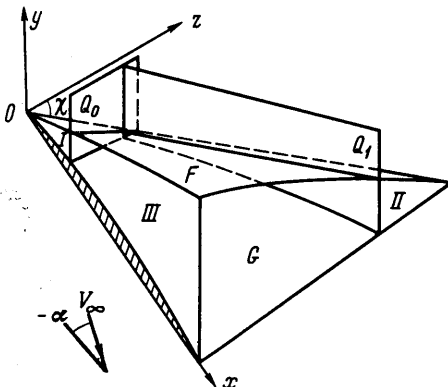
Для нелинейной системы уравнений газовой динамики ставится задача с начальными условиями на некоторой плоскости, граничными условиями на поверхности крыла и на неизвестной поверхности ударной волны. Разностная система уравнений, аппроксимирующая на сетке исходную систему дифференциальных уравнений, решается по итерационной схеме, предложенной в [1].

Начальные условия определяются методом установления автоматического конечного течения с использованием алгоритма решения основной задачи.

Рассматриваются некоторые особенности конического течения на треугольном крыле. Рассчитан ряд примеров, показывающих возможности предложенного алгоритма. Приводятся данные о форме ударных волн, распределении давления, скоростей и плотности по поверхности крыла и за ударной волной. Оценена точность расчетов и даны некоторые сопоставления с экспериментами.

1. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание крыла треугольного типа, полагая, что составляющая вектора скорости набегающего потока, нормальная передней кромке, больше скорости звука, и головная ударная волна присоединена к передней кромке крыла. При этом, течение на его верхней поверхности не оказывает влияния на течение на нижней наветренной поверхности и наоборот. Ограничимся изучением только области течения сжатия, где бы она ни возникла — сверху или снизу крыла.

Поверхность крыла может быть произвольной. Если она коническая, то течение за головной ударной волной будет обладать автомодельными свойствами, характерными для конического течения.



Фиг. 1

Выделим область сверхзвукового течения, ограниченную поверхностью крыла G и поверхностью ударной волны F . Разобьем ее плоскостью Q_0 и поверхностью Q_1 на три части. Плоскость Q_0 расположим перпендикулярно вертикальной плоскости симметрии крыла в окрестности его вершины. Поверхность Q_1 расположим по линии $\eta = \text{const}$, где η — некоторая функция, определяемая ниже (фиг. 1).

Рассмотрим теперь задачу о стационарном пространственном обтекании крыла треугольного типа с острой передней кромкой в области сжатия равномерным сверхзвуковым потоком невязкого нетеплопроводного газа. Введем декартовую систему координат $OxYZ$. Ось x направим так, чтобы она проходила через вершину крыла и лежала бы в вертикальной плоскости симметрии. Ось Z направим по размаху вправо, а ось Y — вверх. Примем, что вектор скорости набегающего потока лежит в плоскости xY . Это условие характеризует течение без скольжения и позволяет рассматривать только одну половину крыла при $Z \geq 0$.

Решение всей задачи расчленяется на три задачи определения течения в областях I , II , III . Решение задач для областей I и II позволит определить газодинамические функции на плоскости Q_0 и поверхности Q_1 . Эти данные необходимы для отыскания решения в области III . Предполагая, что задачи для областей I и II решены, сформулируем сначала краевую задачу для области III и дадим алгоритм ее численного решения, а затем займемся задачами для областей I и II . Уравнения неразрывности течения, энергии и движения запишем в матричном виде

$$A_1 \frac{\partial X}{\partial x} + B_1 \frac{\partial X}{\partial y} + C_1 \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь A_1, B_1, C_1 — квадратные матрицы пятого порядка

$$A_1 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & u \\ \rho c^2 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 & v \\ 0 & \rho c^2 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 1/\rho & 0 \\ v & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho & 0 & w \\ 0 & 0 & \rho c^2 & w & 0 \\ 0 & 0 & w & 1/\rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \rho \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{\rho \partial h / \partial \rho}{1 - \rho \partial h / \partial p}$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости по осям, p — давление, ρ — плотность, c — скорость звука, h — энтальпия единицы массы газа.

Для случая реагирующей смеси газов энтальпия и скорость звука находятся путем решения уравнений термодинамического равновесия или аппроксимации их как функций плотности или давления по методу, изложенному в [2]. Если скорости потока не очень высоки, так что не происходит изменений физико-химического состояния смеси газов, то скорость звука вычисляется, как $c^2 = k_\infty \rho / \rho$, где k_∞ — отношение удельных теплоемкостей.

Пусть уравнение поверхности крыла $y = G(x, z)$ и уравнение поверхности ударной волны $y = F(x, z)$. На головной ударной волне выполняются условия сохранения потока массы, импульса и энергии, а также отсутствует тангенциальный разрыв. На поверхности крыла справедливо условие $V_n = 0$.

Теперь, краевая задача для области III может быть сформулирована так. Пусть на плоскости Q_0 и поверхности Q_1 известен вектор X , известны также линии пересечения их с поверхностью ударной волны. Если в области III выполняется условие $u > c$, то система (1.1) будет x -гиперболической. Требуется найти решение этой системы с начальными данными на плоскости Q_0 , данными на поверхности Q_1 , граничными условиями на поверхности крыла и на неизвестной поверхности головной ударной волны. В результате решения можно будет определить вектор X и функцию F в некоторой окрестности Q_0 , в том числе и на новой плоскости $Q_0^{(1)}$. Многократно повторяя этот процесс, можно найти решение во всей области III, вплоть до задней кромки крыла. Заметим, что нижняя поверхность крыла характеризуется знаком минус у угла атаки.

Перейдем в уравнениях к новой системе координат, выбранных так, чтобы область решения имела фиксированные границы

$$x \rightarrow t, \quad y \rightarrow \xi = \frac{y - G}{F - G}, \quad z \rightarrow \eta = \frac{z}{H(t)}$$

В этих переменных область решения будет

$$t > t_0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta < 1$$

и система уравнений

$$A \frac{\partial X}{\partial t} + B \frac{\partial X}{\partial \xi} + C \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0 \tag{1.2}$$

где

$$A = A_1, \quad B = A_1 \xi_x + B_1 \xi_y + C_1 \xi_z, \quad C = A_1 \eta_x + C_1 \eta_z$$

$$\xi_x = -\frac{1}{(F - G)H} \{H[(1 - \xi)G_t + \xi F_t] - \eta H_t[(1 - \xi)G_\eta + \xi F_\eta]\}$$

$$\xi_y = \frac{1}{F - G}, \quad \xi_z = -\frac{1}{(F - G)H} [(1 - \xi)G_\eta + \xi F_\eta]$$

$$\eta_x = -\frac{\eta H_t}{H}, \quad \eta_y = 0, \quad \eta_z = \frac{1}{H}$$

Функция ξ , как и в [2], должна удовлетворять условиям, обеспечивающим устойчивость вычислительного процесса

$$u \xi_x + v \xi_y + w \xi_z < 0$$

$$(u^2 - c^2) \xi_x + u(\xi_y v + \xi_z w) + c \sqrt{\xi_y v + \xi_z w)^2 + (u^2 - c^2)(\xi_y^2 + \xi_z^2)} > 0$$

При невыполнении этих условий требуется иной вид функции ξ . Система (1.2) вместе с граничными условиями определяет вектор $X(t, \xi, \eta)$ и функцию $F(t, \eta)$. В этих формулах $H = H(t)$ — уравнение передней кромки крыла.

2. Дадим краткое описание алгоритма численного решения сформулированной задачи. Для этого в области решения III построим прямоугольную сетку с шагами

$$\begin{aligned} \Delta t &= \tau, & \Delta \xi &= h_1 = 1/M, & \Delta \eta &= h_2 = 1/L + 1 \\ \text{Примем, что} & & t^n &= t^{(0)} + n\tau, & \xi_m &= mh_1, & \eta_l &= lh_2 \\ & & f(t^n, \xi_m, \eta_l) &= f_{m,l}^n, & f(t^{n+1/2}, \xi_{m+1/2}, \eta_l) &= f_{m+1/2,l}^{n+1/2} \\ \kappa_1 &= \tau/h_1, & \kappa_2 &= \tau/h_2 & (m &= 0, 1, \dots, M; l &= 0, 1, \dots, L+1) \end{aligned}$$

Совокупность точек с одинаковыми индексами n назовем «слоем», а совокупность точек с одинаковыми индексами n, l — «лучом» (фиг. 2).

Введем замену производных разностными отношениями

$$\begin{aligned} (\partial f / \partial t)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &\approx 1/2\tau \{f_{m+1,l}^{n+1} + f_{m,l}^{n+1} - f_{m+1,l}^n - f_{m,l}^n\} - \\ &- \sigma/8h_2 \{f_{m+1,l+1}^n + 2f_{m+1,l}^n + f_{m+1,l-1}^n + f_{m,l+1}^n - 2f_{m,l}^n + f_{m,l-1}^n\} \\ (\partial f / \partial \xi)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &\approx 1/h_1 \{ \alpha(f_{m+1,l}^{n+1} - f_{m,l}^{n+1}) + \beta(f_{m+1,l}^n - f_{m,l}^n) \} \quad (\alpha + \beta = 1) \\ (\partial f / \partial \eta)_{m+1/2,l}^{n+1/2} &\approx 1/h_2 \{ \alpha(f_{m+1,l+1}^{n+1} - f_{m+1,l-1}^{n+1} + f_{m,l+1}^{n+1} - f_{m,l-1}^{n+1}) + \\ &+ \beta(f_{m+1,l+1}^n - f_{m+1,l-1}^n + f_{m,l+1}^n - f_{m,l-1}^n) \} \quad (0 \leq \beta \leq \alpha) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ — малая положительная величина.

При h_1 и h_2 порядка τ записанные разностные отношения аппроксимируют производные с точностью $O(\tau^2) + \sigma O(\tau)$ и $O(\tau^2) + (\alpha - \beta)O(\tau)$, т. е. при $\sigma = 0$ и $\alpha = \beta$ имеет место аппроксимация второго порядка.

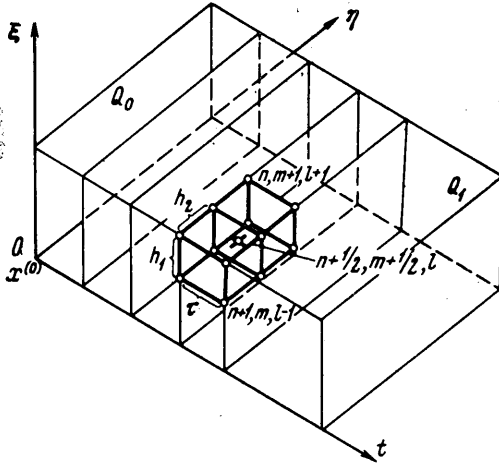
Значения функций в полуцелых точках получим интерполяцией.

Так же, как в [2], для сокращения записи введем операторы сдвига

$$\begin{aligned} \delta f_{m,l}^n &= f_{m+1,l}^n, & T f_{m,l}^n &= f_{m,l}^{n+1} \\ T^{-1} f_{m,l}^n &= f_{m,l-1}^n, & I f_{m,l}^n &= f_{m,l}^n \end{aligned}$$

После введения операторов сдвига в (2.1) дифференциальные уравнения (1.1) преобразуются в систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} A_{m+1/2,l}^{n+1/2} (\delta + I) \{X_{m,l}^{n+1} - \\ - [I + 1/4\sigma\kappa_2(T - 2I + T^{-1})] X_{m,l}^n\} + \\ + 2\kappa_1 B_{m+1/2,l}^{n+1/2} (\delta - I) (\alpha X_{m,l}^{n+1} + \beta X_{m,l}^n) + \\ + 1/2\kappa_2 C_{m+1/2,l}^{n+1/2} (\delta + I) (T - T^{-1}) \times \\ \times (\alpha X_{m,l}^{n+1} + \beta X_{m,l}^n) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$



Фиг. 2

Граничные условия запишем на поверхности крыла в точке $(t^{n+1}, 0, \eta_e)$ и на ударной волне в точке $(t^{n+1}, 1, \eta_e)$. Кроме того,

$$F_l^{n+1} = F_l^n + 1/2\tau [(F_l)_l^{n+1} + (F_l)_l^n], \quad (F_l)_l^{n+1} = 1/2h_2^{-1} (F_{l+1}^n - F_{l-1}^n) \quad (2.3)$$

Полагая в уравнениях (2.2) и граничных условиях величины с индексом n известными и принимая во внимание (2.3), получим $5M(L-1) + 6(L-1)$ уравнений для

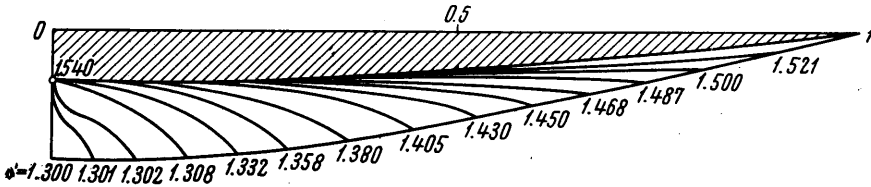
$$X_{m,l}^{n+1}, \quad F_l^{n+1}$$

Здесь L — искомое число функций, M — число точек на луче. Число уравнений соответствует числу неизвестных. Хотя теоретически и не доказана возможность

получения при этом единственно нужного решения, но предложенный в [1] итерационный метод разрешения такой системы приводит к нужному решению, что неизменно подтверждается вычислениями.

Для решения задачи достаточно иметь алгоритм перехода $X^n \rightarrow X^{n+1}$. Основу этого алгоритма составляет указанный итерационный метод. Он описан в [1, 2], здесь лишь кратко отметим его главные черты.

Задача итерационного решения уравнений на слое расчленяется на $L - 1$ краевых задач, соответствующих отдельным лучам. Краевая задача на каждом луче формулируется для системы уравнений с шестью неизвестными функциями. При этом имеется одно граничное условие на теле и пять — на ударной волне. Последовательное решение краевых задач на лучах проводится при помощи одномерной прогонки.



Фиг. 3

Эти краевые задачи связываются между собой в итерационном процессе, который заканчивается при выполнении условия $|X^{n+j} - X^{n+j+1}| < \epsilon$. Практически оказывается достаточным двух-четырёх итераций ($j = 2 - 4$).

3. Обратимся к задаче определения начальных данных на плоскости Q_0 . Она решается методом установления, идея которого сходна с методом установления автомодельного решения для круговых и эллиптических конусов, обтекаемых сверхзвуковым потоком.

Заменим малую окрестность вершины исходного крыла треугольным крылом, имеющим коническую поверхность, плавно сопрягающуюся с поверхностью основного крыла. При этом плоскость Q_0 проходит через линию сопряжения поверхностей. Поясим теперь идею метода установления для расчета течения на таком крыле.

Если треугольное крыло имеет коническую поверхность, то сверхзвуковое течение на нем будет автомодельным относительно координаты t . Таким образом, газодинамические функции в пространстве, ограниченном поверхностью крыла и поверхностью ударной волны, будут зависеть только от координат ξ и η . При этом так же, как и в автомодельном течении около конусов, существует экспериментально установленный факт, что решение $X(t, \xi, \eta)$ задачи сверхзвукового обтекания треугольного крыла, обладающего конической поверхностью, имеет при $t \rightarrow \infty$ предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, \xi, \eta) = X^*(\xi, \eta)$$

Этот предел и будет автомодельным решением задачи; причем, это положение относится, как к крыльям с дозвуковой, так и сверхзвуковой передней кромкой.

Заметим, что автомодельное течение возникает всегда, как предел неавтомодельного течения при достаточно длительном воздействии на крыло, имеющее коническую поверхность, сверхзвукового потока с постоянными параметрами. Это автомодельное течение, так же как и при обтекании конусов, обладает сильным притягивающим свойством.

Итак, задача определения данных в плоскости Q_0 сводится к нахождению предела X^* с приемлемой точностью. Технически оно производится с помощью многократного и последовательного применения алгоритма перехода $X^n \rightarrow X^{n+1}$ к некоторому произвольному вектору $X^{(0)}$, вплоть до получения указанного предела.

Вектор X^0 принципиально может быть достаточно далек от искомого предела X^* . Однако чтобы не затягивать процесс установления, разумно выбирать в качестве начальных данные, близкие к X^* , например, воспользоваться газодинамическими функциями их сверхзвукового обтекания клина, наклоненного под тем же углом атаки, что и крыло.

Заметим, что по существу задача определения течения в области I имеет самостоятельное значение для треугольных крыльев с конической поверхностью.

Остановимся на некоторых чертах сверхзвукового течения на треугольном коническом крыле в области сжатия. Здесь, как и у конусов, в плоскости $t = \text{const}$ будут существовать особые точки решения. Особая точка типа узла расположена на пересечении поверхности крыла и плоскости вертикальной симметрии. Она соответствует линии стекания на поверхности крыла. На фиг. 3 изображен след ударной волны на эту плоскость, а также линии уровня энтропии. В особой точке существуют

два предельных решения, соответствующие двум предельным переходам $\eta \rightarrow 0$ при $\xi = 0$ и $\xi \rightarrow 0$ при $\eta = 0$. Между этими предельными решениями имеет место бесконечно количество других промежуточных решений.

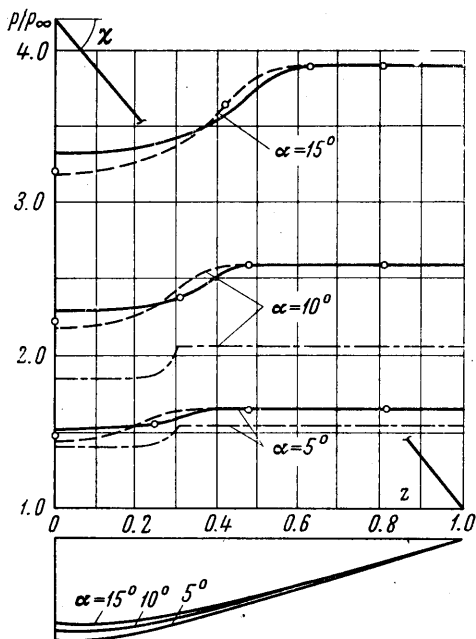
Физическую причину образования предельных решений можно пояснить следующим образом. Линия тока в плоскости $t = \text{const}$, проходящая по поверхности крыла от его передней кромки, соответствует наибольшей энтропии. Эта энтропия в силу физических условий сохраняется постоянной на всей поверхности крыла и обуславливает первое предельное решение ($\eta \rightarrow 0$ при $\xi = 0$) в плоскости симметрии. С другой стороны, энтропия на ударной волне не постоянна ($\partial S / \partial \eta \neq 0$), а уменьшается по направлению к плоскости симметрии, в которой будет иметь место наименьшая энтропия, ответственная за второе предельное решение ($\xi \rightarrow 0$ при $\eta = 0$). Таким образом, у крыльев с конической поверхностью в плоскости симметрии образуется линия стекания.

Учет поведения газодинамических функций вблизи особой точки требует знания двух значений вектора X , соответствующих двум предельным переходам и может быть проведен с привлечением наибольшей энтропии и полной энтальпии потока.

В процессе установления предельного течения полезно использовать переменные F_e/t , G/t , G_η/t . Сам процесс установления ведется до выполнения условия $|X^n - X^{n-n_0}| < \epsilon$, где n_0 и ϵ заданы.

Перейдем теперь к задаче определения начальных данных в области II, включая поверхность Q_1 . Ее решение основано на замене части полукрыла, в малой окрестности передней кромки, скользящим крылом с клиновидным профилем. Отсчет углов атаки этого крыла ведется в плоскости xu .

Предполагается, что скользящее крыло находится вне зоны влияния вершины основного крыла и его обтекание определяется составляющей вектора скорости набегающего потока нормальной передней кромки в данной точке.



Фиг. 4

Для наглядности описания примем, что передняя кромка треугольного крыла прямолинейная. В этом частном случае, скользящее крыло будет иметь угол скольжения, равный углу стреловидности исходного крыла. Алгоритм нахождения параметров сверхзвукового потока около такого скользящего крыла состоит из вычисления составляющей скорости набегающего потока $V_{n\infty}$, параметров за косой ударной волной на клине, которым заменяется носок профиля исходного крыла и вычисления компонент тангенциальной составляющей скорости $V_{t\infty}$. Искомые значения скоростей находятся как сумма нормальной и тангенциальной компонент за ударной волной.

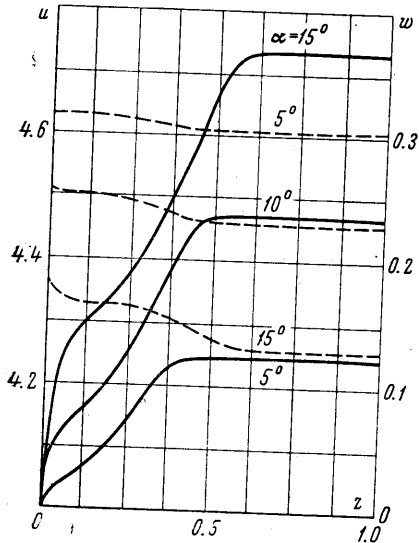
4. В результате численного решения можно получить большую информацию о полях газодинамических функций. Но ее наглядное представление в случае трех переменных весьма затруднительно. Поэтому, при рассмотрении результатов расчетов представляется возможным остановиться лишь на части полученной информации.

На фиг. 4 представлены данные по обтеканию нижней части, изображенной в плане фюзеляжа треугольной пластинки при $M_\infty = 4$, $\chi = 50^\circ$, $\alpha = 5, 10, 15^\circ$. Здесь имеет место коническое автомодельное течение, поэтому достаточно рассмотреть его одно сечение $t = \text{const}$. В этом сечении изображены следы ударных волн, а также графики распределения давления p/p_∞ по размаху. На поверхности пластинки давление дано сплошной линией, а за ударной волной — пунктиром. Крестиками нанесены данные из работы [3]. Штрих-пунктирной линией нанесены результаты расчета давления по линейной теории. На фиг. 5 для той же пластинки показаны графики изменения компонент u и w вектора скорости по поверхности (u — пунктир, w — сплошные линии). Компоненты скорости отнесены в величине $\sqrt{p_\infty/p_\infty}$. На обеих фигурах хорошо видна граница влияния конуса возмущения, исходящего из вершины пластинки.

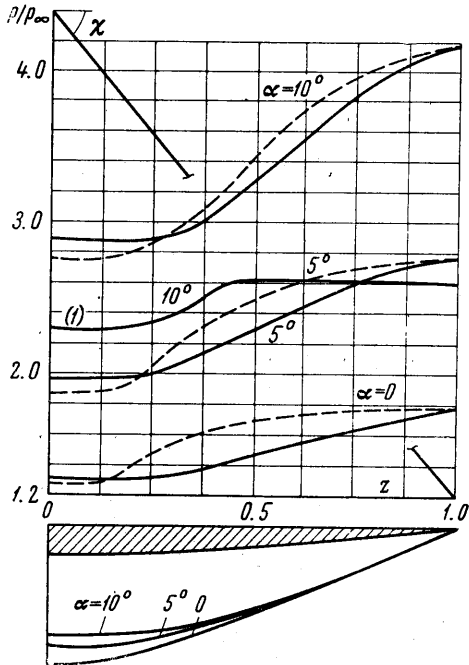
На фиг. 6 представлено распределение давления по размаху на нижней поверхности (сплошные линии) и за ударной волной (пунктир) для треугольного крыла с конической поверхностью, описываемой уравнением $y = \text{tg } \beta_0 z (1 - \eta^2)$. Профиль y

этого крыла по потоку клиновидный с полууглом заострения $\beta_0 = 3^\circ$. Стреловидность по передней кромке $\chi = 50^\circ$, $M_\infty = 4$ и $\alpha = 0, 5, 10^\circ$. Для сравнения под цифрой (1) нанесено давление по плоской пластинке той же формы в плане. Видно сильное влияние профиля крыла. Снизу графиков изображены следы ударных волн на плоскость yz .

На фиг. 3 для крыла с той же конической поверхностью в сечении

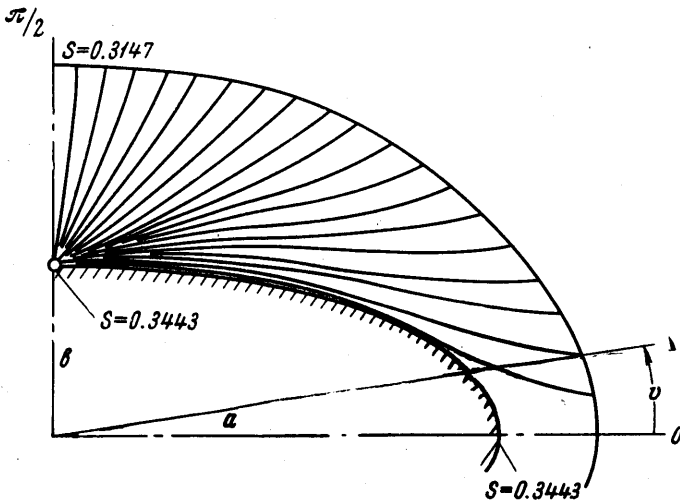


Фиг. 5



Фиг. 6

$t = \text{const}$ при $M_\infty = 8$ и $\alpha = 10^\circ$ изображены след ударной волны и линии равной энтропии S . Видна особая точка с двумя предельными значениями энтропии, расположенная на пересечении поверхности крыла и плоскости вертикальной симметрии.



Фиг. 7

рии. Учет поведения функций вблизи особой точки производился с привлечением энтропии и полной энтальпии потока на основании того факта, что энтропия постоянна по поверхности крыла и что давление в особой точке имеет одно значение.

Характер изэнтропических линий напоминает другие случаи конического течения, например, около эллиптических конусов. Один такой случай течения около эллиптического конуса с углом полураствора при вершине $\beta = 35^\circ$ и отношением полуосей направляющего эллипса $a/b = 2.67$ при $M_\infty = 3$ изображен на фиг. 7 (расчет автора). На этой фигуре виден след ударной волны на плоскость, перпендикулярную оси эллипса, линии равной энтропии и два ее предельных значения в особой точке типа узла.

В табл. 1 приведены значения газодинамических функций u, v, w, p, ρ в автомодельном течении между поверхностью конического крыла, ранее указанного вида,

Таблица 1

	η/ξ	0	0.1	0.25	0.5	0.75	1.0
u	0	6.50 <u>6.38</u>	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50
	0.5	6.28	6.28	6.28	6.28	6.28	6.28
	0.9	6.13	6.13	6.13	6.13	6.13	6.13
	0	0.25 <u>0.15</u>	0.25	0.25	0.25	0.24	0.22
v	0.5	0.35	0.35	0.35	0.34	0.33	0.32
	0.9	0.48	0.48	0.47	0.47	0.46	0.45
w	0.9	0.79	0.79	0.78	0.77	0.76	0.74
	0	7.24	7.23	7.21	7.20	7.18	7.15
p	0.5	8.18	8.20	8.25	8.34	8.40	8.50
	0.9	10.0	10.0	10.0	10.02	10.05	10.1
	0	3.12 <u>2.80</u>	3.35	3.35	3.35	3.30	3.25
ρ	0.5	3.42	3.43	3.45	3.50	3.50	3.52
	0.9	3.88	3.88	3.89	3.90	3.91	3.92

и ударной волной, для сечения $t = \text{const}$. Здесь $M_\infty = 6$, $\alpha = 15^\circ$, ξ — положение рассматриваемой точки между крылом и ударной волной в долях расстояния от поверхности крыла до ударной волны, η — положение точки по размаху в долях размаха крыла. Для u, v, ρ на поверхности крыла ($\xi = 0$) в особой точке при $\eta = 0$ даны по два предельных значения. Приведенное поведение функций в автомодельном течении сжатия, между поверхностью крыла и ударной волной, по-видимому, можно считать типичным.

На фиг. 8 даны пространственные эпюры давления для крыльев с одной и той же стреловидностью $\chi = 50^\circ$, но разной формой профиля при одинаковых параметрах набегающего потока ($M_\infty = 4$, $\alpha = 10^\circ$). Здесь a — плоская треугольная пластинка, δ — крыло с клиновидным профилем и уравнением поверхности

$y = \text{tg } \beta_0 t (1 - \eta^2)$. ($\beta_0 = 3^\circ$), b — крыло с уравнением поверхности $y = d(\sqrt{t} - t) \cdot (1 - \eta^2)$, ($d = 0.212$). Заметно значительное влияние формы профиля на распределение давления по крылу.

Сделаем некоторые замечания о точности проведенных расчетов. Известно, что для численных методов решения задач газовой динамики затруднительна теоретическая оценка погрешности решения, поэтому особую важность приобретает проверка качества полученных результатов.

Таблица 2

	ξ	u		v		w		p		ρ	
		(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
0	0	4.514	4.510	0.0	0.0	0.0	0.0	2.311	2.313	1.793	1.788
	0.5	4.519	4.518	-0.080	-0.070	0.0	0.0	2.272	2.282	1.772	1.777
	1.0	4.527	4.526	-0.124	-0.120	0.0	0.0	2.196	2.205	1.729	1.734
0.45	0	4.467	4.437	0.0	0.0	0.257	0.235	2.565	2.563	1.910	1.910
	0.5	4.471	4.470	-0.001	-0.001	0.184	0.190	2.565	2.564	1.915	1.913
	1.0	4.470	4.470	-0.001	0.0	0.190	0.191	2.563	2.537	1.913	1.915
0.63	0	4.466	4.467	0.0	0.0	0.234	0.233	2.574	2.567	1.916	1.913
	0.5	4.468	4.469	0.003	0.001	0.199	0.193	2.575	2.570	1.918	1.916
	1.0	4.468	4.468	0.004	0.003	0.192	0.192	2.577	2.575	1.919	1.918

Укажем возможные проверки качества решения в рамках принятой математической модели:

а) проверка выполнения энергетических и других соотношений прямо не участвующих в численном алгоритме. Сюда относятся: проверка выполнения интеграла Бернулли в точках внутри потока, проверка сохранения энтропии по поверхности, проверка постоянства расхода в контрольных сечениях;

б) оценка эволюции погрешности при изменении счетной сетки. В хорошо устроенных различных алгоритмах величина погрешности решения монотонно убывает с уменьшением размеров счетной ячейки;

в) оценка точности установления автомодельного течения, которая, производится по условию, приведенному в п. 3;

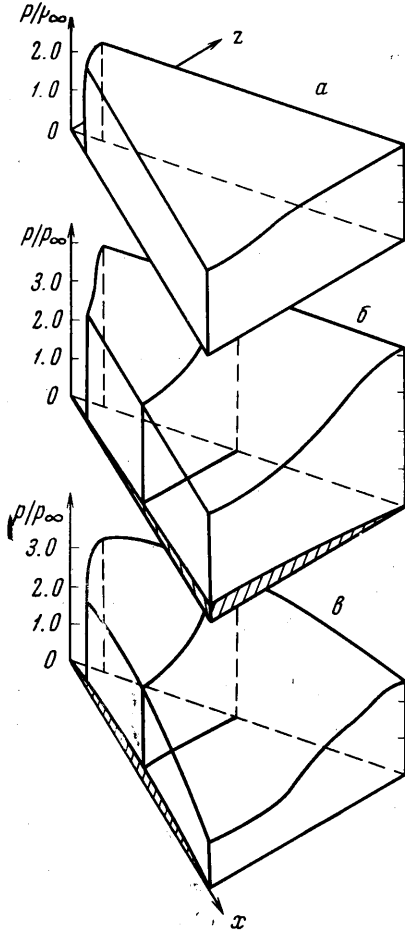
г) сопоставление с данными других методов, имеющих в своей основе ту же степень идеализации картины течения.

Особое место занимает сопоставление с экспериментами. Здесь в общем оцениваются, как принятая математическая модель течения, так и степень приближения к ней численного решения. К сожалению, сравнение с экспериментом, из-за ограниченных возможностей техники измерения, как правило, относится только к давлению по поверхности крыла.

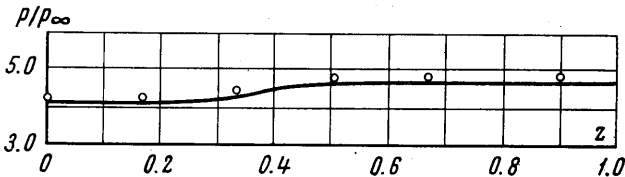
Указанные проверки имели место в приведенных расчетах. Во всех расчетах в ряде контрольных точек потока производились вычисления интеграла Бернулли и сопоставление со значением его в набегающем потоке; за малым исключением, отклонения не превышали одного процента. Энтропийная функция в приведенных примерах там, где она не привлекалась для расчета, сохраняет постоянное значение по поверхности с точностью двух-трех значащих цифр. Для нескольких случаев проводились расчеты с различной сеткой. Один из таких случаев показан в табл. 2. Здесь дано сопоставление данных расчета при сетке $\Delta\xi = 1/4$, $\Delta\eta = 1/8$ (1) с данными расчета при сетке $\Delta\xi = 1/8$, $\Delta\eta = 1/16$ (2). Имеет место достаточно хорошее совпадение расчетов с разной сеткой. В этих расчетах крыло — пластинка при $M_\infty = 4$, $\alpha = 10^\circ$, $\chi = 50^\circ$.

Все проведенные проверки дают основание полагать, что в большинстве приведенных примеров точность решения по отношению к решению дифференциальных уравнений, не менее трех-четырех знаков для давления и не менее двух-трех знаков для других газодинамических функций.

Сопоставление с экспериментами производилось в двух случаях. Один из них для плоской треугольной пластинки со стреловидностью $\chi = 50^\circ$ показан на фиг. 9. Здесь приведено давление на ее нижней поверхности при $M_\infty = 5.08$ и $\alpha = 14^\circ$. Кружками нанесены точки, заимствованные из эксперимента, приведенного в работе [4]. Они лежат несколько выше расчетной кривой (расхождение $< 3\%$), что объясняется, вероятно, влиянием в эксперименте пограничного слоя.



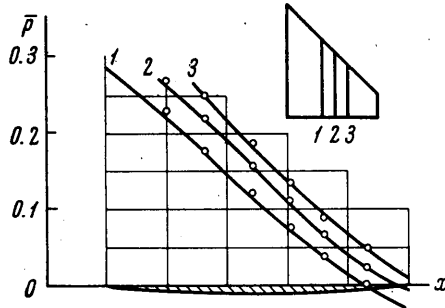
Фиг. 8



Фиг. 9

Другой случай показан на фиг. 10. Здесь даны графики распределения коэффициента давления в трех сечениях нижней поверхности треугольного крыла. Крыло имеет параболический профиль с относительной толщиной 6% и стреловидностью по передней кромке $\chi = 45^\circ$. Обтекает оно потоком при $M_\infty = 2.5$ и $\alpha = 6^\circ$. Круж

ками нанесены экспериментальные точки, полученные для крыла с теми же относительной толщиной и стреловидностью и близким уравнением поверхности (эксперимент автора, 1954 г.). Имеет место совпадение в пределах точности эксперимента.



Фиг. 10

Пользуясь случаем, автор благодарит Н. А. Зайцеву, оказавшую большую помощь в программировании и проведении расчетов.

Поступило 2 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П. Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1051—1060.
2. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
3. Бабаев Д. А. Численное решение задачи обтекания нижней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6, стр. 1086—1101.
4. Randall R. F., Bell D., Burk J. Pressure distribution tests of several sharp leading edge wings, bodies and body-wing combinations at mach 5 and 8. A.E.D.C. Techn. Note, 1960, No. 173, Sept.

НЕКОТОРЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА, СОДЕРЖАЩИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

М. Д. УСТИНОВ (Калинин)

Частные решения нелинейной системы уравнений одномерного адиабатического движения идеального газа, содержащие определенный произвол (произвольные функции или постоянные), представляют теоретический и практический интерес. Например, найденное Л. И. Седовым [1] точное решение этих уравнений, содержащее произвольную функцию, нашло применение в решении ряда задач [2].

В данной работе найденное ранее автором решение уравнений одномерного (с плоской симметрией) адиабатического движения газа, содержащее произвольную функцию [3], используется для построения течений, содержащих ударные волны.

Точное решение, зависящее от четырех произвольных постоянных [4], рассматривается как решение некоторой задачи Коши. Показано, что линии, вдоль которых давление постоянно, могут быть приняты за ударные волны конечной амплитуды. Течение за ними описывается также упомянутым выше решением, в котором три из четырех постоянных являются теми же самыми.

1. Известные уравнения одномерного (с плоской симметрией) адиабатического движения идеального газа имеют следующее точное решение [3]:

$$\begin{aligned}
 u &= \varphi(\tau)(h + \xi) - \frac{(1 + \varepsilon)\psi'(\tau)}{2\psi(\tau)}(h + \xi) \\
 p &= \{\varphi(\tau)(h + \xi)^2 + [C\psi(\tau)]^{-\varepsilon}\}^{(1+\varepsilon)/2\varepsilon} \\
 \rho &= \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon f(\tau)} p^{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)}, \quad f(\tau) = \frac{\varphi' + \varphi^2}{2\psi}, \quad \gamma = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$