

Здесь в правых частях равенств стоят коэффициенты вращательных производных, соответствующие гармоническим колебаниям крыла в невозмущенной среде.

Таким образом, коэффициенты вращательных производных крыльев в гармоническом порыве при $p^* \rightarrow 0$ могут быть найдены по соотношениям (3.9), если известны соответствующие коэффициенты вращательных производных тех же крыльев при гармонических колебаниях в невозмущенной среде.

Так же, как и свойство аналогии, соотношения (3.9) в пределах линейной теории справедливы для крыльев произвольной формы в плане и любых скоростей полета. Аналогичные соотношения для дозвуковых скоростей ранее были получены О. Н. Соколовой.

Поступило 14 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 7, стр. 53—70.
2. Красильщикова Е. А. Неустановившиеся движения крыла конечного размаха в сжимаемой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3, стр. 25—32.
3. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М., Гостехиздат, 1952.

ТРАНСЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ТЕЛ

Ю. Б. ЛИФШИЦ (Москва)

При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений, достаточно подробное изложение которого можно найти в книге Ван Дайка [1], строится во втором приближении течение около тонких трехмерных тел в потоке газа с $M_\infty \sim 1$. В качестве малого параметра берется максимальная относительная толщина ε . Аналогичная задача для сверх- и дозвуковых течений решалась путем построения решения линейных уравнений, описывающих поток на некотором расстоянии от тела и распространения его к оси [2, 3]. При трансзвуковых скоростях набегающего потока такой способ неприменим из-за нелинейности уравнения внешнего течения. Изложенный ниже способ дает возможность построить решение задачи во всем диапазоне скоростей, при этом автоматически получается правило площадей как в первом, так и во втором приближении. Другим результатом является возможность определения величины аэродинамической нагрузки по известному распределению давления на эквивалентном теле вращения.

1. Пусть искомое течение описывается уравнением неразрывности, уравнением Бернулли и уравнениями вихря и удовлетворяет условию непротекания на теле единичной длины, заданном уравнением

$$r_1 = \varepsilon \rho(x_1, \vartheta_1) \quad (1.1)$$

Здесь (фиг. 1) x_1, r_1, ϑ_1 — связанная с телом цилиндрическая система координат. Будем считать, что тело расположено под углом атаки $\alpha = O(\varepsilon)$. Введем еще одну координатную систему x, r, ϑ такую, что ось x направлена вдоль вектора скорости набегающего потока, а r, ϑ представляет собой полярную систему координат в плоскостях, перпендикулярных оси x , и полюсом в точках оси тела x_1 . В новых координатах тело (1.1) с точностью до членов ε^5 представляется формулой

$$r = \varepsilon \rho + \alpha \varepsilon^2 \left[\frac{\alpha}{4\varepsilon} \left(2x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \right) - \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\alpha}{4\varepsilon} \left(\rho \cos 2\vartheta + \frac{\partial \rho}{\partial \vartheta} \sin 2\vartheta \right) \right] \quad (1.2)$$

Ищем решение задачи в окрестности тела в виде разложения по еще неопределенным малым параметрам

$$\begin{aligned} v_x &= a_*(1 + v_x') = a_*(1 + \gamma_1 v_{1x}' + \gamma_2 v_{2x}' + \dots) \\ v_r &= a_* v_r' = (a_*(\delta_1 v_{1r}' + \delta_2 v_{2r}' + \dots)) \\ v_\vartheta &= a_* v_\vartheta' = a_*(\delta_1 v_{1\vartheta}' + \delta_2 v_{2\vartheta}' + \dots) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь v_x, v_r и v_θ — компоненты вектора скорости, a_* — критическая скорость, а $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ и $\delta_1, \delta_2, \dots$ — малые параметры, такие, что $\gamma_{n+1} = o(\gamma_n)$ и $\delta_{n+1} = o(\delta_n)$. В качестве независимых переменных внутреннего разложения (1.3) возьмем величины

$$x, r' = r/\varepsilon, \theta \quad (1.4)$$

Подставляя соотношения (1.3) и (1.4) в исходные уравнения движения газа и пренебрегая членами высшего порядка, получим хорошо известную систему уравнения для функции первого приближения

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} &= 0, & v_{1x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ v_{1r} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}, & v_{1\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}, & \varepsilon \delta_1 &= \gamma_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которой для краткости опущены штрихи над всеми переменными. Условие непротекания в первом приближении приводит к соотношениям

$$\delta_1 = \varepsilon, \left[1 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\alpha}{\varepsilon} \cos \theta + \frac{\alpha \sin \theta}{\varepsilon \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (1.6)$$

Здесь n — направление внешней нормали к контуру поперечного сечения тела $\rho(x, \theta)$ при $x = \text{const}$.

Решение внешней задачи Неймана (1.6) для уравнения Лапласа (1.5) может быть получено одним из известных способов. Для последующего сращения нужно найти порядки искомого функций при больших значениях r, θ , поэтому применим метод Фурье, который дает выражение для потенциала $\varphi_1(x, r, \theta)$ в виде суммы

$$\varphi_1 = \text{Re} [(2\pi)^{-1} S'(x) \ln \zeta - \sigma(x) \zeta^{-1} - \dots] + F_1(x), \quad \zeta = r e^{i\theta} \quad (1.7)$$

Здесь $S(x)$ — распределение площадей поперечных сечений тела, штрих означает производную по x , а $F_1(x)$ — произвольная функция с точностью до которой определяется решение Лапласа в плоскости r, θ . Эта функция характеризует влияние внешнего потока и должна быть определена в результате решения задачи о внешнем разложении.

Первый член формулы (1.7) (распределение источников вдоль оси) дает влияние толщины, второй член определяется углом атаки и искривленностью тела. Компоненты возмущенной скорости в рассматриваемой области получаются в результате дифференцирования (1.7), при этом нужно учитывать зависимость ζ от x , так что

$$\partial \zeta / \partial x = \varepsilon^{-1} \text{tg } \alpha$$

Функции внешнего разложения введем по формулам

$$\begin{aligned} v_x &= a_*(1 + V_x) = a_*(1 + \Gamma_1 V_{1x} + \Gamma_2 V_{2x} + \dots) \\ v_r &= a_* V_R = a_*(\Delta_1 V_{1R} + \Delta_2 V_{2R} + \dots) \\ v_\theta &= a_* V_\theta = a_*(\Delta_1 V_{1\theta} + \Delta_2 V_{2\theta} + \dots) \end{aligned} \quad (1.8)$$

а независимыми переменными будут

$$x, R = \varepsilon r, \theta \quad (1.9)$$

В формулах (1.8) $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ и $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ — малые параметры, удовлетворяющие обычным условиям $\Gamma_{n+1} = o(\Gamma_n)$, $\Delta_{n+1} = o(\Delta_n)$.

Произведем, согласно [1], асимптотическое сращивание первых членов разложения (1.3) и (1.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим соотношение между малыми параметрами, входящими в формулы (1.8) и ε

$$\Gamma_1 = \varepsilon^2, \quad \Delta_1 = \varepsilon^3$$

граничное условие, необходимое для решения уравнений, определяющих функции внешнего разложения

$$\lim_{R \rightarrow 0} R V_{1R}(x, R, \theta) = S'(x) / 2\pi \quad (1.10)$$

и формулу для производной искомой функции

$$F_1'(x) = \lim_{R \rightarrow 0} [V_{1x} - (2\pi)^{-1} S'(x) \ln R / \varepsilon^2] \quad (1.11)$$

Осесимметричность граничного условия (1.10) указывает на отсутствие производных по ϑ в дифференциальном уравнении, которому удовлетворяет внешняя задача в первом приближении. Подстановка величин (1.8) и (1.9) в исходную систему уравнений движения газа приводит к уравнению Кармана [4] для потенциала Φ_1 осесимметричного трансзвукового потока

$$(\kappa + 1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} \right) \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) должно быть решено при граничном условии (1.10) и условии на бесконечности

$$V_{1x} = (\lambda_\infty - 1) / \varepsilon^2 = K \quad (\lambda_\infty = v_\infty / a_*)$$

Здесь K — трансзвуковой параметр подобия Кармана [4].

Приведенные формулы дают известную постановку задачи трансзвукового обтекания тонких тел в первом приближении.

2. Рассмотрим теперь следующий член разложений (1.3) и (1.8) и определим, таким образом, второе приближение для изучаемых течений. Как и раньше начнем с внутреннего разложения. Подстановка формул (1.3) в исходные уравнения дает возможность ввести потенциал φ_2 , который удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] + \\ + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \vartheta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \vartheta^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

и соотношение между малыми параметрами

$$\gamma_2 = \varepsilon \delta_2$$

Условие непротекания во втором приближении приводит к связи $\delta_2 = \varepsilon^3$ и условию внешней задачи Неймана на сечении $x = \text{const}$ для уравнения (2.1). Здесь опо для краткости не выписывается.

Для уравнения (2.1) известно частное решение [5]. Им будет действительная часть выражения

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \bar{\tau} \bar{\tau}}{\partial x} + \frac{1}{8} \left[\frac{d \bar{\tau}}{d \bar{\zeta}} \int \left(\frac{d \bar{\tau}}{d \bar{\zeta}} \right)^2 d \bar{\zeta} + \frac{d \bar{\tau}}{d \bar{\zeta}} \int \left(\frac{d \bar{\tau}}{d \bar{\zeta}} \right) d \bar{\zeta} \right], \quad \varphi_1 = \text{Re } \tau \quad (2.2)$$

Здесь черта означает комплексно сопряженную величину.

Искомый интеграл $\varphi_2(x, r, \vartheta)$ уравнения (2.1) представляет собой сумму (2.2) и решения соответственно измененной задачи Неймана для уравнения Лапласа. Для дальнейшего асимптотического сращения решений произведем оценку поведения потенциала φ_2 при больших значениях координаты r . В формулу для φ_2 входят члены из частного решения (2.2) и функции от r и ϑ , аналогичные приведенным в (1.7), коэффициенты при которых зависят только от x и обозначаются через $B_i(x)$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \frac{S'S''}{4\pi^2} \ln^2 r - \frac{1}{\pi} \left(S''\sigma + S'\sigma' + \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{S'^2}{2\pi} \right) \frac{\ln r}{r} \cos \vartheta + F_2(x) + \\ + B_1(x) \ln r + B_2(x) \frac{\cos \vartheta}{r} + B_3(x) r \cos \vartheta + O\left(\frac{\ln r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $F_2(x)$ определяется из решения внешней задачи на втором приближении. Член $B_3(x) \cos \vartheta$ должен быть при асимптотическом сращивании с внешним разложением порядка ε^3 , т. е. коэффициент $B_3(x)$ находится из внешнего решения в первом приближении. Но потенциал Φ_1 не зависит от ϑ , поэтому $B_3(x) \equiv 0$. Этот же результат получается из принципа минимальной сингулярности [1].

Произведем теперь асимптотическое сращивание разложений (1.3) и (1.8) во втором приближении. Получим соотношение между малыми параметрами

$$\Gamma_2 = \varepsilon^4, \quad \Lambda_2 = \varepsilon^5$$

граничное условие для определения функций внешнего разложения

$$V_{2R} \rightarrow \sigma(x) \frac{\cos \vartheta}{R^2} + \frac{S'S''}{2\pi^2} \frac{\ln R/\varepsilon^2}{R} + \frac{B_1(x)}{R} \quad \text{при } R \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

и формулу для производной неизвестной функции $F_2(x)$

$$F_2'(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \left[V_{2x} + \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{S'}{2\pi} + \sigma' \right) \frac{\cos \vartheta}{R} + C(x, R, \vartheta) - \frac{(S'S'')'}{4\pi^2} \ln^2 \frac{R}{\varepsilon^2} - B_1' \ln \frac{R}{\varepsilon^2} \right] \quad (2.5)$$

Здесь через $C(x, R, \vartheta)$ обозначены члены порядка ε^2 в формуле для V_{1x} .

Подстановка формул (1.8) и (1.9) в исходные уравнения дает возможность ввести потенциал Φ_2 и выписать линейное неоднородное уравнение, которому он удовлетворяет. Из граничного условия (2.4) следует, что $\Phi_2(x, R, \vartheta)$ можно представить в виде суммы

$$\Phi_2(x, R, \vartheta) = \Phi_{21}(z, R) + \Phi_{22}(x, R) \cos \vartheta \quad (2.6)$$

явно выделяющей зависимость от угловой координаты ϑ .

Осесимметричная часть потенциала Φ_2 удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial R} \right) - (\kappa + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} \right) = \\ = \frac{1}{2} (\kappa + 1) (2\kappa - 1) \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial R} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

и граничному условию, получающемуся из (2.4) в результате отбрасывания первого слагаемого. Функция $\Phi_{22}(x, R)$ будет решением однородного уравнения

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial R} \right) - (\kappa + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x} \right) + \frac{\Phi_{22}}{R} = 0 \quad (2.8)$$

с граничным условием

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^2 \partial \Phi_{22} / \partial R = \sigma(x) \quad (2.9)$$

При $x^2 + R^2 \rightarrow \infty$ производные обеих функций $\partial \Phi_{21} / \partial x \rightarrow \partial \Phi_{22} / \partial x \rightarrow 0$. Отметим, что оба уравнения (2.7) и (2.8) принадлежат к смешанному эллиптическо-гиперболическому типу, а линия перехода определяется из решения уравнения Кармана (1.12).

Следует еще доказать, что формула (2.5) действительно определяет функцию, зависящую только от x . Это легко устанавливается непосредственной подстановкой в (2.5) первых членов разложения решений уравнений (1.12), (2.7) и (2.8) в окрестности оси x . Таким образом, потенциал течения вблизи тела как в первом, так и во втором приближении определяется с точностью до функций от x , величина которых находится из решения задачи об обтекании эквивалентного тела вращения под нулевым углом атаки и таким же распределением площадей поперечных сечений $S(x)$. Отсюда вытекает установленное Уиткомбом [6] и Осватичем [7] правило площадей, справедливое как в первом, так и во втором приближении.

После того, как найдены потенциалы внутреннего разложения φ_1 и φ_2 можно определить силы и моменты, действующие на обтекаемое тело. Из уравнения Бернулли следует формула для коэффициента давления

$$\begin{aligned} c_p = -\varepsilon^2 (-K + 2v_{1x} + v_{1r}^2 + v_{1\vartheta}^2) + \varepsilon^4 [K(-K + 2v_{1x} + v_{1r}^2 + v_{1\vartheta}^2) + \\ + 1/4 (-K + 2v_{1x} + v_{1r}^2 + v_{1\vartheta}^2)^2 - 2(v_{2x} + v_{1r}v_{2r} + v_{1\vartheta}v_{2\vartheta})] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для определения аэродинамических сил нужно умножить (2.10) на величину направляющих косинусов нормали и проинтегрировать по поверхности тела.

Наиболее просто находится нормальная сила. Действительно, представим коэффициент c_p разложенным в ряд Фурье по угловой координате. Тогда нормальная сила определяется величиной коэффициента при $\cos \vartheta$ в этом разложении, который не зависит от функции $F_2(x)$. Таким образом, распределение нагрузки по телу определяется, если известно распределение давления по эквивалентному телу вращения под нулевым углом атаки. Последнее можно получить, например, экспериментально.

3. В качестве примера применения изложенной теории второго порядка рассмотрим трансзвуковое обтекание тонкого тела вращения под малым углом атаки. В этом случае функция ρ зависит только от x и определение величин внутреннего разложения удается провести до конца.

Потенциал φ_1 , представляющий решение задачи (1.5), (1.6), дается формулой

$$\varphi_1(x; r, \vartheta) = \rho \rho' \ln r - \frac{\alpha}{\varepsilon} \rho^2 \frac{\cos \vartheta}{r} + F_1(x) \quad (3.1)$$

Вычисление потенциала φ_2 производится, как указано в предыдущем пункте и приводит к весьма громоздкому выражению

$$\varphi_2(x; r, \vartheta) = F_2(x) + a_0(x, r) - \frac{\alpha}{\varepsilon} a_1(x, r) \cos \vartheta - \frac{\alpha^2}{2\varepsilon^2} a_2(x, r) \cos 2\vartheta \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} (\rho\rho')^{2'} \ln^2 r + \rho\rho' \left[F_1' - (\rho\rho')' \ln \rho - \frac{1}{2} \rho'^2 \right] \ln r - \frac{(\rho\rho')^3}{4r^2} + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4\varepsilon^2} \rho \left[(9\rho' + 2x\rho'') \ln r + \frac{6\rho^2\rho'}{r^2} - \frac{\rho^4\rho'}{r^4} \right] \\ a_1 &= \rho^2 (4\rho'^2 + \rho\rho'') \frac{\ln r}{r} - \rho^2 \left(3\rho'^2 \ln \rho + \frac{3}{2} \rho'^2 - F_1' \right) \frac{1}{r} + \\ &+ \frac{\rho^4\rho'^2}{2r^3} + \frac{\alpha^2}{12\varepsilon^2} \rho^2 \left(\frac{5}{r} - \frac{6\rho^2}{r^3} + \frac{\rho^4}{r^5} \right) \\ a_2 &= 2\rho^3\rho' \frac{\ln r}{r^2} - \rho^3\rho' \left(2 \ln \rho + \frac{31}{12} \right) \frac{1}{r^2} + \frac{\rho^5\rho'}{6r^4} \end{aligned}$$

Для определения коэффициента нагрузки, действующей в сечении рассматриваемого тела вращения, нужно перейти в формулах (3.1) и (3.2) к связанной системе координат x_1, r_1, ϑ_1 и подставить полученные выражения в (2.10), а затем, умножив c_p на $\varepsilon \cos \vartheta_1$, проинтегрировать по углам. В результате получим

$$c_N = 4\alpha\varepsilon^2\pi\rho\rho' + 2\alpha\varepsilon^4\pi\rho\rho'[-K + 2(\rho\rho')' \lg \rho + 2F_1' - 2\rho'^2 - 2\rho\rho''] + \alpha^3\varepsilon^2\rho(1/3\rho' - 2x_1\rho'') \quad (3.3)$$

Функция $F_1(x)$, входящая в (3.3), должна быть определена из решения внешней задачи в первом приближении. Для конуса при $M_\infty = 1$ она легко извлекается из результатов численного расчета Иосихары [8], либо находится при помощи приближенного метода Спрейтера и Оксна [9].

Коэффициент полной поперечной силы, действующей на тело, получается в результате интегрирования (3.3) вдоль оси. Для конуса его производная по углу атаки при $\alpha = 0$ и $M_\infty = 1$, отнесенная к площади хвостового сечения, дается формулой

$$C_N^\alpha = 2 - \varepsilon^2(1.91 - 4 \ln \varepsilon) \quad (3.4)$$

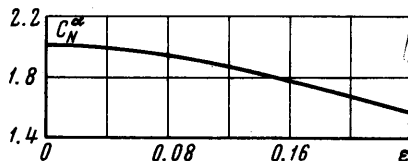
На фиг. 2 построен график этой кривой.

В заключение автор благодарит О. С. Рыжова за обсуждение результатов работы. К сожалению уже при последней корректуре автору стало известно, что большая часть результатов п. 2 опубликована в статье Хейза [10].

Поступило 3 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics N. Y.—London, Acad. Press, 1964.
2. Ward G. N. Supersonic flow past slender pointed bodies. Quart. J. Mech., Appl. Math., 1949, vol. 2, No. 1.
3. Adams M. C., Sears W. R. Slender-body theory review and extensions. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 2.
4. von Karman Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
5. Общая теория аэродинамики больших скоростей. Ред. Спрс У. Р., раздел Е, М., Воениздат, 1962.
6. Whitcomb R. T. Zero-lift-drag characteristics of wing-body combination at transonic speeds. Aeronaut. Engng. Rev., 1956, vol. 1, No. 15.
7. Oswatich K., Keune F. Ein Aquivalenzsatz für nichtangestellte Flügel kleiner Spannweite in schallhanher Strömung. Flugwissenschaften, 1954, Bd. 3, No. 1.
8. Joshihara H. The flow over a cone—cylinder body at Mach number one. В сб. Third Midlwestern Conference of Fluid Mechanics, 1953.
9. Spreiter J. R., Alksne A. Y. Slender body theory based on approximate solution of the transonic flow equation. NASA TR K-2, 1959.
10. Hayes W. D. La seconde approximation pour les écoulements transsoniques non visqueux. Journal de Mécanique, 1966, vol. 5, No. 2.



Фиг. 2