ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ АНАЛОГИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛЬЕВ

И. С. ЩЕРБАКОВ

(*Москва*)

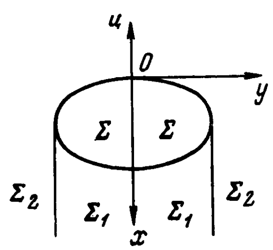
В линейной постановке рассматриваются задачи о гармонических колебаниях и апериодических движениях крыла. На основе представления аэродинамических характеристик через коэффициенты вращательных производных показано, что эти коэффициенты для случая весьма низких частот колебаний и случая линейного закона изменения параметров при апериодическом движении совпадают.

1. Пусть тонкое слабо изогнутое крыло конечного размаха движется под малым углом атаки в идеальной среде. Основное движение крыла — прямолинейное с произвольной постоянной скоростью u. На основное движение крыла наложены малые добавочные неустановившиеся движения, в которых поверхность крыла может деформироваться.

Будем считать, что выполняются все условия линейной теории.

Рассмотрим задачу по определению аэродинамической нагрузки, обусловленной неустановившимися движениями крыла для случаев, когда эти движения определяются гармоническим и линейным законами изменения кинематических параметров.

Примем подвижную систему прямоугольных осей координат $Oxyz$, жестко связанную с крылом (фигура), где x, y, z будем считать безразмерными координатами, отнесенными к хорде крыла.



Аэродинамические коэффициенты сил и моментов, отвечающие неустановившимся движениям, будем выражать через коэффициенты вращательных производных [1]

$$c = \sum_{\nu=1}^{6} (g_\nu c_\nu^{(1)} + g_\nu^{\cdot} c_\nu^{(2)}) \tag{1.1}$$

Здесь g_ν и $g_\nu^{\cdot}$ — безразмерные кинематические параметры движения (деформации) крыла и их первые производные по времени; $c_\nu^{(1)}$ и $c_\nu^{(2)}$ — коэффициенты вращательных производных, соответствующие кинематическим параметрам или их производным.

В рассматриваемых случаях движение в каждый данный момент времени полностью определяется значением кинематических параметров и их первых производных по времени, в связи с чем для каждого из этих случаев представление (1.1) будет точным [1].

При использовании представления (1.1) и заданных кинематических параметрах движения аэродинамическая задача сводится к определению коэффициентов $c_\nu^{(1)}$ и $c_\nu^{(2)}$.

Покажем, что при весьма низких частотах гармонических колебаний одноименные коэффициенты вращательных производных, отвечающие сходственным гармоническому и линейному законам изменения кинематических параметров, имеют один и тот же вид.

Под сходственными гармоническим и линейным законами движения крыла будем понимать такие, для которых условия безотрывности обтекания имеют, соответственно, вид

$$\vartheta_n = -\operatorname{Re} A(x, y) \exp\{ip^*[\tau + \gamma(x, y)]\} \qquad (\tau = ut / b)$$

$$\vartheta_n = -A(x, y)[\tau + \gamma(x, y)] \qquad (p^* = pb / u)$$

Здесь ϑ_n — безразмерная нормальная составляющая абсолютной скорости среды на поверхности крыла, A — известная безразмерная функция координат, τ — безразмерное время, p^* — число Струхаля, p — круговая частота, b — хорда крыла, γ — безразмерная функция, определяющая начальную фазу движения.

В качестве обобщенного кинематического параметра g_ν будем рассматривать местный угол атаки крыла, имея в виду, что каждому из ν параметров в (1.1) соответствует частное распределение местных углов атаки. Для удобства индекс ν в дальнейшем опустим.

В случае гармонических колебаний

$$g = \operatorname{Re} A(x, y) \exp(ip^*\tau), \qquad g^{\cdot} = \operatorname{Re} ip^* A(x, y) \exp(ip^*\tau) \tag{1.2}$$

В случае апериодического движения

$$g = A(x, y)\tau, \qquad g^{\cdot} = A(x, y) \tag{1.3}$$

2. Рассмотрим потенциал скорости $\varphi(x, y, z, \tau)$, обусловленный изучаемыми неустановившимися движениями.

Потенциал в принятой системе координат должен удовлетворять в общем случае [2, 3] уравнению

$$(1-M^2)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}-M^2\varphi_{x\tau}-2M^2\varphi_{x\tau}=0 \tag{2.1}$$

(где M — число Маха) и следующим условиям на плоскости xy.

На проекции крыла Σ должны выполняться условия:

для случая гармонических колебаний

$$[\varphi_z]_\Sigma=-\operatorname{Re}A(x, y)\exp\{ip^*[\tau+\gamma(x, y)]\} \tag{2.2}$$

для апериодического движения

$$[\varphi_z]_\Sigma=-A(x, y)[\tau+\gamma(x, y)] \tag{2.3}$$

На проекции вихревой пелены Σ_1

$$[\varphi_\tau+\varphi_x]_{\Sigma_1}=0 \tag{2.4}$$

а на задней кромке, если она дозвуковая

$$[\varphi_\tau+\varphi_x]_{z=+0}=[\varphi_\tau+\varphi_x]_{z=-0} \tag{2.5}$$

Вне крыла и вихревой пелены в области Σ_2, где среда возмущена

$$[\varphi]_{\Sigma_2}=0 \tag{2.6}$$

Кроме того, если скорость основного движения — сверхзвуковая, то вне волны возмущения всюду

$$\varphi_z=0 \tag{2.7}$$

Представим потенциал φ аналогично (1.1)

$$\varphi=g\varphi^{(1)}+\dot g\varphi^{(2)} \tag{2.8}$$

Здесь $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ — некоторые «единичные потенциалы».

Покажем, что единичные потенциалы, отвечающие гармоническому закону, равны соответствующим единичным потенциалам, отвечающим линейному закону изменения кинематических параметров.

Покажем это на основе сравнения условий, которым должны удовлетворять функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$.

Подставим в (2.1)—(2.7) представление (2.8) применительно к законам движения (1.2) и (1.3) и выделим для каждого из них члены при одинаковых параметрах. В результате получим дифференциальные уравнения и граничные условия на плоскости xy, которым удовлетворяют функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$.

Сравнивая эти уравнения и граничные условия для гармонического при $p^*\to 0$ и линейного законов движения, приходим к выводу, что они в точности одинаковы. Для каждого из этих движений функции $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$(1-M^2)\varphi_{xx}^{(1)}+\varphi_{yy}^{(1)}+\varphi_{zz}^{(1)}=0, \quad (1-M^2)\varphi_{xx}^{(2)}+\varphi_{yy}^{(2)}+\varphi_{zz}^{(2)}-2M^2\varphi_x^{(1)}=0 \tag{2.9}$$

и условиям на плоскости xy:

в области Σ

$$[\varphi_z^{(1)}]_\Sigma=-1, \qquad [\varphi_z^{(2)}]_\Sigma=-\gamma(x, y) \tag{2.10}$$

в области Σ_1

$$[\varphi_x^{(1)}]_{\Sigma_1}=0, \qquad [\varphi_x^{(2)}-\varphi^{(1)}]_{\Sigma_1}=0 \tag{2.11}$$

на задней кромке, если она дозвуковая

$$[\varphi_x^{(1)}]_{z=0}=[\varphi_x^{(1)}]_{z=-0} \qquad [\varphi_x^{(2)}-\varphi^{(1)}]_{z=+0}=[\varphi_x^{(2)}-\varphi^{(1)}]_{z=-0} \tag{2.12}$$

в области Σ_2

$$[\varphi^{(1)}]_{\Sigma_2}=[\varphi^{(2)}]_{\Sigma_2}=0 \tag{2.13}$$

всюду вне волны возмущения (при $M>1$)

$$\varphi_z^{(1)}=\varphi_z^{(2)}=0 \tag{2.14}$$

Отсюда непосредственно вытекают равенства одноименных коэффициентов $c_\nu^{(1)}$ и $c_\nu^{(2)}$ для обоих рассматриваемых законов движения, что и требовалось доказать.

Доказанное свойство аналогии в пределах линейной теории справедливо для крыльев любой формы в плане и любых скоростей полета.

Свойство аналогии может быть полезным как средство определения или проверки аэродинамических характеристик одного из рассмотренных видов неустановившегося движения по уже имеющимся результатам для другого.

3. Используя свойство аналогии, можно установить простые соотношения между коэффициентами вращательных производных крыльев, движущихся в гармоническом порыве, и коэффициентами вращательных производных тех же крыльев при гармонических колебаниях в невозмущенной среде при $p^* \to 0$.

В случае движения крыла в гармоническом порыве

$$[\varphi_z]_\Sigma = -\mathrm{Re}\, B \exp[ip^*(\tau - x)], \qquad g = \Delta = \mathrm{Re}\, B \exp(ip^* r) \tag{3.1}$$

В случае гармонических колебаний крыла в невозмущенной среде

$$[\varphi_z]_\Sigma = -\mathrm{Re}\, B \exp(ip^* r), \qquad g = \alpha = \mathrm{Re}\, B \exp(ip^* r), \qquad B = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

Аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента крыла, обусловленные этими видами движения, будем обозначать соответственно через

$$(c_z)_\Delta, \qquad (m_y)_\Delta, \qquad (c_z)_\alpha, \qquad (m_y)_\alpha$$

а соответствующие им коэффициенты вращательных производных через

$$c_z^\Delta, \quad c_z^{\Delta^\cdot}, \quad m_y^\Delta, \quad m_y^{\Delta^\cdot}; \qquad c_z^\alpha, \quad c_z^{\alpha^\cdot}, \quad m_y^\alpha, \quad m_y^{\alpha^\cdot}$$

Сопоставим эти два движения со сходственными им апериодическими движениями крыла с линейным изменением кинематических параметров.

Для движения в гармоническом порыве сходственным будет движение, где

$$[\varphi_z]_\Sigma = -B(\tau - x), \qquad g = \Delta_1 = B\tau \tag{3.3}$$

что соответствует случаю движения крыла в дискретном порыве с линейно изменяющейся по глубине интенсивностью.

Для гармонических колебаний крыла в невозмущенной среде сходственным будет движение, где

$$[\varphi_z]_\Sigma = -B\tau, \qquad g = \alpha_1 = B\tau \tag{3.4}$$

что соответствует поступательному перемещению крыла с линейным по времени изменением угла атаки.

Аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента крыла, обусловленные этими сходственными движениями, обозначим через

$$(c_z)_{\Delta_1}, \quad (m_y)_{\Delta_1}; \qquad (c_z)_{\alpha_1}, \quad (m_y)_{\alpha_1},$$

а соответствующие им коэффициенты вращательных производных через

$$c_z^{\Delta_1}, \quad c_z^{\Delta_1^\cdot}, \quad m_y^{\Delta_1}, \quad m_y^{\Delta_1^\cdot}; \qquad c_z^{\alpha_1}, \quad c_z^{\alpha_1^\cdot}, \quad m_y^{\alpha_1}. \quad m_y^{\alpha_1^\cdot}$$

Обратимся к условию (3.3). Нетрудно видеть, что движение, определяемое этим условием, можно рассматривать как сумму двух движений крыла в невозмущенной среде: первое — поступательное движение, соответствующее случаю (3.4); второе — вращательное движение около оси y с постоянной безразмерной угловой скоростью

$$\omega_y = B, \qquad \omega_y = \Omega b / u \tag{3.5}$$

где Ω — угловая скорость вращения.

Коэффициенты подъемной силы и момента, отвечающие равномерному вращению крыла, обозначим через $(c_z)_{\omega_y}$ и $(m_y)_{\omega_y}$, а соответствующие им коэффициенты вращательных производных через $c_z^{\omega_y}$ и $m_y^{\omega_y}$. На основе сказанного можем записать

$$(c_z)_{\Delta_1} = (c_z)_{\alpha_1} - (c_z)_{\omega_y}, \qquad (m_y)_{\Delta_1} = (m_y)_{\alpha_1} - (m_y)_{\omega_y} \tag{3.6}$$

что непосредственно приводит к равенствам

$$c_z^{\Delta_1} = c_z^{\alpha_1} \quad c_z^{\Delta_1^\cdot} = c_z^{\alpha_1^\cdot} - c_z^{\omega_y}, \quad m_y^{\Delta_1} = m_y^{\alpha_1}, \quad m_y^{\Delta_1^\cdot} = m^{\alpha_1}{}_y^{\cdot} - m_y^{\omega_y} \tag{3.7}$$

С другой стороны, на основании свойства аналогии

$$c_z^{\Delta_1} = c_z^\Delta, \quad c_z^{\Delta_1^\cdot} = c_z^{\Delta^\cdot} \quad c_z^{\alpha_1} = c_z^\alpha, \quad c_z^{\alpha_1^\cdot} = c_z^{\alpha^\cdot}$$

$$m_y^{\Delta_1} = m_y^\Delta, \quad m_y^{\Delta_1^\cdot} = m_y^{\Delta^\cdot}, \quad m_y^{\alpha_1} = m_y^\alpha, \quad m_y^{\alpha_1^\cdot} = m_y^{\alpha^\cdot} \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.7) и (3.8) и имея в виду, что коэффициенты вращательных производных равномерно вращающегося крыла равны аналогичным коэффициентам гармонически колеблющегося крыла при $p^* \to 0$, окончательно получим

$$c_z^\Delta = c_z^\alpha, \quad c_z^{\Delta^\cdot} = c_z^{\alpha^\cdot} - c_z^{\omega_y}, \quad m_y^\Delta = m_y^\alpha, \quad m_y^{\Delta^\cdot} = m_y^{\alpha^\cdot} - m_y^{\omega_y} \tag{3.9}$$

Здесь в правых частях равенств стоят коэффициенты вращательных производных, соответствующие гармоническим колебаниям крыла в невозмущенной среде.

Таким образом, коэффициенты вращательных производных крыльев в гармоническом порыве при $p^* \to 0$ могут быть найдены по соотношениям (3.9), если известны соответствующие коэффициенты вращательных производных тех же крыльев при гармонических колебаниях в невозмущенной среде.

Так же, как и свойство аналогии, соотношения (3.9) в пределах линейной теории справедливы для крыльев произвольной формы в плане и любых скоростей полета. Аналогичные соотношения для дозвуковых скоростей ранее были получены О. Н. Соколовой.

Поступило 14 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических моментов и сил при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 7, стр. 53—70.
2. Красильщикова Е. А. Неустановившиеся движения крыла конечного размаха в сжимаемой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 3, стр. 25—32.
3. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М., Гостехиздат, 1952.

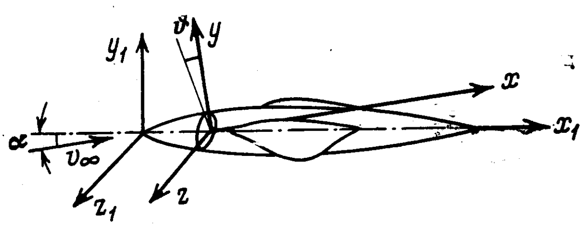
ТРАНСЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКИХ ТЕЛ

Ю. Б. ЛИФШИЦ (*Москва*)

При помощи метода сращиваемых асимптотических разложений, достаточно подробное изложение которого можно найти в книге Ван Дайка [1], строится во втором приближении течение около тонких трехмерных тел в потоке газа с $M_\infty \sim 1$. В качестве малого параметра берется максимальная относительная толщина ε. Аналогичная задача для сверх- и дозвуковых течений решалась путем построения решения линейных уравнений, описывающих поток на некотором расстоянии от тела, и распространения его к оси [2, 3]. При трансзвуковых скоростях набегающего потока такой способ неприменим из-за нелинейности уравнения внешнего течения. Изложенный ниже способ дает возможность построить решение задачи во всем диапазоне скоростей, при этом автоматически получается правило площадей как в первом, так и во втором приближении. Другим результатом является возможность определения величины аэродинамической нагрузки по известному распределению давления на эквивалентном теле вращения.

1. Пусть искомое течение описывается уравнением неразрывности, уравнением Бернулли и уравнениями вихря и удовлетворяет условию непротекания на теле единичной длины, заданном уравнением

$$r_1 = \varepsilon\rho(x_1, \vartheta_1) \qquad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь (фиг. 1) x_1, r_1, ϑ_1 — связанная с телом цилиндрическая система координат. Будем считать, что тело расположено под углом атаки $\alpha = O(\varepsilon)$. Введем еще одну координатную систему x, r, ϑ такую, что ось x направлена вдоль вектора скорости набегающего потока, а r, ϑ представляет собой полярную систему координат в плоскостях, перпендикулярных оси x, и полюсом в точках оси тела x_1. В новых координатах тело (1.1) с точностью до членов ε^5 представляется формулой

$$r = \varepsilon\rho + \alpha\varepsilon^2\left[\frac{\alpha}{4\varepsilon}\left(2x\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\right) - \rho\frac{\partial\rho}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\alpha}{4\varepsilon}\left(\rho\cos 2\vartheta + \frac{\partial\rho}{\partial\vartheta}\sin 2\vartheta\right)\right] \qquad (1.2)$$

Ищем решение задачи в окрестности тела в виде разложения по еще неопределенным малым параметрам

$$\begin{aligned} v_x &= a_*(1 + v_x') = a_*(1 + \gamma_1 v_{1x}' + \gamma_2 v_{2x}' + \ldots) \\ v_r &= a_* v_r' = (a_*(\delta_1 v_{1r}' + \delta_2 v_{2r}' + \ldots) \\ v_\vartheta &= a_* v_\vartheta' = a_*(\delta_1 v_{1\vartheta}' + \delta_2 v_{2\vartheta}' + \ldots) \end{aligned} \qquad (1.3)$$