

распределенных пространственных источников (стоков) дает функцию тока суммарного течения вида

$$\Psi = -\frac{1}{2} V_{\infty} \rho_1^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^a \frac{q(\xi)(z_1 - \xi) d\xi}{\sqrt{(z_1 - \xi)^2 + \rho_1^2}} - \frac{1}{4\pi} \int_0^a q(\xi) d\xi \quad (20)$$

Здесь $q(\xi)$ — обильность источников на элементе $d\xi$ оси тела вращения x_1 , а $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.

В выражении (20) не учтена проницаемость струи. Задача о нахождении формы проницаемого тела с заданным на его поверхности законом нормальной к поверхности скорости всасывания в принципе разрешима. Но учитывая сложность задачи, в первом грубом приближении можно проницаемостью тела пренебречь.

Приравнивание функции тока Ψ нулю дает уравнение наружной границы струи. При помощи (20) можно вычислить скорость и давление на теле вращения. Затем, полученные выражения подставляются в (19), из которого и определяется распределение источников $q(\xi)$.

Поступило 22 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршович Т. А. О турбулентной струе в сносящем потоке. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 1, 1966.
2. Гиршович Т. А. Теоретическое и экспериментальное исследование плоской турбулентной струи в сносящем потоке. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 5, 1966.
3. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Гостехиздат, 1960.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1957.
6. Гиневский А. С. Турбулентные след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.

ТЕЧЕНИЕ В ИСТЕКАЮЩИХ ИЗ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СОПЕЛ СТРУЯХ

В. Н. ГУСЕВ, Т. В. КЛИМОВА

(Москва)

1. Рассматриваются гиперзвуковые струйные течения идеального газа. Под последними здесь понимаются течения в бесконечно тонких слоях уплотненного газа, плотность в которых существенно больше плотности газа в окружающем пространстве.

Ограничимся в дальнейшем плоским и осесимметричным случаями. Пусть n и l — координаты по нормали и касательной к сжатому слою, а N — радиус кривизны последнего. Рассмотрим движение газа внутри сжатого слоя в предположении, что его толщина Δn пренебрежимо мала, а скорость газа в нем мало отличается от максимальной U_m . В точке с координатой l для разности Δp давлений по нормали к рассматриваемому сжатому слою можно записать

$$\Delta p = \rho \frac{U_m^2}{N} \Delta n \quad (1.1)$$

Здесь ρ — характерная плотность газа в сжатом слое. Вводя выражение для отнесенного к единице длины расхода $q = \rho U_m \Delta n$ через сжатый слой, преобразуем соотношение (1.1) к виду

$$\Delta p = \frac{q U_m}{N} \quad (1.2)$$

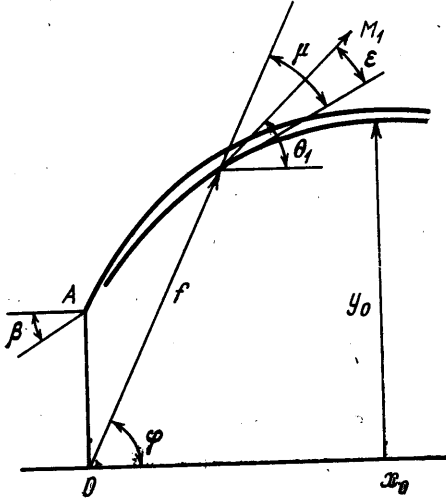
В дальнейшем последнее выражение используется для расчета течения в истекающих из недорасширенных сопел струях.

2. Рассмотрим осесимметричную сверхзвуковую струю газа, истекающую из произвольного сопла в покоящуюся среду, давление в которой равно p_a . Когда течение внутри струи оказывается перерасширенным относительно внешнего давления p_a , внутри струи возникает скачок уплотнения с примыкающим к нему сжатому слою. В случае осесимметричной гиперзвуковой струи, истекающей из расчетного или перерасширенного сопла с коническим потоком на выходе, решение по-

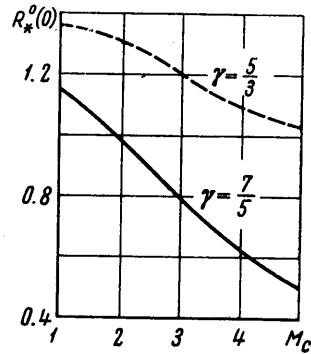
ставленной задачи было дано в работе [1]. Остановимся здесь на случае истечения гиперзвуковой струи из недорасширенного сопла.

Введем следующие обозначения: r, φ — полярные координаты (фиг. 1) с полюсом в точке O ; β — угол наклона контура сопла в точке A ; $r = r_c f(\varphi)$ — контур скачка; r_c — радиус выходного сечения сопла. Пусть Q — суммарный расход газа через кольцевой сжатый слой. Тогда $q = Q / 2\pi r \sin \varphi$ и для перепада давления по нормали к сжатому слою из (1.2) следует

$$\Delta p = \frac{QU_m}{2\pi r_c f N \sin \varphi} \quad (2.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Опуская выкладки¹, для контура скачка получим следующее дифференциальное уравнение:

$$f'' = f + 2 \frac{f^2}{f} - \frac{2\pi r_c^2 p_0}{QU_m} \sin \varphi (f^2 + f'^2)^{3/2} \left\{ P_a \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left(P_a = \frac{p_a}{p_c}, \quad \varepsilon = \mu - (\varphi - \theta_1), \quad \mu = \arctg \left(-\frac{f}{f'} \right) \right)$$

Здесь ε — угол наклона скачка к направлению набегающего потока; μ — угол, образованный направлением радиус-вектора r и направлением касательной к контуру скачка; M и θ — число Маха и угол наклона вектора скорости; γ — отношение удельных теплоемкостей; P_a — перепад давлений в точке A ; p_c, M_c — соответственно давление и число Маха на срезе сопла в той же точке, p_0 — давление торможения газа; индекс единица относится к состоянию перед поверхностью скачка уплотнения; штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной φ . Входящие в уравнение (2.2) величины Q, M_1 и θ_1 будут функциями полярных координат.

Прежде чем перейти к решению уравнения (2.2), остановимся на особенностях истечения сверхзвуковой струи из недорасширенного сопла ($P_a < 1$). Так как статическое давление p_c в конце сопла больше внешнего p_a , расширение газа происходит вне сопла и распространяется в потоке по центрированной в выходной кромке сопла волне разрежения. Значительная область течения в струе оказывается перерасширенной относительно внешнего давления p_a . Течение внутри этой области будет полностью определяться заданием начальных данных в выходном сечении сопла. Например, вдоль оси струи течение асимптотически стремится к течению от некоторого осесимметричного источника с центром в точке O [2]. Для числа Маха здесь справедливо следующее выражение:

$$M = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/4(\gamma+1)} \left[\frac{r^0}{R_*^0(0)} \right]^{\gamma-1} \quad \left(r^0 = \frac{r}{r_c}, \quad R_*^0(0) = \frac{R_*}{r_c} \right) \quad (2.3)$$

Здесь R_* — радиус критического сечения эквивалентного источника. Значения $R_*^0(0)$ для различных значений числа M_c при $\beta = 0$ были определены на основании

¹ Последние даны в работе [1].

численных расчетов методом характеристик¹ и даны на фиг. 2. При $M_c = 1$ значения $R_*^\circ(0)$ совпадают с приведенными в работах [2, 4]. Как показали сравнения, расчеты по формуле (2.3) дают достаточно хорошее совпадение с точными.

Аналогичным образом определяется течение во всей перерасширенной области струи. В соответствии с работой [2] течение вдоль каждого луча $\varphi = \text{const}$ аналогично течению от некоторого эквивалентного источника, интенсивность которого изменяется при переходе от одного луча к другому. Результаты численных расчетов методом характеристик подтверждают это обстоятельство. При достаточно больших значениях r угол наклона вектора скорости $\theta \approx \varphi$, а для числа M справедливо соотношение (2.3), в котором R_*° уже является функцией угла φ . Для иллюстрации на фиг. 3 приведены полученные на основании точных численных расчетов значения $R_*^\circ(\varphi)$ при $M_c = 1$. Там же круглыми точками даны значения $R_*^\circ(\varphi)$, подсчитанные по формуле

$$R_*^\circ(\varphi) = R_*^\circ(0) \cos(\pi\varphi / 2\Phi) \quad (2.4)$$

Последняя получена при помощи аппроксимирующей зависимости для плотности, предложенной в работе [4]. $\Phi = 1.662$ при $\gamma = 7/5$, $\Phi = 1.365$ при $\gamma = 5/3$. Следует отметить, что при малых значениях угла φ функции $R_*^\circ(\varphi)$ изменяется незначительно. Течение в окрестности оси струи можно считать эквивалентным течению от одного источника с радиусом критического сечения $R_*^\circ(0)$.

Вернемся к решению уравнения (2.2). Используем полученные выше асимптотические зависимости для определения входящих в (2.2) неизвестных функций M_1 , θ_1 и Q .

При $r^\circ = f \gg 1$ для них можно записать

$$\theta_1 = \varphi, \quad M_1 = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2(\gamma+1)} \left[\frac{r^\circ}{R_*^\circ(\varphi)} \right]^{\gamma-1} \quad (2.5)$$

$$Q = Q_0 - 2\pi\rho_0 U_m r_c^2 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2(\gamma+1)/(\gamma-1)} \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \int_0^\varphi R_*^\circ(t) \sin t \, dt$$

Здесь ρ_0 — плотность торможения, Q_0 — полный расход газа через недорасширенное сопло. При малых значениях r° соотношения (2.5) теряют силу, и в этой области функции M_1 , θ_1 и Q можно определить численно, например методом характеристик.

Таким образом, поставленная задача свелась к определению функции $f(\varphi)$ из обыкновенного дифференциального уравнения (2.2). В качестве граничных условий следует принять

$$f = 1, \quad \Delta p = 0 \quad \text{при } \varphi = 1/2\pi \quad (2.6)$$

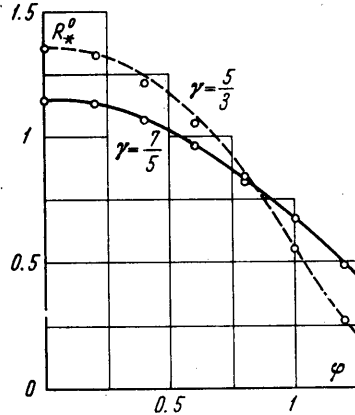
В развернутом виде второе условие можно переписать в виде

$$f_{*1}' = \frac{-M_{*1}^2 \sin 2\theta_{*1} + [M_{*1}^4 \sin^2 2\theta_{*1} - 4(M_{*1}^2 \cos^2 \theta_{*1} - 1)(M_{*1}^2 \sin^2 \theta_{*1} - 1)]^{1/2}}{2(M_{*1}^2 \cos^2 \theta_{*1} - 1)}$$

где индексом * обозначены параметры при $f = 1$ и $\varphi = 1/2\pi$, а M_{*1} и θ_{*1} связаны между собой соотношением

$$\theta_{*1} = \beta_c + \left\{ \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \arctg \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \sqrt{M_{*1}^2 - 1} \right] - \arctg \sqrt{M_{*1}^2 - 1} \right\} - \left\{ \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \arctg \left[\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \sqrt{M_c^2 - 1} \right] - \arctg \sqrt{M_c^2 - 1} \right\}$$

¹ Расчет проводился на ЭВМ по программе, поставленной на основе схемы расчета и формул, представленных в работе [3].



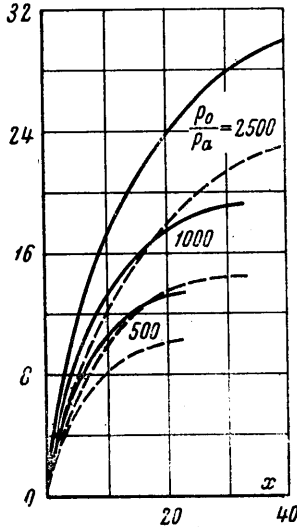
Фиг. 3

При $\frac{1}{2}\pi \geq \varphi \geq \frac{1}{2}\pi - \delta$, где δ — малая величина, решение уравнения (2.2) записывалось в виде

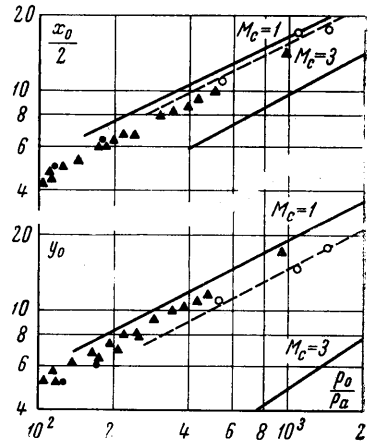
$$f = 1 - f_{*1}'(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$$

При $\varphi < \frac{1}{2}\pi - \delta$ уравнение (2.2) решалось численно методом Рунге — Кутты на ЭВМ. Расчет проводился при нескольких убывающих значениях δ до тех пор, пока предыдущее решение не совпадало с последующим. Интегрирование проводилось до точки $\varphi = \mu$, соответствующей максимальному значению площади миделя струи.

Результаты расчетов формы скачка в случае звукового сопла ($M_c = 1$) при нескольких значениях отношения p_0/p_a для двух значений отношения удельных теплоемкостей ($\gamma = 7/5$ — сплошные, $\gamma = 5/3$ — пунктирные кривые) приведены на фиг. 4. Здесь $x = f \cos \varphi$, $y = f \sin \varphi$. Теоретический расчет формы скачка сравнивается с результатами соответствующего экспериментального исследования. Пос-



Фиг. 4



Фиг. 5

леднее было проведено в потоке гелия ($\gamma = 5/3$) со звуковым соплом при нескольких значениях p_0/p_a . Для иллюстрации картина истекающей из сопла струи при $p_0/p_a = 530$ приведена на фиг. 6. Круглыми точками на этой фигуре нанесены теоретические, следующие из уравнения (2.2), координаты скачка уплотнения, ограничивающего перерасширенную область.



Фиг. 6

Основные геометрические размеры струи истекающей из недорасширенного звукового сопла, представлены на фиг. 5. На ней приведены координаты x_0 , y_0 (фиг. 1) максимального удаления скачка уплотнения от оси струи в зависимости от перепада давления p_0/p_a . Сплошные ($\gamma = 7/5$) и пунктирные ($\gamma = 5/3$) кривые были получены теоретически, экспериментальные данные ($\gamma = 5/3$) представлены на этой фигуре полыми кружками. На фиг. 5 приведены также результаты экспериментальных исследований, заимствованные из работы [5] ($\gamma = 5/3$ — сплошные кружки, $\gamma = 7/5$ — сплошные треугольники).

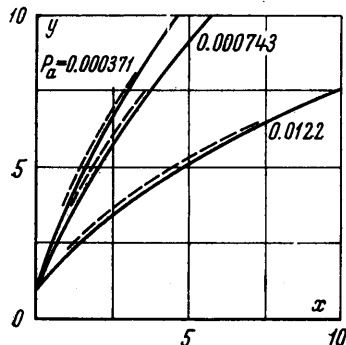
Аналогичные результаты можно получить для произвольного сопла. В случае $M_c = 2.5$; $\beta = 15^\circ$ и $\gamma = 7/5$ форма скачка уплотнения, полученная из уравнения (2.2) при нескольких значениях P_a , приведена на фиг. 7 (сплошные кривые). Для сравнения там же дана форма скачка, следующая из численного расчета методом характеристик (пунктирные кривые) [6]. Влияние числа M_c на основные геометрические размеры струи проиллюстрировано на фиг. 5. На последней дана зависимость координат x_0 и y_0 от перепада давления p_0/p_a при $M_c = 3$, $\beta = 0^\circ$ и $\gamma = 7/5$.

3. Решение, аналогичное рассмотренному, может быть получено при истечении струи в спутный поток. Вернемся к уравнению (2.1). Используя соотношение на скачке уплотнения и уточненную формулу Ньютона для давления на внешней границе сжатого слоя, для контура скачка получим дифференциальное уравнение:

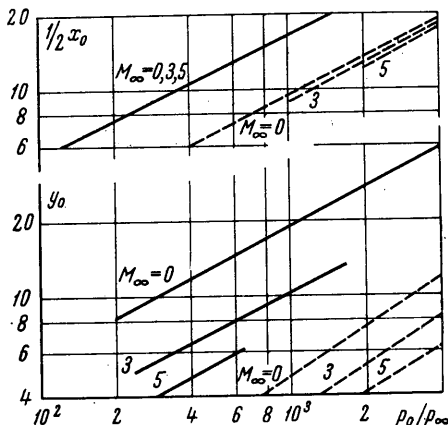
$$f'' = f + 2 \frac{f'^2}{f} - \frac{2\pi r_c^2 p_0}{QU_m} \sin \varphi (f^2 + f'^2)^{3/2} \left\{ P_a \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \times \right. \\ \left. \times \left[(1 - P_\infty) \frac{\sin^2(\varphi - \mu)}{\sin^2 \theta_{*1}} - P_\infty \right] - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\} \\ P_a = \frac{p_\infty}{p_c}, \quad P_\infty = \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (K_c^2 - 1) + (K_c - K)^2 \frac{\kappa(\kappa + 1)}{(\kappa - 1) + 2/K_c^2} \right]^{-1} \\ K_c = K \left\{ \frac{\kappa + 1}{\kappa + 3} + \left[\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa + 3} \right)^2 + \frac{2}{(\kappa + 3)} \frac{1}{K^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad K = M_\infty \theta_{*1}$$

Здесь p_∞ — статическое давление в невозмущенном потоке.

Последние соотношения определяют давление в начальной точке сжатого слоя, которое находится в соответствии с теорией сверхзвуковых течений идеального газа [7]. В данном случае используется метод касательных конусов. В последних соотношениях принято: M_∞ , κ — число Маха и отношение удельных теплоемкостей в невозмущенном потоке.



Фиг. 7



Фиг. 8

Результаты некоторых расчетов формы скачка при истечении струи в спутный поток представлены на фиг. 8 в виде зависимостей координат x_0 , y_0 от перепада давлений p_0/p_a при $\beta = 0^\circ$, $\gamma = \kappa = 7/5$ в двух случаях: $M_c = 1$ (сплошные кривые) и $M_c = 3$ (пунктирные кривые).

Поступило 26 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Н. К расчету гиперзвуковых осесимметричных струй. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 1.
2. Ладыженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
3. Кацкова О. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишина Н. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом касательных конусов. ВЦ АН СССР, 1961.
4. Ashkenas H., Sherman F. S. The structure and utilization of supersonic free jets in low density wind tunnels. Dynamics of Rarefied Gases. Forth Symp. Acad. Press, 1965.
5. Bier K., Schmidt B. Zur form der verdichtungsstöße in frei expandierenden Gassstrahlen. Zeitschrift für angewandte Physik, 1961, H-11.
6. Love E. S., Grigsby C. E., Lee L. P., Woodling M. I. Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets. NASA Technical Report, 1959, R-6.
7. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. 1959, М., Физматгиз.