ЛИТЕРАТУРА

1. Волонская Т. Г. Расчеты сверхзвуковых осесимметричных струй. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1963, № 2.
2. Ашратов Э. А. Расчет осесимметричной струи, вытекающей из сопла при давлении в струе, меньшем давления в окружающей среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
3. Емельянов В. М. Расчет осесимметричной сверхзвуковой струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
4. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
5. Бай Ши-и. Теория струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнения пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд-во МГУ. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1962, № 1.

О ВЕЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Т. А. ГИРШОВИЧ

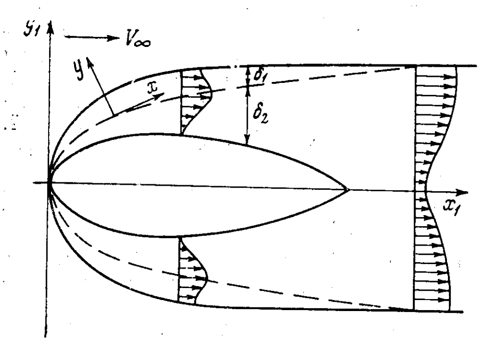
(Москва)

По аналогии с работой о плоской турбулентной струе [1, 2] и в соответствии с [3] считается, что на внешней (передней к потоку) границе струи скорость и давление равны скорости и давлению, получающимся при обтекании твердого полубесконечного тела вращения, имеющего ту же форму, что и изогнутая струя, однородным потоком, направленным по оси тела. На внутренней (задней к потоку) границе струи скорость считается равной нулю, а статическое давление — постоянным. Следует заметить, что этим граничным условием схематизируется сложное течение в застойной области за струей.

Из решения как частный случай получаются известные результаты для веерной затопленной струи.

Очевидно, что рассматриваемая схема течения справедлива на участке, где еще не происходит смыкание пограничного слоя внутри тела вращения, образованного струей (фигура).

Задача решается в криволинейных ортогональных координатах; за ось абсцисс выбирается искривленная ось струи (x — расстояние по образующей от носка тела вращения); за ось ординат — нормаль к оси x в плоскости, проходящей через ось вращения; φ — угол между плоскостью, принятой за $\varphi = 0$ и содержащей в себе ось вращения, и любой другой плоскостью, содержащей в себе эту ось. Такой выбор системы координат позволяет использовать при решении задачи о веерной струе в сносящем потоке уравнения пограничного слоя.



Коэффициенты Ламе, с помощью которых в уравнениях, описывающих движение веерной струи в сносящем потоке, осуществляется переход к криволинейным координатам, определяются аналогично тому, как это сделано в [4], и имеют вид

$$H_x = 1 + y / R, \qquad H_y = 1, \qquad H_\varphi = r + y \tag{1}$$

Известно [4], что уравнения установившегося движения несжимаемой жидкости в отсутствие сил вязкости имеют вид

$$\operatorname{grad} \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \operatorname{rot} \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \tag{3}$$

Уравнение (2) в криволинейных координатах в проекциях на оси x, y и φ с помощью (1) записывается в следующем виде:

$$\frac{R}{R+y}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{r+y}w\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{w^2R}{(R+y)(r+y)}r'(x)+\frac{uv}{R+y}= -\frac{1}{\rho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{4}$$

$$\frac{R}{R+y}u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{r+y}\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{w^2}{r+y}-\frac{u^2}{R+y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{R}{R+y}u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{w}{r+y}\frac{\partial w}{\partial \varphi}-\frac{wv}{r+y}+\frac{R}{R+y}\frac{uw}{r+y}r'(x)= -\frac{1}{\rho(r+y)}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \tag{6}$$

Уравнение (3) в криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(r+y)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(r+y)(R+y)/R]+\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[w\frac{R+y}{R}\right]=0 \tag{7}$$

В случае истечения незакрученной веерной струи $w=0$ и $\partial(\ldots)/\partial\varphi=0$. Учитывая, что в пограничном слое струи $y\ll R$, $y\ll r$, $v\ll u$ и производя обычным образом осреднение [4, 5] для получения дифференциальных уравнений осредненного турбулентного движения несжимаемой жидкости, получаем систему уравнений турбулентного пограничного слоя в случае веерной и плоской турбулентных струй в сносящем потоке

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y},\qquad \frac{u^2}{R}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\qquad \frac{\partial (ur^j)}{\partial x}+\frac{\partial (vr^j)}{\partial y}=0 \tag{8}$$

Здесь $j=0$ для плоской струи, $j=1$ для веерной струи.

Для решения задачи о турбулентной струе, вытекающей из бесконечно тонкой кольцевой щели (кольцевого источника) или из плоской бесконечно тонкой щели [1, 2], требуется решить систему уравнений (8) при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} u=u_\delta,\quad p=p_\delta,\quad \partial u/\partial y=0 \quad \text{при } y=\delta_1 \\ u=u_m,\quad v=0 \quad \text{при } y=0;\qquad u=0,\quad p=0,\quad \partial u/\partial y=0 \quad \text{при } y=\delta_2 \end{gathered} \tag{9}$$

(давление отсчитывается от давления в области за струей — внутри тела вращения). Задача о веерной струе решается при тех же допущениях, и тем же методом полиномиального представления профиля касательных напряжений [6], что и задача о плоской струе. В результате получается такой же, как в [1], относительный профиль избыточной скорости

$$\frac{u-u_{\delta i}}{u_m-u_{\delta i}}=1-\frac{5}{2}\eta_i^{3/2}+\frac{3}{2}\eta_i^{5/2} \tag{10}$$

и такое же алгебраическое соотношение между ординатами внутренней и наружной границ веерной струи, как и для плоской [1]

$$\delta_1=-\delta_2(1-u_\delta/u_m)^{2/3} \tag{11}$$

Для определения трех неизвестных величин u_m, δ_1 и δ_2 служат уравнение (11), дифференциальное уравнение для скорости на искривленной оси струи

$$u_m^2=\frac{16}{225}\left[u_mu_m'+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0}\right]\frac{\delta_2}{\beta^2} \tag{12}$$

и интегральное соотношение, получающееся при помощи интегрирования поперек внутренней части струи первого уравнения системы (8) с использованием уравнения неразрывности

$$\frac{d}{dx}\left[r^j\int_0^{\delta_2}\left(u^2+\frac{p}{\rho}\right)dy\right]-[r^j(x)]'\int_0^{\delta_2}\frac{p}{\rho}dy=0 \tag{13}$$

Отсюда

$$(2\pi r)^j \int\limits_0^{\delta_2} \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) dy = -K_2 + \int\limits_0^x \left\{ [r^j]' \int\limits_0^{\delta_2} \frac{p}{\rho} dy \right\} dx \tag{14}$$

Здесь K_2 — кинематический импульс внутренней части струи. Как и в [1], будем в первом приближении считать, что K_2 — половина импульса струи. Более точно эту величину можно определить из решения для начального участка струи в сносящем потоке. Оценка показала, что максимальная величина интеграла в правой части выражения (14) (при $x = 80$) составляет примерно 2% от первого члена, стоящего в правой части этого уравнения, поэтому этим интегралом можно пренебречь. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\delta_2} \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) dy = -\frac{K_2}{(2\pi r)^j}$$

В результате интегрирования в полученном выражении с использованием второго уравнения системы (8) находим

$$u_m^2 = -\frac{K_2}{(2\pi r)^j \delta_2} \left(\frac{33}{112} - \frac{5}{84} \frac{\delta_2}{R} \right)^{-1} \tag{15}$$

При $V_\infty \to 0$, $R \to \infty$ и $r \to x$ это выражение (15) дает скорость на оси затопленной веерной струи

$$u_m^2 = -56K_2 / 33\pi x \delta_2 \tag{16}$$

или при $j = 0$ — на оси затопленной плоской струи

$$u_m^2 = -112K_2 / 33\delta_2$$

Подстановка (15) в уравнение (12) и небольшие преобразования приводят к следующему дифференциальному уравнению для внутренней границы струи

$$\delta_2'(x) = \frac{[-{}^{225}/_8\beta^2 - (1 - {}^{33}/_{56}\delta_2 R^{-1})(r^j)'(r^j)^{-1}]({}^{33}/_{112} - {}^{5}/_{84}\delta_2 R^{-1}) + 0.1138\delta_2^2 R^{-2} R'}{{}^{33}/_{112} - {}^{5}/_{42}\delta_2 R^{-1} + {}^{55}/_{784}\delta_2^2 R^{-2}}$$

$$(\beta^2 = l^2 / \delta_2^2) \tag{17}$$

При $V_\infty \to 0$, $R \to \infty$ и $r \to x$ получается уравнение для определения границы веерной затопленной струи

$$\delta_2' = -{}^{225}/_8\beta^2 - \delta_2 / x$$

Отсюда

$$\delta_2 = -{}^{225}/_{16}\beta^2 x$$

или при $j = 0$ — уравнение границы затопленной плоской струи

$$\delta_2 = -{}^{225}/_8\beta^2 x$$

Уравнение (17) можно решить методом последовательных приближений. Для приближения $k + 1$ имеет место формула

$$\delta_{2,k+1} = \tag{18}$$

$$= \int\limits_0^x \frac{[{}^{225}/_8\beta^2 - (1 - {}^{33}/_{56}\delta_{2,k} R^{-1})(r^j)'(r^j)^{-1}]({}^{33}/_{112} - {}^{5}/_{84}\delta_{2,k} R^{-1}) + 0.1138\delta_{2,k}^2 R^{-2} R'}{{}^{33}/_{112} - {}^{5}/_{42}\delta_{2,k} R^{-1} + {}^{55}/_{784}\delta_{2,k}^2 R^{-2}} dx$$

Форма оси плоской струи в сносящем потоке определялась в [1, 2]. Для полного решения задачи осталось найти форму полутела, образованного веерной струей в сносящем потоке. Форму полутела и радиус продольной кривизны можно определить из условия, что давление на наружной границе струи должно равняться давлению, полученному из обтекания струи как полубесконечного тела вращения. Это условие имеет вид

$$\frac{P_\delta}{\rho} = -\frac{33}{112} \frac{\delta_2}{R} u_m^2 + \frac{\delta_1}{R} u_m^2 \left[\frac{7}{16} \frac{u_\delta^2}{u_m^2} + \frac{15}{56} \frac{u_\delta}{u_m} + \frac{33}{112} \right] \tag{19}$$

Обтекание полубесконечного тела вращения можно получить, например, методом наложения потоков. Наложение безграничного потока на поток от непрерывно распределенных пространственных источников (стоков) дает функцию тока суммарного течения вида

$$\Psi = -\frac{1}{2} V_\infty \rho_1^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^a \frac{q(\xi)(z_1 - \xi)\, d\xi}{\sqrt{(z_1 - \xi)^2 + \rho_1^2}} - \frac{1}{4\pi} \int_0^a q(\xi)\, d\xi \qquad (20)$$

Здесь $q(\zeta)$ — обильность источников на элементе $d\xi$ оси тела вращения x_1, а $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$.

В выражении (20) не учтена проницаемость струи. Задача о нахождении формы проницаемого тела с заданным на его поверхности законом нормальной к поверхности скорости всасывания в принципе разрешима. Но учитывая сложность задачи, в первом грубом приближении можно проницаемостью тела пренебречь.

Приравнивание функции тока Ψ нулю дает уравнение наружной границы струи. При помощи (20) можно вычислить скорость и давление на теле вращения. Затем, полученные выражения подставляются в (19), из которого и определяется распределение источников $q(\xi)$.

Поступило 22 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршович Т. А. О турбулентной струе в сносящем потоке. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 1, 1966.
2. Гиршович Т. А. Теоретическое и экспериментальное исследование плоской турбулентной струи в сносящем потоке. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 5, 1966.
3. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Гостехиздат, 1960.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1957.
6. Гиневский А. С. Турбулентные след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.

ТЕЧЕНИЕ В ИСТЕКАЮЩИХ ИЗ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СОПЕЛ СТРУЯХ

В. Н. ГУСЕВ, Т. В. КЛИМОВА

(Москва)

1. Рассматриваются гиперзвуковые струйные течения идеального газа. Под последними здесь понимаются течения в бесконечно тонких слоях уплотненного газа, плотность в которых существенно больше плотности газа в окружающем пространстве.

Ограничимся в дальнейшем плоским и осесимметричным случаями. Пусть n и l — координаты по нормали и касательной к сжатому слою, а N — радиус кривизны последнего. Рассмотрим движение газа внутри сжатого слоя в предположении, что его толщина Δn пренебрежимо мала, а скорость газа в нем мало отличается от максимальной U_m. В точке с координатой l для разности Δp давлений по нормали к рассматриваемому сжатому слою можно записать

$$\Delta p = \rho \frac{U_m^2}{N} \Delta n \qquad (1.1)$$

Здесь ρ — характерная плотность газа в сжатом слое. Вводя выражение для отнесенного к единице длины расхода $q = \rho U_m \Delta n$ через сжатый слой, преобразуем соотношение (1.1) к виду

$$\Delta p = \frac{q U_m}{N} \qquad (1.2)$$

В дальнейшем последнее выражение используется для расчета течения в истекающих из недорасширенных сопел струях.

2. Рассмотрим осесимметричную сверхзвуковую струю газа, истекающую из произвольного сопла в покоящуюся среду, давление в которой равно p_a. Когда течение внутри струи оказывается перерасширенным относительно внешнего давления p_a, внутри струи возникает скачок уплотнения с примыкающим к нему сжатым слоем. В случае осесимметричной гиперзвуковой струи, истекающей из расчетного или перерасширенного сопла с коническим потоком на выходе, решение по-