

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ДАВЛЕНИЙ ПРИСОЕДИНЕНИЯ И ОТРЫВА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Л. В. ГОГИН (Москва)

Излагается интегральный метод расчета критических отношений давления, связанных с присоединением и отрывом турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Расчет основывается на применении уравнений сохранения, прилагаемых к контрольным сечениям условных начала и конца области присоединения или отрыва турбулентного слоя. Трением и смещением в этих областях течения вязкого слоя пренебрегается, однако учитываются реальные особенности процесса повышения давления при присоединении (волна сжатия) и отрыве (скачок).

1. На основании экспериментальных исследований различных типов сверхзвуковых отрывных течений установлено, что они обычно состоят из четырех характерных областей, связанных с развитием вязкого слоя: области (1) перехода от течения в невозмущенном пограничном слое к струйному течению (область отрыва пограничного слоя); области (2) развития струйного почти изобарического слоя смещения на границе между внешним сверхзвуковым потоком и застойной областью со слабыми возвратными течениями; области (3) присоединения, или перехода струйного течения в течение типа следа, внутри которой располагается критическая точка, замыкающая зону возвратного циркуляционного течения (так называемый ближний след); области (4) развития следа (дальний след).

Установлено также, что критические отношения давлений отрыва и присоединения турбулентного пограничного слоя, представляющие собой отношения давлений в конце и начале областей (1) и (3), оказываются только функцией характерного числа  $M$  внешнего потока и практически не зависят от числа  $R$  и условий отрыва и присоединения [1-6].

Для объяснения полученных результатов используются различные, иногда несогласующиеся между собой модели течений, которые дают в основном удовлетворительное совпадение с экспериментом. (Расчет критических давлений для отрыва дан, в частности, в работах [7, 8], для присоединения — в [3, 5, 7].) Для всех методов расчета характерно использование уравнений сохранения совместно с некоторым дополнительным замыкающим соотношением. По сравнению с другими принципиальным преимуществом должны обладать интегральные методы, результаты расчетов по которым в меньшей степени зависят от принятого профиля скорости в вязком слое. Представляется возможным рассмотреть такую модель течения в области отрыва и присоединения, исходя из общего предположения о том, что в отрывном течении основное влияние вязкости (смещения) проявляется в областях (2) и (4) и пренебрежимо мало в областях (1) и (3). Взаимодействие между энтропическим и вязким потоком в этих областях определяется в основном изменением толщины вязкого слоя вследствие деформации профилей скорости в нем. Таким образом, основное предположение предлагаемой работы состоит в том, что течение в вязком слое в областях (1) и (3) считается почти невязким, так что внешняя граница вязкого слоя представляет собой линию тока, а весь вязкий слой в этих областях сосредоточен в некоторой трубке тока с некоторым профилем скоростей в ее поперечном сечении. Расчет основывается на применении интегральных уравнений сохранения, прилагаемых к трубке тока, включающей в себя вязкий слой в областях отрыва и присоединения, причем вид профиля скорости в контрольных сечениях начала и конца этой трубки тока определяется в каждом случае из дополнительных соображений.

Основные допущения, принимаемые при этом, обычны: течение во внешнем потоке считается плоским, изэнтропическим и изоэнергетическим ( $T_0 = \text{const}$ ) и определяется изменением толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^*(x)$ ; давление поперек пограничного слоя в контрольных сечениях (вдали от задней критической точки) постоянно и равно давлению внешнего потока на его границе; в турбулентном слое принимается однопараметрическое семейство профилей скорости.

2. **Турбулентный струйный слой.** Как известно (см., например, [10, 11]) профили скоростей в поперечном сечении слоя смещения и следа в несжимаемой жидкости могут описываться некоторой универсальной функцией распределения дефекта скорости, так что

$$\frac{u}{u_0} = 1 - m\varphi(\eta), \quad \varphi(\eta) = \frac{u_0 - u}{u_0 - u^0}, \quad m = \frac{u_0 - u^0}{u_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (2.1)$$

где индексами  $\delta$ ,  $^0$  обозначены значения скорости на внешней границе вязкого слоя и на его оси симметрии. Измерения профилей скорости в сверхзвуковых турбулентных слоях смещения и следа также вполне удовлетворительно обобщаются формулой (2.1).

Интегральные толщины семейства турбулентных слоев с однопараметрическим профилем скорости (1) с учетом того, что

$$\frac{\rho}{\rho_\delta} = \frac{T_\delta}{T} = \frac{1 - C^2}{1 - [1 - m\varphi(\eta)]^2 C^2} \quad (T_0 = \text{const})$$

выражаются следующим образом:

относительная толщина вытеснения

$$\frac{\delta^*}{\delta} = H^*(m, C) = \int_0^1 \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} \right) d\eta = m \int_0^1 \frac{1 + C^2(1 - m\varphi)}{1 - C^2(1 - m\varphi)^2} \varphi d\eta \quad (2.2)$$

относительная толщина потери импульса

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = H^{**}(m, C) = \int_0^1 \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} \left( 1 - \frac{u}{u_\delta} \right) d\eta = (1 - C^2) m \int_0^1 \frac{(1 - m\varphi)\varphi d\eta}{1 - C^2(1 - m\varphi)^2} \quad (2.3)$$

Здесь

$$C = \frac{u}{u_{\max}} = \left[ \frac{1/2(k-1)M^2}{1 + 1/2(k-1)M^2} \right]^{1/2}$$

— приведенная скорость внешнего потока (число Крокко).

Значения  $m > 1$  в формулах (2.2) и (2.3) относятся к профилям с возвратным течением. Для последних важна еще одна интегральная характеристика — относительный расход возвратного течения

$$G(m, C) = - \int_0^{\eta_*(m)} \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} d\eta = - \int_0^{\eta_*(m)} \frac{(1 - C^2)(1 - m\varphi)}{1 - C^2(1 - m\varphi)^2} d\eta \quad (2.4)$$

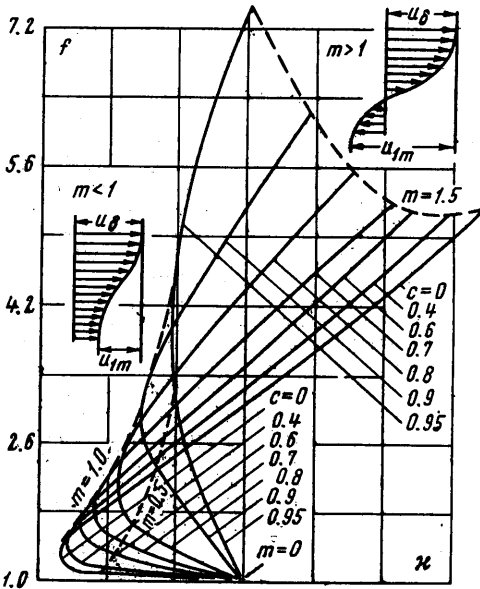
где  $\eta_*(m)$  определяется из условия  $\varphi(\eta_*) = 1/m$ .

Следуя работе Крокко — Лиза [8], определим средние параметры вязкого слоя через его две интегральные толщины так, что относительная средняя скорость слоя

$$x = \frac{u_1}{u_\delta} = \left( \int_0^\delta \rho u^2 dy \right) \left[ u_\delta \int_0^\delta \rho u dy \right]^{-1} = \frac{1 - H^*(m, C) - H^{**}(m, C)}{1 - H^*(m, C)} \quad (2.5)$$

относительная средняя температура (плотность) слоя

$$f = \frac{T_1}{T_\delta} = \frac{\rho_\delta}{\rho_1} = \left[ \frac{1}{\rho_\delta u_1 \delta} \int_0^\delta \rho u dy \right]^{-1} = \frac{1 - H^*(m, C) - H^{**}(m, C)}{[1 - H^*(m, C)]^2} \quad (2.6)$$



Фиг. 1

На фиг. 1 изображена двухпараметрическая зависимость между относительной температурой  $f$  и относительной скоростью  $x$  турбулентных слоев вида (2.1), рассчитанная на ЭВМ для профиля [11]

$$\frac{u_\delta - u}{u_\delta - u^c} = \varphi = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

Отметим, что рекомендуемая в работе [8] эмпирическая кривая  $f(x)$  для семейства несжимаемых турбулентных слоев практически совпадает с нижней ветвью

кривой при  $C = 0$ . Однако здесь в отличие от работы [8] влияние сжимаемости учитывается непосредственно и используются профили с возвратным течением при ( $m > 1$ ). Как следует из фиг. 1, при  $\kappa > 1$  получается, что средняя скорость вязкого слоя оказывается больше скорости изэнтропического потока ( $u_1 > u_2$ ), что, конечно, имеет только формальный смысл и объясняется тем, что для профилей с возвратным течением с ростом  $m > 1$  расход в слое уменьшается, а количество движения возрастает.

3. Уравнения сохранения для трубки тока, включающей в себя вязкий слой. Рассматривая течение в трубке тока, включающей в себя вязкий слой, в области между контрольными сечениями (1) и (2) начала и конца присоединения или отрыва, запишем уравнение неразрывности и количества движения в проекции на ось  $x$ :  
уравнение неразрывности

$$\int_0^{\delta_1} \rho u \, dy = \int_0^{\delta_2} \rho u \, dy \quad \text{или} \quad (\rho u)_1 \delta_1 (1 - H_1^*) = (\rho u)_2 \delta_2 (1 - H_2^*) \quad (3.1)$$

уравнение импульсов

$$\int_0^{\delta_1} \rho u^2 \, dy = \int_0^{\delta_2} \rho u^2 \, dy + p_2 \delta_2 - p_1 \delta_1 + \int_{\delta_2}^{\delta_1} p \, dy$$

или

$$(\rho u^2)_1 \delta_1 (1 - H_1^* - H_1^{**}) = (\rho u^2)_2 \delta_2 (1 - H_2^* - H_2^{**}) + (p_2 - p_1) \delta_2 [1 + \Pi (\delta_1 / \delta_2 - 1)] \quad (3.2)$$

где

$$\Pi = \frac{P - p_1}{p_2 - p_1}, \quad P = \frac{1}{\delta_2 - \delta_1} \int_{\delta_2}^{\delta_1} p \, d\delta$$

Здесь  $P$  — среднее давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, включающей в себя вязкий слой, на участке между сечениями (1) и (2). Величина относительного избыточного давления  $\Pi$  вычисляется в предположении о характере течения в этой трубке тока (см. ниже).

Разделив уравнение (3.2) на (3.1), получим основное расчетное уравнение

$$C_1 \kappa_1 = C_2 \left\{ \kappa_2 + K_p \frac{f_2}{\kappa_2} \left[ 1 + \Pi \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right) \right] \right\} \quad (3.3)$$

$$K_p = \frac{\pi_2 / \pi_1 - 1}{k M_2^2 \pi_2 / \pi_1}, \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{q_2 f_1 / \kappa_1}{q_1 f_2 / \kappa_2}$$

$$q = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)} \left( \frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2} C (1 - C^2)^{1/(k-1)}, \quad \pi = (1 - C^2)^{k/(k-1)}$$

Здесь  $q$  и  $\pi$  — газодинамические функции.

Уравнение (3.3) обобщает обычные соотношения изэнтропического течения, или течения со скачками (псевдоскачками, согласно [12]) в канале переменного течения, которые получаются из него при соответствующих предположениях относительно  $\Pi$ , на случай неравномерного профиля скоростей в поперечном сечении канала ( $f \neq 1$  и  $\kappa \neq 1$  — коэффициенты неравномерности). Для вычисления величины  $\Pi$  в качестве одной из возможных моделей течения, следуя [12], примем, что давление и величина поперечного сечения вдоль трубки тока вязкого слоя связаны степенной зависимостью

$$p \delta^\varepsilon / (\varepsilon - 1) = \text{const} \quad (3.4)$$

Величина показателя вычисляется по данным в начальном и конечном сечениях трубки

$$\varepsilon = \frac{\lg(p_1/p_2)}{\lg(p_1 \delta_1 / p_2 \delta_2)} \quad (3.5)$$

Тогда

$$P = p_2 (1 - \varepsilon) \frac{(\delta_1 / \delta_2)^{1/(1-\varepsilon)} - 1}{\delta_1 / \delta_2 - 1}$$

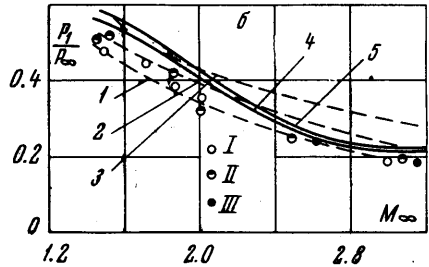
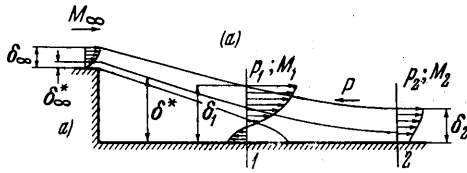
$$\Pi = \left\{ \frac{p_2}{p_1} \frac{1 - \varepsilon}{\delta_1 / \delta_2 - 1} \left[ \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{1/(1-\varepsilon)} - 1 \right] - 1 \right\} \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right)^{-1} \quad (3.6)$$

Принятый вид связи (3.4) не имеет принципиального значения. Возможны и другие предположения о характере распределения давлений вдоль вязкого слоя, связанные, например, с каким-либо разумным однопараметрическим распределением давлений в плоскости течения. В частности, аналогичные результаты можно получить в определенных предположениях о форме внешней границы вязкого слоя в физической плоскости (например, в виде дуги окружности или параболы).

Таким образом, уравнение (3.3) совместно с формулой (3.6) позволяет определить зависимость  $c_2$  от  $c_1$  или  $p_2/p_1 = \pi(c_2)/\pi(c_1)$  — отношение давлений в сечениях (2) и (1) конца и начала рассматриваемой области течения вязкого слоя, если известны средние параметры слоя в этих сечениях  $f_1, \kappa_1$  и  $f_2, \kappa_2$ , или параметры формы профиля  $m_1$  и  $m_2$ .

4. Присоединение турбулентного слоя. Рассмотрим для определенности присоединение симметричного турбулентного струйного слоя за плоской прямоугольной кромкой, обтекаемой с обеих сторон равномерным сверхзвуковым потоком с приведенной скоростью  $C_\infty$ . Толщина невозмущенного турбулентного пограничного слоя на кромке равна  $\delta_\infty$ , толщина вытеснения —  $\delta_\infty^*$ , так, что  $H_\infty^* = \delta_\infty^*/\delta_\infty$ . Примем, что при развороте внешнего сверхзвукового потока на угол

$$\theta_1 = \nu(C_1) - \nu(C_\infty) \quad (4.1)$$



Фиг. 2

( $\nu$  — функция Прандтля — Майера) в угловой точке возникает струйный автомодельный слой с  $m = 1$ , начальная толщина которого  $\delta_0$  определяется условием сохранения массы в вязком слое

$$\int_0^{\delta_\infty} \rho u \, dy = \int_0^{\delta_0} \rho u \, dy \quad \text{или} \quad \frac{\delta_0}{\delta_\infty} = \frac{q(C_\infty)}{q(C_1)} \frac{1 - R_\infty}{1 - R(1, C_1)} \quad (4.2)$$

В изобарической области между кромкой и сечением (1) начала присоединения (Фиг. 2, а) турбулентный струйный слой, который фиксируется относительно граничной линии тока эквивалентного идеального потока при помощи толщины вытеснения  $\delta^*$ , развивается по обычному закону, так что

$$\delta = \delta_0 + b_1(C_1) (\cos \theta_1)^{-1} x$$

где  $b$  — константа в уравнении распространения струи

$$\frac{d\delta}{dx} = b [^{10}]$$

Течение в изобарической вязкой области характеризуется тремя интегральными параметрами:

толщиной вытеснения вязкой области

$$\delta^* = 1 + \delta_\infty^* - \text{tg } \theta_1 x \quad (4.3)$$

толщиной вязкой области, определяемой по внешней границе вязкого слоя

$$\delta = 1 + \delta_\infty^* - \text{tg } \theta_1 x + [1 - H^*(1, C_1)][\delta_0 + b_1(\cos \theta_1)^{-1} x] \quad (4.4)$$

величиной присоединенного расхода

$$Q = \rho_+ v_+ (\cos \theta_1)^{-1} x = \rho_1 u_1 b_1 P(1, C_1) (\cos \theta_1)^{-1} x \quad (4.5)$$

(крестиком обозначены параметры в застойной области).

В сечении (1) изобарическое течение в слое смешения сращивается с течением взаимодействия в ближнем следе, начальный профиль которого характеризуется наличием возвратного течения ( $m > 1$ ), из условия сохранения указанных интегральных величин  $\delta$ ,  $\delta^*$  и  $G$ . Эти три условия служат для определения координаты  $x_1$  сечения I, толщины слоя в этом сечении  $\delta_1$  и начального значения параметра профиля  $m_1$  и записываются в следующем виде:

$$\delta = 1 + \delta_{\infty}^* \left[ 1 + \frac{q_{\infty}}{q_1} \frac{1 - H_{\infty}^*}{H_{\infty}^*} \right] - \{ \operatorname{tg} \theta_1 - b_1 [1 - H^*(1, C_1)] (\cos \theta_1)^{-1} \} x \quad (4.6)$$

$$\delta H^*(m_1, C_1) = 1 + \delta_{\infty}^* - \operatorname{tg} \theta_1 x \quad (4.7)$$

$$\delta G(m_1, C_1) = b_1 H^{**}(1, C_1) (\cos \theta_1)^{-1} x \quad (4.8)$$

При  $\delta_{\infty} = 0$  из уравнений (4.6) — (4.8) следует, что параметр профиля скорости  $m_1(C_1)$  в начальном сечении области присоединения определяется из уравнения

$$\frac{1 - H^*(m_1, C_1)}{G(m_1, C_1)} = \frac{1 - H^*(1, C_1)}{H^{**}(1, C_1)} \quad (4.9)$$

Замыкающее условие для определения  $m_2$  рассматривается ниже в различных предельных предположениях относительно характера течения вдоль осевой линии тока. Во-первых, согласно предположению об отсутствии смешения, принимается, что вдоль осевой линии тока при  $y = 0$ , так же как и при  $y = \delta$ , сохраняется полное давление ( $p_0^{\circ} = \text{const}$ ,  $p_0^{\circ} / p_{00} = \sigma = \text{const}$ ).

Тогда  $\pi(C_1) / \pi(C_1^{\circ}) = \pi(C_2) / \pi(C_2^{\circ}) = \sigma$  и величина  $m_2$  вычисляется по формуле

$$\frac{1 - C_2^2}{1 - C_2^2(1 - m_2)^2} = \frac{1 - C_1^2}{1 - C_1^2(1 - m_1)^2} = \sigma^{(k-1)/k}$$

при всех значениях  $m_2$ , не превышающих единицу. Когда  $m_2 = 1$ , соответствующая величина  $C_2 = C_{2*} = [1 - \sigma^{(k-1)/k}]^{1/2}$ . При  $C_2 < C_{2*}$  по-прежнему считается, что  $m_2 = 1$ , совпадает с предположением о полном торможении потока на разделяющей линии тока [5]. Во-вторых, на основании дифференциального соотношения на оси симметрии вязкого слоя [11]

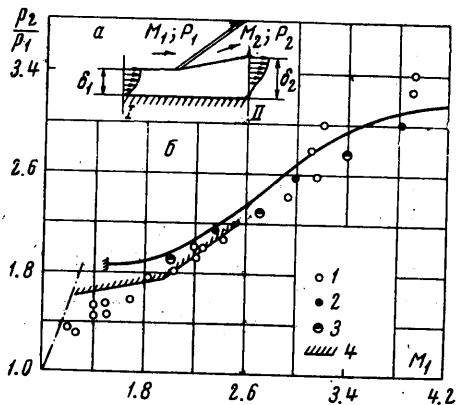
$$u^{\circ} \frac{du^{\circ}}{dx} = - \frac{1}{\rho^{\circ}} \frac{dp}{dx} + \left( \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)^{\circ}$$

в окрестности критической точки следует приближенно, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (C^{\circ})^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [C^2(1 - m)^2] = 0$$

Предполагая, что эта формула справедлива во всей области течения на оси симметрии между сечениями (1) и (2), получим  $C_1^2(1 - m_1)^2 = C_2^2(1 - m_2)^2$ , или с учетом того, что  $m_1 > 1$ ,  $m_2 < 1$ ,  $m_2 =$

$= 1 - (m_1 - 1)C_1/C_2$ . Согласно первому предельному предположению,  $m_2 \sim 1$ , согласно второму,  $m_2 \sim 0.5$ . Решение уравнения (3.3) в указанных предположениях относительно  $m_2$  ( $m_2 = 1 = \text{const}$ ,  $m_2 = 0.5 = \text{const}$ ) приводит к практически совпадающим результатам, которые приведены на фиг. 2 в виде зависимости относительного донного давления от числа  $M$  набегающего потока. Кривая 4 соответствует  $m_2 = 0.5$ , кривая 5 соответствует  $m_2 = 1$ . Кривые 1, 2, 3 получены по методу разделяющей линии тока [3], для различных профилей скорости в слое смешения: кривая 1 соответствует  $u/u_0 = 1/2(1 + \operatorname{erf} \eta)$ , кривая 2 —  $u/u_0 = (1 - \eta^{1/2})^2$ , кривая 3 —  $u/u_0 = 1 - \eta$ . Экспериментальные точки I и II заимствованы из работ [5, 6] точки III получены автором этой работы.



Фиг. 3

Отметим также, что совместное решение уравнения (3.4) для вязкого слоя и уравнения (4.1) определяющего течение во внешнем потоке, позволяет приблизительно получить распределение давлений в вязком слое вдоль по потоку.

Развитый здесь способ расчета можно обобщить на случай течения с осевой симметрией и со вдувом (отсосом) газа в донную область.

**5. Отрыв турбулентного слоя.** Когда точка отрыва не фиксирована, критическое отношение давлений определяется переходом пограничного слоя в предотрывное состояние, которое происходит под воздействием повышенного давления в области отрыва, распространяющегося через дозвуковую часть слоя. Протяженность области отрыва турбулентного слоя и перехода к струйному слою в отличие от области присоединения составляет величину порядка толщины невозмущенного пограничного слоя и в расчетах его обычно пренебрегают.

Схема расчета показана на фиг. 3, а. В начальном сечении (1) принимается обычный профиль скорости для турбулентного слоя на пластине

$$u / u_0 = (y / \delta)^{1/n}$$

(в примере расчета  $n = 7$ ). В конечном сечении 2 принимается струйный профиль скорости (2.1) с  $m = 1$ . Следуя [9], считается, что в отличие от течения присоединения отрыв сопровождается образованием скачка, так что  $P_2 = p_2$  и  $\Pi = 1$ .

Результаты решения уравнения (3.3) с учетом сделанных предположений, представлены на фиг. 3, б в виде зависимости критического отношения давления  $p_2 / p_1$  от числа  $M_1$  набегающего потока. Расчет (сплошная линия) удовлетворительно совпадает с экспериментом всюду, за исключением течений с малыми сверхзвуковыми скоростями. Экспериментальные точки построены по следующим данным: 1 — данные И. П. Некрасова, 2, 3, 4 — данные работ [1, 3, 4]. Штрих-пунктир соответствует прямому скачку.

Важно, что при возрастании числа  $M_1$  величина  $p_2 / p_1$  стремится к некоторому предельному значению, что соответствует представлениям о предельных свойствах гиперзвуковых течений. Распространенные аппроксимации экспериментальных данных  $p_2 / p_1$  от  $M_1$  степенными (линейными) зависимостями не дают указанного предела.

В заключение автор благодарит Г. Ю. Степанова за постановку задачи и проявленную настойчивость в ее решении.

Поступило 14 VII 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bogdonoff S. M. Some experimental studies of the separation of supersonic turbulent boundary layers. Princeton University Report, 1955, 336.
2. Соломонов М. С. Июньское общее собрание Отделения технических наук АН СССР. Сообщение о докладе Петрова Г. И. Изв. АН СССР, ОТН 1958, № 9.
3. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. H. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA, Rep. 1958, 1356.
4. Гродзовский Г. Л. Экспериментальное исследование взаимодействия скачков уплотнения и пограничного слоя в диапазоне чисел  $M = 1.0-1.8$ . Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1961, № 4.
5. Korst H. H. Theory for base pressure in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech, 1956, vol. 23, No. 4.
6. Sirieix M. Pression de culot et processus de melange turbulent en ecoulement supersonique plan. Rech. Aeronaut., 1960, No. 78.
7. Mager A. On the model of the free shock-separated turbulent boundary-layer. J. Aeronaut. Sci., 1956, No. 2.
8. Crocco L., Lees L. A mixing theory for the interaction between dissipative flows and nearly isentropic streams. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 10.
9. Crocco L. Considerations of the shock-boundary layer interaction. Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics, 1955.
10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
11. Гиневский А. С. Турбулентные след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давлений. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
12. Крокко Л. Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений. В кн.: «Основы газовой динамики», под ред. Эммонса, Изд-во иностр. лит., 1963.