

АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОЕЗДА НА МАЛОЕ ТЕЛО

М. И. ГУРЕВИЧ (Москва)

Решена плоская задача об аэродинамическом воздействии поезда, представляемого источником и стоком, на малое тело (эллипс). Жидкость идеальна и несжимаема. Рассчитаны аэродинамические силы и моменты, действующие на эллипс в переменном поле скоростей, образуемом проходящим поездом.

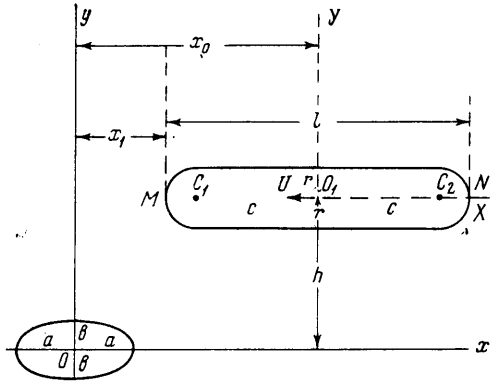
1. **Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую задачу об аэродинамических силах, действующих на эллипс со стороны проходящего мимо поезда. Воздух будем считать идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ . Центр эллипса с полуосями a и b совпадает с началом координат (фиг. 1). Поезд длиной l движется параллельно оси x справа налево со скоростью U . Расстояние оси симметрии поезда от оси x равно h . Если обозначить абсциссу центра поезда O_1 через x_0 , то ее производная по времени равна

$$\frac{dx_0}{dt} = -U \quad (1.1)$$

Основное предположение состоит в следующем: эллипс находится в переменном поле скоростей, возбуждаемом поездом в окрестности начала координат. Сам эллипс настолько мал, что существенного влияния на картину обтекания поезда не оказывает.

Область течения в окрестности эллипса будем рассматривать с двух позиций: по отношению к поезду будем считать эту область бесконечно малой, а по отношению к эллипсу бесконечно большой. Такого рода двойную оценку нужно все время иметь в виду в дальнейшем. С первого взгляда кажется, что при такой постановке задачи можно считать, что эллипс находится в равномерном потоке со скоростью, равной скорости, возбуждаемой поездом в центре эллипса. Однако из дальнейшего (2) будет ясно, что следует учитывать неравномерность поля скоростей в потоке, набегающем даже на малое тело.

В качестве поезда возьмем контур, образованный движущимися источником и стоком, равной интенсивности q . Источник и сток располагаются в точках C_1 и C_2 , находящихся на расстоянии c влево и вправо от центра O_1 движущегося тела (фиг. 1).



Фиг. 1

Прежде чем решать задачу о силах, действующих на эллипс, рассмотрим круглый цилиндр, находящийся в неравномерном поле скоростей.

2. **Силы, действующие на круглый цилиндр.** Пусть на круглый цилиндр радиуса R (фиг. 2) набегаёт поток, комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ которого имеет в бесконечности (по отношению к эллипсу) вид

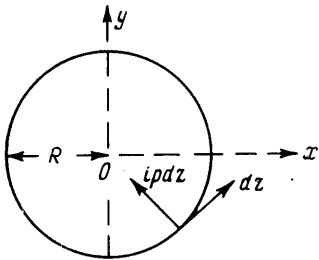
$$w_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n) z^n \quad (2.1)$$

где A_n и B_n — функции времени. Тогда, комплексный потенциал обтекания цилиндра равен

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z^n + R^{2n}z^{-n}) + i \sum_{n=1}^{\infty} B_n (z^n - R^{2n}z^{-n}) \quad (2.2)$$

Давление p в произвольной точке жидкости определяется при помощи интеграла Лагранжа — Коши. Легко видеть (фиг. 2), что суммарная сила давления на цилиндр равна

$$F_x + iF_y = i \oint p dz = -i\rho \oint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} \right) dz \quad (2.3)$$



Фиг. 2

где интегрирование производится по контуру цилиндра. Пользуясь тем, что на поверхности цилиндра

$$w = \varphi, \quad \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} dz = \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

можно получить, что

$$F_x + iF_y = 2\pi\rho R^2 (A_1' - iB_1') + 2\pi\rho \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) R^{2n} (A_n + iB_n) (A_{n+1} - iB_{n+1}) \quad (2.4)$$

Здесь точка в позиции штриха у буквы обозначает дифференцирование по времени. Считая R малой величиной и пренебрегая слагаемыми, содержащими R в степени выше второй, получим приближенно

$$F_x + iF_y = 2\pi R^2 \rho [A_1' - iB_1' + 2(A_1 + iB_1)(A_2 - iB_2)] \quad (2.5)$$

Из формул (2.4) или (2.5) следует, что полностью пренебрегать неравномерностью набегающего потока нельзя даже для малых тел. Если требуется сохранить в выражении для силы, действующей на круглый цилиндр, все слагаемые порядка квадрата радиуса, то в комплексном потенциале набегающего потока следует удерживать члены

$$w_{\infty} = (A_1 + iB_1)z + (A_2 + iB_2)z^2 \quad (2.6)$$

Членами, содержащими z в более высоких степенях, уже можно пренебрегать (область изменения z мала по отношению к поезду).

3. Обтекание эллипса неравномерным потоком. Пусть на эллипс набегают поток с комплексным потенциалом вида (2.1) или (2.6). Легко найти $\psi_{\infty} = \text{Im } w_{\infty}$ на контуре эллипса. Для получения комплексного потенциала течения $w = w_{\infty} + w_0$ нужно найти такое w_0 , которое было бы ограничено в бесконечности и мнимая часть которого на контуре эллипса равнялась $\psi_0 = -\psi_{\infty}$. Голоморфную во внешности эллипса функцию w_0 можно определить при помощи интеграла Шварца для внешности эллипса, который, в свою очередь, можно получить, преобразуя интеграл Шварца для внутренности круга [1] путем конформного отображения на внешность эллипса

$$w_0 = -\frac{1}{2\pi} \oint \psi_0(z') \frac{\sqrt{z^2 - a^2 + b^2} + \sqrt{z'^2 - a^2 + b^2}}{(z' - z)\sqrt{z'^2 - a^2 + b^2}} dz' \quad (3.1)$$

Хотя интеграл Шварца (3.1) для внешности эллипса и решает задачу в общем виде, его практическое использование ведет к утомительным выкладкам.

Обтекание эллипса, на который набегают поток, имеющий в бесконечности комплексную скорость $(dw_{\infty}/dz) = A_1 + iB_1$ хорошо известно (см. например [2]). Комплексный потенциал такого течения равен

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = A_1 \frac{az - b\sqrt{z^2 - a^2 + b^2}}{a - b} + iB_1 \frac{a\sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - bz}{a - b} \quad (3.2)$$

Если возвести w_1 в квадрат и заменить $(A_1 + iB_1)^2$ через $A_2 + iB_2$, то получим комплексный потенциал, асимптотика которого в бесконечности имеет вид $(A_2 + iB_2)z^2$. Так как на контуре эллипса $\psi_1 = 0$, то на нем и мнимая часть w_1^2 тоже равна нулю. Отбросив для компактности формулы несущественное постоянное слагаемое, получим

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = \frac{A^2}{(a-b)^2} [(a^2 + b^2)z^2 - 2abz\sqrt{z^2 - a^2 + b^2}] + \frac{iB_2}{(a-b)^2} [(a^2 + b^2)z\sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - 2abz^2] \quad (3.3)$$

Легко в порядке проверки непосредственно убедиться, что на контуре эллипса $\psi_2 = \text{const}$, а в бесконечности $w_2 \approx (A_2 + iB_2)z^2$.

При помощи аналогичного приема можно получить и следующие члены разложения w , имеющего в бесконечности вид (2.1).

Однако, так как по аналогии с (2) и для эллипса ограничимся комплексным потенциалом, имеющим в бесконечности вид (2.6), то, складывая (3.2) и (3.3), получим окончательное выражение для комплексного потенциала неравномерного потока, обтекающего эллипс в виде

$$w = w_1 + w_2 \quad (3.4)$$

где w_1 и w_2 даются формулами (3.2) и (3.3).

4. **Главный вектор и главный момент сил давления, действующих на эллипс.** На контуре эллипса можно положить

$$z = a \cos \sigma + ib \sin \sigma \tag{4.1}$$

где σ меняется от нуля до 2π . Пользуясь (3.2), (3.3) и (3.4), легко найти подынтегральное выражение в (2.3). Несколько утомительные, но достаточно стандартные вычисления интегралов дают

$$F_x + iF_y \neq \pi\rho(a+b)(bA_1' - iaB_1') + 2\pi\rho(a+b)[bA_1A_2 + aB_1B_2 + i(aB_1A_2 - bA_1B_2)] \tag{4.2}$$

При $a = b = R$ (4.2) превращается в формулу (2.5) для круга.

Момент относительно начала координат силы давления, действующий на элемент контура, равен (см. например [1])

$$dM_0 = -Rei\bar{z}(dF_x + idF_y)$$

Если, воспользовавшись интегралом Лагранжа — Коши, проинтегрировать dM_0 , сделав при этом обычные преобразования, которые делаются при выводе формулы для момента сил, действующих на профиль крыла (^[1, 2]), то формула для расчета главного момента сил давления, действующих на эллипс, примет вид

$$M_0 = \rho \operatorname{Re} \left\{ - \oint \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bar{z} dz - \frac{1}{2} \oint z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right\}$$

Вычисление контурных интегралов дает окончательно

$$M_0 = \pi\rho(a^2 - b^2) \left[-\frac{B_2'}{4}(a+b)^2 + A_1B_1 + A_2B_2(a^2 - b^2) \right] \tag{4.3}$$

Очевидно, что в случае круга $a = b = R$ момент $M_0 = 0$.

Теперь для окончательного расчета силы и момента, действующих на эллипс, остается найти поле скоростей, вызываемое движущимся поездом или, что равносильно, найти $A_1, B_1, A_2, B_2, A_1', B_1', B_2'$.

5. **Поле скоростей, вызываемое поездом.** Как уже было отмечено, поезд будет изображаться контуром, образованным источником и стоком. Потенциал скоростей течения будет иметь вид (фиг. 1):

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - (x_0 + ih - c)}{z - (x_0 + ih + c)} \tag{5.1}$$

Потенциал скоростей W зависит от q, c и h , в то время как следует ввести помимо h , ширину поезда $2r$ и его длину l . Для получения связи между r, l и q, c удобно рассмотреть комплексный потенциал W_r относительного течения при неподвижном поезде, на который набегает поток со скоростью U , направленной вдоль оси x . Очевидно, что

$$W_r = W + UZ = UZ + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{Z + c}{Z - c}, \quad (Z = X + iY = z - ih - x_0) \tag{5.2}$$

Приравняв нулю функцию тока $\Psi_r = \operatorname{Im}W_r$, можно получить уравнение контура поезда

$$UY + \frac{q}{2\pi} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y}{c + X} - \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y}{c - X} \right) = 0 \tag{5.3}$$

Для того чтобы получить уравнение для определения ширины поезда, нужно положить в (5.3) $Y = \pm r$ и $X = 0$.

После несложных преобразований будем иметь

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \kappa = \pi \quad \left(\kappa = \frac{r}{c}, \quad \varepsilon = \frac{q}{2\pi cU} \right) \tag{5.4}$$

Так как длину и скорость поезда следует считать относительно большими величинами, то в дальнейшем будет рассматриваться только случай, когда $\varepsilon \ll 1$ и $\kappa \ll 1$. В связи с этим, разлагая κ в ряд по степеням ε , можно, пользуясь (5.4), получить

$$r = c\kappa = \pi c[\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)] \tag{5.5}$$

Для определения длины поезда l нужно воспользоваться тем обстоятельством, что в голове и в хвосте поезда относительная комплексная скорость равна нулю. Отсюда, для определения абсцисс обеих критических точек получается уравнение

$$(dW_r / dZ) = 0$$

которое дает

$$l = 2c\sqrt{1 + 2\varepsilon} \quad (5.6)$$

Отсюда и из (5.5) следует, что

$$\frac{2r}{l} = \frac{\pi [\varepsilon - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)]}{\sqrt{1 + 2\varepsilon}} \quad (5.7)$$

Таким образом, задание ε равносильно заданию относительной длины поезда $\lambda = l / (2r)$.

После того, как геометрические элементы поезда выражены через задаваемые параметры, можно перейти к определению коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 и их производных по времени. Разлагая W в ряд в окрестности начала неподвижной системы координат, получим (5.8)

$$W = W_{z=0} + \left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=0} z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2W}{dz^2}\right)_{z=0} z^2 + \dots$$

Сравнивая (5.8) с (2.6) и отбрасывая несущественную постоянную, найдем (5.9)

$$A_1 + iB_1 = \left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=0}, \quad A_2 + iB_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2W}{dz^2}\right)_{z=0}$$

Теперь остается, воспользовавшись (5.1)

и (1.1), произвести необходимые дифференцирования. После очевидных преобразований получим

$$A_1 + iB_1 = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{x_0 + c}{(x_0 + c)^2 + h^2} - \frac{x_0 - c}{(x_0 - c)^2 + h^2} \right] + \frac{iqh}{2\pi} \left[\frac{1}{(x_0 - c)^2 + h^2} - \frac{1}{(x_0 + c)^2 + h^2} \right]$$

$$A_2 + iB_2 = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{(x_0 + c)^2 - h^2}{[(x_0 + c)^2 + h^2]^2} - \frac{(x_0 - c)^2 - h^2}{[(x_0 - c)^2 + h^2]^2} \right\} + \frac{iqh}{2\pi} \left\{ \frac{x_0 - c}{[(x_0 - c)^2 + h^2]^2} - \frac{x_0 + c}{[(x_0 + c)^2 + h^2]^2} \right\}$$

$$A_1' + iB_1' = 2U (A_2 + iB_2)$$

$$B_2' = \frac{Uq}{2\pi} \left\{ \frac{h^3 - 3h(x_0 + c)^2}{[(x_0 + c)^2 + h^2]^3} - \frac{h^3 - 3h(x_0 - c)^2}{[(x_0 - c)^2 + h^2]^3} \right\}$$

6. Числовые примеры. В зависимости от абсциссы x_1 точки M (фиг. 1) были рассчитаны коэффициенты сил, действующих на эллипс

$$C_x = F_x / \rho r U^2 r, \quad C_y = F_y / \rho r U^2 r, \quad C_m = M_0 / \rho r U^2 r^2$$

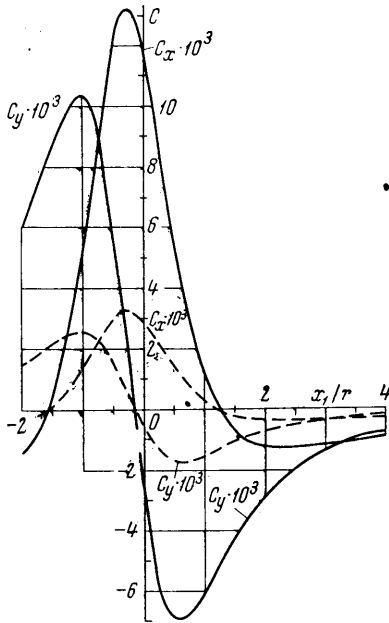
Здесь C_m — коэффициент момента относительно точки 0.

1) Круглый цилиндр (фиг. 3)

$$\frac{a}{r} - \frac{b}{r} = 0.2, \quad \frac{a}{r} = \frac{b}{r} = 0.1 \quad (\text{пунктир})$$

2) Эллиптический цилиндр с большой осью параллельной и перпендикулярной направлению пути (фиг. 4, 5):

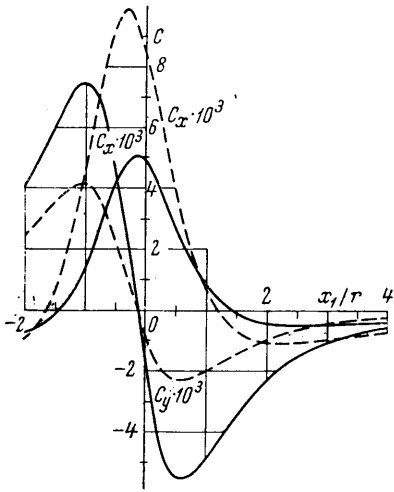
$$\frac{a}{r} = 0.2, \quad \frac{b}{r} = 0.1, \quad \frac{a}{r} = 0.1, \quad \frac{b}{r} = 0.2 \quad (\text{пунктир})$$



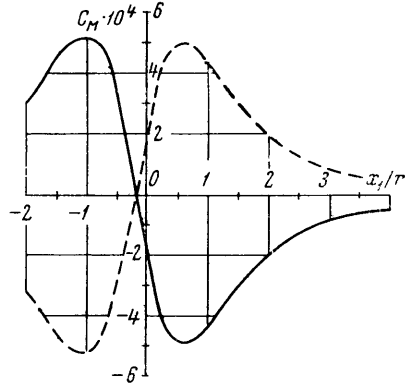
Фиг. 3

Во всех этих случаях принималось удлинение поезда $\lambda = l/2r = 50$ и относительное расстояние между осью симметрии поезда и осью x равнялось $h/r = 1.4$. Кроме того, были сосчитаны максимальные и минимальные значения C_x, C_y, C_m уже при различных h/r (таблица), но том же $\lambda = 50$.

Из (фиг. 3—5) следует, что при прохождении головы поезда мимо ма-



Фиг. 4



Фиг. 5

лого тела основные события разыгрываются на расстоянии нескольких шириин поезда.

При дальнейшем прохождении поезда пользоваться предлагаемой теорией уже нельзя, так как обтекаемое тело может попасть в расширяющийся турбулентный пограничный слой или в слутную струю поезда.

x_i/r	Цилиндр				Эллипс					
	$a/r=b/r=0.1$		$a/r=b/r=0.2$		$a/r=0.1, b/r=0.2$			$a/r=0.2, b/r=0.1$		
	$C_x \cdot 10^3$	$C_y \cdot 10^3$	$C_x \cdot 10^3$	$C_y \cdot 10^3$	$C_x \cdot 10^3$	$C_y \cdot 10^3$	$C_m \cdot 10^4$	$C_x \cdot 10^3$	$C_y \cdot 10^3$	$C_m \cdot 10^4$
-2.309	-0.486	1.114	-1.944	4.458	-1.340	1.844	-2.411	-0.847	3.171	2.415
-1.812	-0.273	1.711	-1.092	6.843	-0.570	2.839	-3.630	-0.659	4.860	3.632
-1.315	0.488	2.407	1.950	9.629	1.937	3.958	-5.032	0.257	6.875	5.015
-0.819	2.064	2.446	8.258	9.782	6.758	3.878	-5.022	2.532	7.127	4.975
-0.322	3.301	0.758	13.205	3.031	9.904	1.136	-1.017	4.952	2.273	1.017
0.175	2.488	-1.250	9.953	-5.000	6.900	-1.683	3.932	4.298	-3.942	-3.886
0.672	0.963	-1.737	3.851	-6.947	2.414	-2.278	4.972	1.918	-5.537	-4.956
1.168	0.081	-1.378	0.324	-5.510	-0.006	-1.809	3.812	0.371	-4.391	-3.813
1.665	-0.250	-0.948	-0.998	-3.790	-0.966	-1.259	2.554	-0.258	-3.004	-2.559
2.161	-0.333	-0.637	-1.333	-2.548	-1.056	-0.858	1.680	-0.443	-2.008	-1.683
2.658	-0.327	-0.434	-1.310	-1.738	-1.612	-0.593	1.125	-0.463	-1.362	-1.127
3.155	-0.295	-0.304	-1.180	-1.218	-0.900	-0.420	0.775	-0.427	-0.949	-0.776
3.652	-0.257	-0.219	-1.028	-0.876	-0.786	-0.305	0.550	-0.377	-0.681	-0.551
4.148	-0.222	-0.162	-0.889	-0.648	-0.672	-0.227	0.402	-0.328	-0.502	-0.402
4.645	-0.192	-0.123	-0.768	-0.491	-0.579	-0.173	0.301	-0.284	-0.379	-0.301
h/r										
1.2	4.50	3.60	18.07	14.58	13.47	5.95	6.91	7.07	10.47	7.27
	-0.70	-2.20	-2.82	-9.18	-1.99	-2.92	-7.33	-1.22	-7.40	-6.87
1.4	3.32	2.51	13.26	10.39	9.91	4.20	5.04	5.14	7.49	5.36
	-0.51	-1.75	-2.01	-6.99	-1.43	-2.30	-5.39	-0.85	-5.56	-5.02
1.6	2.54	1.94	10.14	7.77	7.58	3.12	3.84	3.90	5.62	4.12
	-0.37	-1.37	-1.50	-5.49	-1.07	-1.84	-4.14	-0.62	-4.33	-3.82
1.8	2.00	1.51	8.01	6.03	5.99	2.41	3.01	3.07	4.37	3.27
	-0.29	-1.11	-1.16	-4.43	-0.84	-1.51	-3.28	-0.48	-3.47	-3.05
2.0	1.62	1.20	6.48	4.81	4.85	1.92	2.43	2.47	3.50	2.66
	-0.23	-0.91	-0.92	-3.64	-0.67	-1.26	-2.67	-0.38	-2.82	-2.42

Интересно отметить, что для эллипсов с большими осями параллельными и перпендикулярными направлению пути знаки моментов (фиг. 5) при одинаковых x_1 оказываются противоположными (очевидно, что для круглого цилиндра $C_m = 0$).

Были сосчитаны значения C_x , C_y , C_m в зависимости от одних A_1 и B_1 , т. е. путем отбрасывания членов, содержащих A_2 и B_2 . Для C_y влияние отброшенных членов оказалось довольно существенным, однако характер кривых остался тем же. Кривые C_x изменились меньше. Кривые моментов практически совсем не зависят от A_2 и B_2 . Соответствующий цифровой и графический материалы здесь не приводятся, так как они носят вспомогательный характер и, вероятно, недостаточны для обобщений.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Г. И. Верникову проведшему на ЭВМ все числовые расчеты по работе.

Поступило 19 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Изд. 4-е, ч. I. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ СРЫВЕ ВИХРЕЙ С ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА И СИЛАХ, ВЫЗВАННЫХ ЭТИМИ ВИХРЯМИ, НА ЗАКРИЗИСНОМ РЕЖИМЕ ОБТЕКАНИЯ

Л. Х. БЛЮМИНА, К. К. ФЕДЯЕВСКИЙ

(Москва)

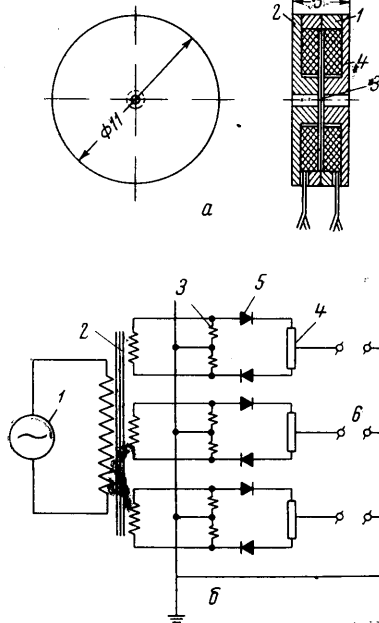
Известно, что причиной раскачки круглых цилиндрических тел является срыв вихрей. На докризисных режимах обтекания цилиндра закон срыва вихрей хорошо изучен, частота срыва вихрей носит периодический характер и удовлетворяет постоянству числа Струхала [1-3]

$$S = \frac{nd}{V} \approx 0.2, \quad R = \frac{Vd}{\nu}$$

Здесь n — частота срыва вихрей в $гц$, d — диаметр цилиндра в $м$, V — скорость набегающего потока в $м/сек$, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Многие исследователи считают, что на закризисных режимах не наблюдается периодической частоты пульсаций скорости в следе за цилиндром и на основании этого отрицают вообще существование периодического срыва вихрей с поверхности цилиндра на закризисном режиме. Некоторые исследователи получили периодическую частоту срыва вихрей по измерениям пульсаций скорости в следе, соответствующую значениям чисел $S > 0.2$. Так, например, по опытам Делани и Соренсона при числах $10^6 < R < 4 \cdot 10^6$ значения чисел $S > 0.4$. По опытам Релфа и Симмонса в диапазоне $0.3 \cdot 10^6 < R < 0.8 \cdot 10^6$ значения чисел S непрерывно возрастают [4]. По опытам Рошко, при значениях $6 \cdot 10^6 < R < 9 \cdot 10^6$ числа S находятся вблизи 0.27 [5].

Представляют значительный интерес экспериментальные результаты по непосредственному замеру мгновенного давления на поверхности цилиндра, так как при таком методе исклю-



Фиг. 1

чается влияние турбулентного перемешивания в следе.

Объектами исследования были два деревянных цилиндра, один из которых имел диаметр $d = 0.16$ м, а другой $d = 0.5$ м. Оба цилиндра имели длину $l = 1.2$ м, при