# РЕШЕТКА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВИБРИРУЮЩИХ ПРОФИЛЕЙ В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

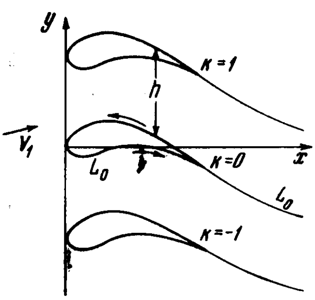
**В. Э. САРЕН**

*(Новосибирск)*

Исследована задача о безотрывном обтекании решетки телесных профилей, совершающих малые гармонические колебания с произвольной формой и произвольным сдвигом фаз в потоке идеальной несжимаемой жидкости. В линеаризованной постановке задача сводится к сингулярному интегральному уравнению, решение которого позволяет определить потенциал скорости потока и нестационарные аэродинамические силы, действующие на решетку. Приведем пример расчета нестационарных аэродинамических характеристик решетки симметричных профилей в квазистационарной постановке задачи. Расчет основан на численном решении интегрального уравнения.

Исследование неустановившегося обтекания решеток профилей представляет большой практический интерес. Наиболее полно разработана линейная теория безотрывного обтекания решеток, составленных из тонких слабоизогнутых профилей, колеблющихся под малым углом атаки в потоке жидкости и газа. Гораздо менее исследован случай решеток, составленных из профилей произвольной формы.

В монографии Г. Ю. Степанова [1] намечен путь приближенного решения задачи о нестационарном обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости решетки произвольных вибрирующих профилей. Предложенный метод расчета предполагает использование конформного отображения решетки профилей со стационарными разрезами за ними на коническую область. Аналогичная задача рассмотрена Г. С. Самойловичем [2]. Решение, предложенное в работе [2], основано на конформном отображении данной решетки на решетку кругов. В случае обтекания решетки с переменной циркуляцией решение дано в квазистационарной постановке. Задача об обтекании решетки, составленной из тонких криволинейных профилей, колеблющихся в потоке несжимаемой жидкости, рассмотрена в работе [3].




Фиг. 1

Работа посвящена задаче о произвольных малых колебаниях решетки профилей произвольной формы в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Задача рассматривается в линеаризованной (по отношению к стационарному обтеканию) постановке. Получено сингулярное интегральное уравнение, решение которого позволяет свести к квадратурам определение потенциала скорости потока и нестационарных аэродинамических сил и момента, действующих на решетку.

В качестве примера приведены некоторые результаты расчета на ЭВМ нестационарных аэродинамических характеристик решетки симметричных профилей в квазистационарной постановке задачи.

1. Поместим в плоский поток идеальной несжимаемой жидкости бесконечную решетку профилей. Обозначим через $z = x + iy$ комплексную координату точки в плоскости течения (фиг. 1). Начало декартовой системы координат $(x, y)$ поместим в переднюю кромку исходного профиля решетки и ось $x$ направим перпендикулярно фронту решетки вниз по потоку. Назовем соответственными точки профилей, комплексные координаты которых удовлетворяют соотношению $z_k = z_0 + ikh$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — номер профиля в решетке и $h$ — шаг решетки.

Пусть профили решетки совершают синхронные колебания по гармоническому закону, с малой амплитудой $\delta (|\delta| \ll 1)$, произвольной заданной формой $f(z)$ $(f(z) = f_x(x, y) + if_y(x, y))$ и произвольным сдвигом фазы $m\pi (0 \leqslant m \leqslant 2)$ между колебаниями соседних профилей. Комплексная координата точки профиля решетки, соответственной точке $z_0$ исходного профиля, в момент времени $t$ равна

$$z_k(t) = z_0 + ikh + \delta f(z) e^{j\omega t} e^{jkm\pi} \tag{1.1}$$

где $\omega$ — круговая частота колебаний профилей; $j$ — мнимая единица, связанная только с временными процессами. Система координат при этом остается связанной со средним положением исходного профиля решетки.

Будем предполагать обтекание решетки в каждый момент времени безотрывным и поместим задние критические точки в выходные кромки профилей. Параметры среднего (стационарного) потока через решетку неподвижных профилей будем считать известными. Циркуляция скорости вокруг колеблющихся профилей в общем случае зависит от времени и, согласно теореме Томсона, с каждого профиля в поток сходит вихревая пелена. Последнюю будем схематизировать в плоскости течения линией, непрерывно заполненной вихрями и простирающейся от выходной кромки профиля до бесконечности за решеткой. В рамках линейной теории можно приближенно считать, что свободные вихри за профилями движутся со скоростью стационарного потока и по его критическим линиям тока $L_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Свободный вихрь, образовавшийся в момент времени $t_1$ у выходной кромки $k$-го профиля решетки, переместится к моменту времени

$$t = t_1 + \int_0^\tau \frac{d\tau}{v_0(\tau)}$$

на расстояние $\tau$, где $\tau$ — длина дуги линии $L_k$, отсчитываемая от выходной кромки, и $v_0$ — скорость стационарного потока. Отсюда, по теореме Томсона, следует равенство:

$$\Gamma_k(t) + \int_0^\tau \gamma_k(\tau, t)\, d\tau = \Gamma_k(t_1) \tag{1.2}$$

Здесь $\Gamma_k(t)$ — циркуляция скорости жидкости вокруг $k$-го профиля решетки в момент времени $t$, $\gamma_k$ — плотность вихрей в следе за $k$-м профилем решетки. Дифференцируя равенство (1.2) по времени и учитывая, что $d\tau / dt = v_0(\tau)$, получим

$$\gamma_k(\tau, t) = -\frac{1}{v_0(\tau)} \frac{\partial \Gamma_k}{\partial t}\bigg|_{t=t_1} \left(t_1 = t - \int_0^\tau \frac{d\tau}{v_0(\tau)}\right) \tag{1.3}$$

Существенной особенностью течения через колеблющуюся решетку произвольных профилей (в отличие от течения через решетку пластин при малом угле атаки) является наличие в жидкости конечных возмущений, связанных с неравномерностью стационарного потока. Это приводит к тому, что даже при весьма малых нестационарных деформациях профилей и в рамках линейной постановки задачи необходимо учитывать изменение параметров потока, вызванное изменением формы профилей и их временного смещения в процессе колебаний. Одним из возможных путей учета деформации и взаимного смещения профилей является выполнение условия безотрывного обтекания в мгновенном положении колеблющихся профилей решетки. При этом в искомом решении отбрасываются малые величины, начиная с величин порядка квадрата амплитуды колебаний профилей [3, 4] [1].

В области $D_t^-$ вне решетки колеблющихся профилей и линий вихревых следов за ними в каждый момент времени комплексно-сопряженная скорость жидкости $V(z, t)$ аналитическая функция.

Условие безотрывного обтекания на колеблющихся профилях решетки записывается в виде

$$V_{rk}(z, t) = v_k(x, y, t) \exp[-i\alpha_k(x, y, t)] \tag{1.4}$$

$$z \in L_k{}^t, \qquad v_k = |V_{rk}|, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь $V_{rk}$ — комплексно-сопряженная относительная скорость жидкости на $k$-м профиле решетки: $\alpha_k$ — угол между касательной к $k$-му профилю решетки и осью $x$ в момент времени $t$; $L_k{}^t$ — контур $k$-го профиля решетки в момент времени $t$.

Условие касательного разрыва скорости на линиях вихревых следов сносится на линии $L_k$ и представляется в виде

$$V_\tau{}^+(x, y, t) - V_\tau{}^-(x, y, t) = \gamma_k(x, y, t) \quad (x, y) \in L_k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

где $V_\tau{}^+$, $V_\tau{}^-$ соответственно предельные значения скорости жидкости снизу и сверху на линиях вихревых следов.

На бесконечном удалении перед решеткой выполняется условие затухания нестационарной части возмущенной скорости жидкости.

[1] Учет указанного эффекта возможен также в постановке работ [1, 2].

2. Представим комплексно-сопряженную скорость жидкости в точке $\zeta = \xi + i\eta$ $k$-го профиля решетки в виде

$$\begin{gathered} V_k(\zeta, t) = V_0(\zeta_0) + V(\zeta_0)e^{j\omega t}e^{jkm\pi} \\ V_0(\zeta_0) = V_0(\zeta_0 + ikh), \quad V(\zeta_0) = V(\zeta_0 + ikh), \quad \zeta_0 \in L_0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $V_0$ — комплексно-сопряженная скорость на профилях решетки в стационарном потоке, $L_0$ — контур исходного профиля решетки, в среднем (недеформированном) положении, $\zeta_0 + ikh$ — комплексная координата той точки $k$-го профиля, которая в момент времени $t$ имеет координату $\zeta$.

Комплексно-сопряженная скорость жидкости в точке $z \in D_t^-$ по формуле Коши

$$V(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\int_{L_k^t}\frac{V_k(\zeta, t)}{z-\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{L_k}\frac{\gamma_k(\tau, t)\,d\tau}{z-\zeta(\tau)} + V_\infty \tag{2.2}$$

$$V_\infty = \text{conts}$$

При этом направлении обхода контуров $L_k^t$ выбирается так, чтобы область $D_t^-$ оставалась справа.

В правой части равенства (2.2) удобно перейти к относительной скорости жидкости на профилях решетки.

Комплексно-сопряженная относительная скорость жидкости в точке $\zeta$ $k$-го профиля решетки в соответствии с равенствами (1.1), (2.2) и граничным условием (1.4) равна

$$\begin{gathered} V_{rk}(\zeta, t) = V_k(\zeta, t) - j\omega\delta\bar{f}(\zeta_0)e^{j\omega t}e^{jkm\pi} = \\ = [v_0(s) + v(s)e^{j\omega t}e^{jkm\pi}]\exp[-i(\alpha_0(s) + \alpha(s)e^{j\omega t}e^{jkm\pi})] \quad (\bar{f} = f_x - if_y) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $s$ — длина дуги контура $L_0$, отсчитываемая от задней кромки в положительном направлении (против хода часовой стрелки), $\alpha_0(s)$ — угол между касательной к контуру $L_0$ в точке $s$ и осью $x$. Функция $\alpha(s)$ определяется заданием формы колебаний профилей.

Величина касательного разрыва скорости на линии вихревого следа за $k$-м профилем определяется согласно формуле (1.3) из равенства

$$\gamma_k(\tau, t) = -\frac{1}{v_0(\tau)}\frac{\partial}{\partial t}\left[\operatorname{Re}_i\int_{L_k^t}V_k(\zeta, t)\,d\zeta\right]\Bigg|_{t=t_1}$$

Отсюда, переходя в подынтегральном выражении к переменной $\zeta_0 \in L_0$ по формуле (1.1) и учитывая соотношения (2.1) и (2.3), получим

$$\begin{gathered} \gamma_k(\tau, t) = -j\omega\frac{\exp(-j\omega T(\tau))}{v_0(\tau)}\left\{\int_{L_0}v(s)\,ds + \delta\int_{L_0}v_0(s)\operatorname{Re}\frac{df}{d\zeta_0}\,ds + \right. \\ \left. + j\omega\delta\operatorname{Re}\left[\int_{L_0}\bar{f}(\zeta_0)\,d\zeta_0\right]\right\}e^{j\omega t}e^{jkm\pi} + o(\delta^2) \quad \left(T(\tau) = \int_0^\tau\frac{d\tau}{v_0(\tau)}\right) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Пусть при $m \neq 0$ $l_0$ — наименьшее целое положительное число такое, что величина $N = l_0 / m$ является целым числом [1]. Используя разложение гиперболического котангенса на простые дроби и учитывая равенства (1.1), (2.3), (2.4) и условие на бесконечном удалении перед решеткой, равенство (2.2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} V(z, t) = \frac{1}{4Nhi}\sum_{n=0}^{2N-1}\left\{\int_{L_n^t}V_{rn}(\zeta, t)R(z, \zeta)\,d\zeta - j\omega e^{j\omega t}e^{jnm\pi}\left[\int_{L_0}v(s)\,ds + \right.\right. \\ \left.\left. + \delta\int_{L_0}v_0(s)\operatorname{Re}\frac{df}{d\zeta_0}\,ds\right]\int_{L_0}\frac{\exp(-j\omega T(\tau))}{v_0(\tau)}R(z, \zeta(\tau))\,d\tau\right\} + j\omega F(z) + V_1 + 0(\delta^2) \end{gathered} \tag{2.5}$$

[1] В реальных решетках, где число лопаток конечно, такое число $l_0$ всегда найдется.

Здесь $\bar{V}_1$ — комплексно-сопряженная скорость жидкости на бесконечном удалении перед решеткой

$$R(z,\ \zeta)-1=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\left[\pi\frac{z-\zeta}{2Nh}-ik\pi\right]^{-1}=\operatorname{cth}\pi\frac{z-\zeta}{2Nh}$$

$$F(z)=\delta\frac{1}{4Nhi}\sum_{n=0}^{2N-1}e^{jnm\pi}\left\{\int\limits_{L_n^t}\bar{f}(\zeta_0)R(z,\ \zeta)\,d\zeta-\right.$$

$$\left.-j\omega\operatorname{Re}\left[\int\limits_{L_0}\bar{f}(\zeta_0)\,d\zeta_0\right]\int\limits_{L_0}\frac{\exp(-j\omega T(\tau))}{v_0(\tau)}R(z,\ \zeta(\tau))\,d\tau\right\}$$

Из равенства (2.5) следует, что скорость потока через заданную решетку профилей, колеблющихся со сдвигом фазы $m\pi$, равна сумме скоростей потоков через $2N$ решеток, каждая из которых имеет шаг $2Nh$ и колеблется без сдвига фазы между колебаниями соседних профилей. При этом колебания двух «соседних» решеток происходят со сдвигом фазы $m\pi$. Можно показать, что в случае синфазных колебаний $(m=0)\,2N$ можно полагать любым.

Устремим в равенстве (2.5) точку $z$ из области течения к исходному профилю решетки $L_0^t$. При этом значение комплексно-сопряженной скорости на исходном профиле определяется как краевое значение аналитической в области $D_t^-$ функции, а несобственный интеграл по контуру $L_0^t$ понимается в смысле главного значения по Коши. После подстановки вместо $z\in L_0^t$, $\zeta\in L_n^t$, $\bar{V}_{r0}(z,t)$, $\bar{V}_{rn}(\zeta,t)$ их значений, определяемых соответственно из формул (1.1) и (2.3), разложим полученное выражение в ряд по степеням $\delta$. Ограничиваясь членами порядка величины $\delta$ и объединяя коэффициенты при экспоненциальном множителе $e^{j\omega t}$, получим равенство

$$v(\sigma)\,e^{-i\alpha(\sigma)}-\frac{1}{hi}\int\limits_{L_0}v\ (s)\,K\ (m,\quad z_0,\ \zeta_0)\,ds=i\alpha(\sigma)\,v_0(\sigma)\,e^{-i\alpha(\sigma)}+$$

$$+\frac{\delta}{hi}\int\limits_{L_0}v_0(s)\operatorname{Re}\left(\frac{df}{d\zeta_0}\right)K(m,\ z_0,\ \zeta_0)\,ds-\frac{\delta}{hi}\int\limits_{L_0}v_0(s)\,g\,(m,z_0,\zeta_0)\,ds+2j\omega F^+(z_0)\tag{2.6}$$

где

$$F^+(z_0)=-\frac{\delta}{2}\bar{f}(z_0)+F(z_0),\quad K=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1}e^{jnm\pi}\quad\left\{\operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0-\zeta_0}{h}-in\right)\right]+1\right.$$

$$\left.-j\omega\int\limits_0^\infty\frac{\exp(-j\omega T(\tau))}{v_0(\tau)}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0-\zeta_0}{h}-in\right)+1\right]d\tau\right\}\tag{2.7}$$

$$g=\frac{1}{4N^2\pi}\sum_{n=0}^{2N-1}e^{jnm\pi}\ [f(z_0)\,e^{-jnm\pi}-f(\zeta_0)]\operatorname{sh}^{-2}\left[\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0-\zeta_0}{h}-in\right)\right]$$

Интегрирование в пределах $(0,\ \infty)$ в равенстве (2.7) ведется вдоль линии $L_0$ от задней кромки исходного профиля до бесконечности за решеткой. Функция $F^+(z_0)$ с точностью до членов порядка величины $\delta$ включительно представляет собой предельное значение функции $Fh^2(z)$ при $z$, стремящемся к точке $z_0\in L_0$ из области $D^+$, ограниченной контуром $L_0$. Отметим, что если функция $\bar{f}(z_0)$ является краевым значением аналитической в области $D^+$ функции, то имеет место соотношение

$$F^+(z_0)=\delta\bar{f}(z_0)\tag{2.8}$$

Равенство (2.6) можно рассматривать как интегральное уравнение с особым ядром (простой полюс в точке $s=\sigma$)) относительно действительной (по $i$) функции $v(\sigma)$. Это уравнение может быть решено численно.

Правая часть уравнения (2.6) полностью определяется из решения соответствующей стационарной задачи. Второе и третье слагаемые в правой части (2.6) связаны с деформацией и взаимным смещением профилей в процессе колебаний.

В случае изгибно-крутильных колебаний без деформации функция $f(z_0)$ линейна:

$$f(z_0) = f_0 + i\alpha / \delta(z_0 - z_p), \quad f_0 = \mathrm{const}$$

где $\alpha$ — амплитуда крутильных колебаний и $z_p$ — комплексная координата центра крутильных колебаний исходного профиля решетки. В этом случае, в силу тождества $\mathrm{Re}\, df / dz_0 \equiv 0$, второе слагаемое в правой части уравнения (2.6) исчезает. Учитывая, что при этом выполняется условие равенства (2.8), получим

$$Kv = i\alpha v_0(\sigma)\, e^{-i\alpha^0(\sigma)} - \frac{\delta}{hi} \int_{L_0} v_0(s)\, g(m, z_0, \zeta_0)\, ds + 2j\omega\delta\bar{f}(z_0) \tag{2.9}$$

где символом $Kv$ обозначен оператор, стоящий в левой части уравнения (2.6).

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.9) связано со взаимным смещением профилей в процессе колебаний. В случае чисто изгибных синфазных колебаний ($f(z_0) = f_0 = \mathrm{const}\ m = 0$) уравнение (2.6) принимает вид

$$Kv = 2j\omega\delta\bar{f}(z_0).$$

3. Комплексный потенциал скорости жидкости в точке $z \in D_t$

$$W(z, t) = \int V(z, t)\, dz$$

в соответствии с (2.5) равен

$$W(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{2N-1} \int_{L_n^t} V_n(\zeta, t)\, r_n(z, \zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{2N-1} \int_{L_n} \gamma_n(\tau, t)\, r_n(z, \zeta)\, d\tau + V_1 z + c(t)$$

$$r_n = \ln\left[2N\frac{h}{\pi}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{2N}\frac{z - \zeta_n(t)}{h}\right)\right] + z \tag{3.1}$$

Здесь $c(t)$ — произвольная функция времени.

Равенство (3.1) дает общее представление комплексного потенциала течения через решетку колеблющихся профилей в полосе основного периода, содержащего $2N$ профилей $L_n^t$ ($n = 0, 1, 2, 2N - 1$) с разрезами вдоль линий вихревых следов.

Устремим точку $z$ к исходному профилю решетки. В правой части равенства (3.1) в интегральных выражениях перейдем к комплексно-сопряженной относительной скорости на профилях решетки и сделаем замену переменных в соответствии с равенством (1.1)

$$z = z(z_0, t) \qquad (z \in L_0^t,\ z_0 \in L_0)$$
$$\zeta = \zeta_n(\zeta_0, t) \qquad (\zeta \in L_n^t,\ \zeta_0 \in L_0)$$

Используя представление $sh$ в виде бесконечного произведения и учитывая формулу (2.4), разложим правую часть равенства (3.1) в ряд по степеням $\delta$. Ограничиваясь членами порядка величины $\delta$ включительно для значения комплексного потенциала скорости жидкости на исходном профиле решетки получим выражение

$$W(z, t) = W_0(z_0) + e^{j\omega t}[W_1(z_0) + \delta W_2(z_0)] + c(t), \quad (z \in L_0^t) \tag{3.2}$$

$$W_0(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} v_0(s) \left\{\ln\left[\frac{h}{\pi}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{h}(z_0 - \zeta_0)\right] + z_0\right\} ds + V_1 z_0 + \mathrm{const}$$

$$W_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} v(s)\, w(m, z_0, \zeta_0)\, ds + \delta V_1 f(z_0) \tag{3.3}$$

$$W_2(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} v_0(s)\, \mathrm{Re}\left(\frac{df}{d\zeta_0}\right) w(m, z_0, \zeta_0)\, ds + \Phi(z_0) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} v(s) \frac{1}{Nh} \sum_{n=0}^{2N-1} [f(z_0) - f(\zeta_0)\, e^{jnm\pi}]\, \mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0 - \zeta_0}{h} - in\right)\right] ds \tag{3.4}$$

Здесь $W_0$ — комплексный потенциал стационарного потока, $v(s)$ — решение уравнения (2.6)

$$w = \sum_{n=0}^{2N-1} e^{jnm\pi}\left\{\ln\left[\frac{2Nh}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0-\zeta_0}{h}-in\right)\right]-\right.$$

$$\left.-j\omega\int_0^\infty \frac{\exp(-j\omega T(\tau))}{v_0(\tau)}\ln\left[\frac{2Nh}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\pi}{2N}\left(\frac{z_0-\zeta_0(\tau)}{h}-in\right)\right]d\tau\right\} \tag{3.5}$$

$$\Phi(z) = \int F(z)\,dz$$

Величина $\delta e^{j\omega t}W_2(z)$ представляет собой ту часть комплексного потенциала скорости нестационарного потока, которая вызвана относительным смещением и деформацией профилей в процессе колебаний. В случае изгибно-крутильных колебаний без деформации, согласно равенству (2.8) и тождеству $\operatorname{Re} df/dz_0 \equiv 0$ впервые два слагаемых в правой части равенства (3.4) равны нулю.

Легко видеть, что для точки $z \in L_n^t$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1)$ выполняется соотношение

$$W(z,t) = W_0(z_0) + e^{j\omega t}e^{jnm\pi}[W_1(z_0) + \delta W_2(z_0)] + c(t)$$

Давление жидкости в точке $(x, y)$ $k$-го профиля решетки в момент времени $t$ по формуле Коши — Лагранжа равно

$$p(x, y, t) = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho V^2(x, y, t) + c_1(t) \tag{3.6}$$

Здесь $\rho$ — плотность жидкости, $c_1(t)$ — произвольная функции времени, $V(x, y, t)$ — скорость жидкости и $\varphi(x, y, t) = \operatorname{Re}_i W(z, t)$ — потенциал скорости жидкости на $k$-м профиле решетки в момент времени $t$. Величины $V(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ определяются из соотношений (2.3) и (3.2) — (3.5). После интегрирования равенства (3.6) по контуру $L_k^t$ для главного вектора аэродинамических сил, действующих на $k$-й профиль решетки, с точностью до членов порядка величины $\delta$ получим выражение

$$X_k(t) + iY_k(t) = X_0 + iY_0 + e^{j\omega t}e^{jkm\pi}(X + iY)$$

$$X_k + iY = -i\rho\int_{L_0}\left[j\omega(\varphi_1(s) + \delta\varphi_2(s) + \delta v_0(s) f_\tau(s)) + v_0(s)v(s) + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\delta v_0^2(s)\operatorname{Re}\frac{df}{dz_0}\right]e^{i\alpha_0(s)}ds + \frac{1}{2}\rho\int_{L_0}\alpha(s)v_0^2(s)\,e^{i\alpha_0(s)}\,ds \tag{3.7}$$

$$(f_\tau = f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha,\quad \varphi_1 = \operatorname{Re}_i W_1(z_0),\quad \varphi_2 = \operatorname{Re}_i W_2(z_0))$$

Здесь $X_0 + iY_0 = -i\rho V_\infty\int v_0(s)\,ds$ — главный вектор аэродинамических сил, действующих на профиль решетки в стационарном потоке.

Аэродинамический момент относительно неподвижной точки с комплексной координатой $z_{MK} = z_M + ikh$ равен

$$M_K(t) = M_0 + e^{j\omega t}e^{jkm\pi}M$$

$$M = -\rho\int_{L_0}\left[j\omega(\varphi_1(s) + \delta\varphi_2(s) + \delta v_0(s) f_\tau(s)) + v_0(s)v(s) + \right.$$

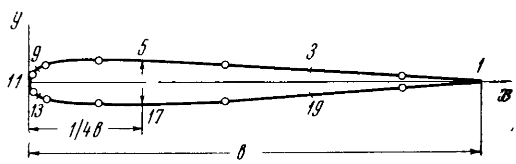
$$\left.+\frac{1}{2}\delta v_0(s)\operatorname{Re}\frac{df}{dz_0}\right]\operatorname{Re}\left[(z - z_M)\,e^{-i\alpha_0(s)}\right]ds + \frac{1}{2}\int_{L_0}\alpha(s)v_0^2(s)\operatorname{Im}\left[(z - z_M)\,e^{-i\alpha_0(s)}\right]ds -$$

$$-\frac{1}{2}\rho\delta\int_{L_0}v_0^2(s) f_\tau(s)\,ds$$

где $M_0$ — аэродинамический момент, действующий на профиль решетки в стационарном потоке.

В качестве примера на фиг. 3, 4 представлены результаты расчета по квазистационарной теории ($\gamma_k(\tau, t) = 0$, $k = 0, \pm1, \pm2 \ldots$) коэффициентов

$$C_y = C_{yr} + j\frac{1}{q}C_{yi} = Y \Big/ \frac{1}{2}\rho V_1^2 jq\delta$$

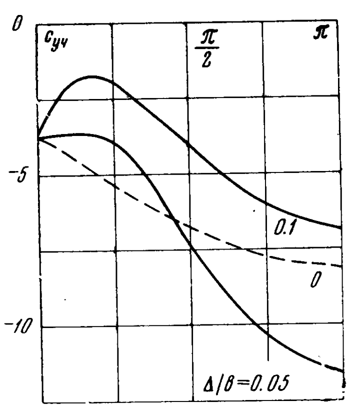



Фиг. 2

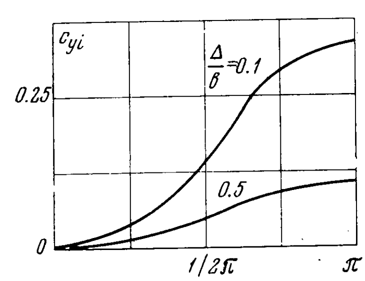
где $b$ — длина хорды профиля, $q = \omega b / V_1$ — число Струхаля для двух решеток симметричных профилей (фиг. 2), близких к решетке пластин без выноса с густотой $\tau = b / h$, равной единице. Профили совершают изгибные колебания параллельно оси $y$ в потоке, набегающем под нулевым углом атаки.

Можно показать, что в рассматриваемом случае к интегральному уравнению (2.6) после некоторых преобразований применим метод Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, который позволяет свести это уравнение к системе $n$ алгебраических уравнений относительно приближенных значений величины $v(s_k)$ ($k = 2, 4, 6, \ldots, 2n$) в $n$ точках профиля. При этом профиль разбивается на $2n$ участков и острая задняя кромка выбирается в качестве начальной точки разбиения. Интегралы в правой части формулы (3.7) после численного решения уравнения (2.6) вычислялись приближенно по значениям величин $v_0(s)$ и $v(s)$ в конечном числе точек.

Расчетные точки получены для значений $n = 10$ и $m = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$. Отношение максимальной толщины профиля к длине хорды ($\Delta / b$) принималось равным 0. 05 и 0.1. Пунктиром на фиг. 3 нанесена зависимость $C_{yr}(m)$ для решетки пластин единичной густоты с нулевым углом выноса. Эта зависимость получена на основе работы [5]. Отметим,




Фиг. 3




Фиг. 4

что для решетки пластин без выноса $C_{yi}(m) \equiv 0$.

Представленные результаты позволяют судить о влиянии телесности профиля на нестационарные аэродинамические характеристики решетки. Особенно сильно влияние телесности при колебаниях решетки со сдвигом фазы между колебаниями соседних профилей.

Поступило 21 IX 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 20, вып. 1.
3. Сарен В. Э. Обтекание решетки тонких криволинейных профилей нестационарным потоком несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
4. Мусатов В. В. К расчету нестационарного обтекания решетки профилей в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
5. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на решетку пластин, колеблющихся в плоском потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.