ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ ВРАЩЕНИЯ

Э. И. ГРИГОЛЮК, А. Г. ГОРШКОВ, Ф. Н. ШКЛЯРЧУК

(Москва)

Точные решения гидродинамической задачи о колебаниях идеальной жидкости внутри упругой оболочки вращения (в предположении, что нормальные перемещения последней заданы) известны только для некоторых типов оболочек, ограничивающих такие объемы жидкости, которые допускают решение уравнения Лапласа (или волнового уравнения) при соответствующих граничных условиях в изученных специальных функциях. Некоторые точные решения и библиографию по этому вопросу можно найти в [1].

В работе [2] решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в области, ограниченной упругой оболочкой вращения и свободной поверхностью жидкости, ищется в виде логарифмического потенциала простого слоя, и задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма относительно плотности простого слоя.

При использовании вариационных методов в перемещениях, если задавать перемещения оболочки в виде разложений по заданным координатным функциям, как это обычно делается в задачах аэрогидроупругости [3], наибольшая трудность возникает при выборе системы потенциальных функций, описывающих движение жидкости, удовлетворяющих кинематическому граничному условию на смоченной поверхности оболочки.

В работе [4] эта трудность была преодолена тем, что потенциал перемещений разыскивался в виде разложения по заданным гармоническим координатным функциям с неизвестными коэффициентами, а кинематическое граничное условие затем использовалось для определения нормальных перемещений оболочки. В качестве координатных функций выбирались гармонические функции для описанного цилиндра. Аналогичный подход при рассмотрении осесимметричных колебаний использовался также в [5].

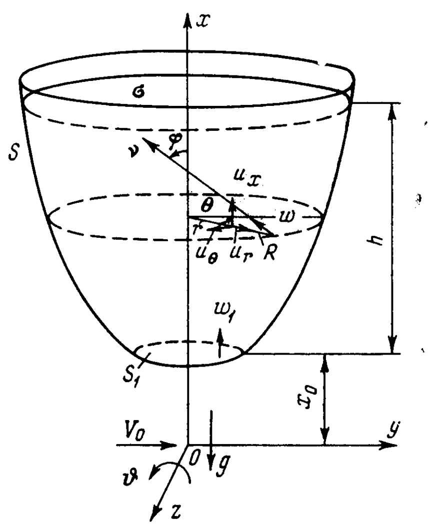
При определенных преимуществах в этом методе, очевидно, появляется новая трудность, связанная с удовлетворением кинематических граничных условий для нормальных перемещений и описанием быстро изменяющихся нормальных перемещений типа краевого эффекта. Последний особенно проявляется при низших формах осесимметричных колебаний тонких оболочек с жидким заполнением, которые достаточно хорошо описываются безмоментным решением за исключением зон, прилегающих к шпангоутам и опорному контуру, где перемешивания носят ярковыраженный характер краевого эффекта.

Л. И. Балабух, используя тот факт, что потенциал скоростей жидкости одновременно представляет функцию давления жидкости, предложил метод [6], основанный на обобщенном принципе Гамильтона, соответствующем условию стационарности дополнительной энергии. Заданием потенциала скоростей определяется давление на оболочку, для которой можно решить задачу о «вынужденных» колебаниях. Особенно упрощается задача в случае статически определимой тонкой безмоментной и безынерционной оболочки с жидкостью. Что касается общего случая, то здесь, очевидно, для оболочки может быть использована расчетная схема метода сил.

При такой постановке все кинематические соотношения (уравнения неразрывности жидкости и оболочки и кинематическое граничное условие на смоченной поверхности) вытекают из вариационной формулировки задачи и при решении ее будут выполняться приближенно.

При расчете колебаний оболочек с жидкостью может быть использован смешанный вариационный принцип, предложенный И. М. Рапопортом [7] для упругого тела с полостями, содержащими жидкость. В этом принципе давление в жидкости и перемещения в упругом теле варьируются независимо и из него следуют уравнения неразрывности жидкости, уравнения движения тела и кинематическое граничное условие на его смоченной поверхности. Затруднение, которое может встретиться при использовании этого принципа (например, при реализации метода Ритца) — эта необходимость учета достаточно большого числа обобщенных координат, поскольку давление жидкости и упругие перемещения здесь задаются в виде независимых разложений. Аналог этого принципа для недеформируемых подвижных полостей с жидкостью и реализация его по методу Ритца успешно использовались в работах [8, 9] для определения частот и коэффициентов присоединенных масс жидкости.

Ниже рассматривается вариационный метод решения в перемещениях гидродинамической задачи для малых асимметричных колебаний идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения с упругим плоским дном. Уравнение неразрывности жидкости и кинематическое граничное условие на смоченной поверхности оболочки (кроме дна) удовлетворяются точно. Движение жидкости считается потенциальным только в плоскостях, перпендикулярных оси оболочки, на основании чего два уравнения движения жидкости в этих плоскостях удовлетворяются точно. Уравнение движения жидкости в направлении оси оболочки, а следовательно, и условие потенциальности ее движения в плоскостях, проходящих через ось оболочки, выполняются приближенно на основе вариационного метода решения. Задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций, характеризующих осевые перемещения жидкости.



Фиг. 1

1. Постановка задачи. Рассмотрим малые колебания идеальной несжимаемой жидкости внутри упругой оболочки вращения с упругим плоским дном.

Движение оболочки и жидкости будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, совершающей установившееся поступательное движение (фиг. 1).

Будем считать, что в невозмущенном состоянии ось оболочки совпадает с осью Ox, а свободная поверхность жидкости перпендикулярна этой оси (т. е. вектор массовых сил — g направлен вдоль оси Ox).

Возмущенное движение системы оболочка — жидкость характеризуется малыми перемещениями оболочки, в которые входят также и упругие перемещения, и волновыми движениями на свободной поверхности жидкости.

Будем считать, что перемещение оболочки вдоль оси Ox, поворот ее вокруг этой оси и осесимметричная деформация оболочки отсутствуют. Таким образом, из рассмотрения исключаются продольные и крутильные колебания системы. Продольные колебания жидкости внутри упругой оболочки вращения в аналогичной постановке рассматривались в работе [10]. При крутильных колебаниях оболочка вращения с жидкостью не взаимодействует. При решении гидродинамической задачи «временно» предполагается, что движение оболочки в системе координат $Oxyz$ известно.

Запишем в цилиндрических координатах уравнение неразрывности жидкости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad (1.1)$$

линейные уравнения движения

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g + \rho \ddot{u} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} + \rho \ddot{u}_r = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \ddot{u}_\theta = 0 \qquad (1.2)$$

кинематические граничные условия на смоченной поверхности оболочки S и на дне S_1

$$u_x \cos\varphi - u_r \sin\varphi = w \quad \text{при } r = R, \qquad u_x = w_1 \quad \text{при } x = x_0 \tag{1.3}$$

динамическое граничное условие на возмущенной свободной поверхности жидкости

$$p = 0 \quad \text{при } x = x_0 + h + \zeta \tag{1.4}$$

Здесь $u_\xi(x, r, \theta, t)$ $(\xi = x, r, \theta)$ и $p(x, r, \theta, t)$ — проекции перемещения и давление внутри жидкости; $w(x, \theta, t)$ и $w_1(r, \theta, t)$ — нормальные перемещения оболочки и дна, положительные внутрь; ρ — плотность;

$$\zeta(r, \theta, t) = u_x(x_0 + h, r, \theta, t)$$

2. Определение давления в жидкости. Поставленная задача допускает разделение переменных по координате θ и по времени t. Поэтому для простоты будем считать, что перемещения боковой поверхности оболочки и дна заданы в виде одного из членов разложения их в ряд Фурье по координате θ

$$w(x, \theta, t) = W(x, t)\cos n\theta, \qquad w_1(r, \theta, t) = W_1(r, t)\cos n\theta \tag{2.1}$$

Осевые перемещения и давление в жидкости представим в виде

$$u_x(x, r, \theta, t) = u(x, r, t)\cos n\theta$$

$$p(x, r, \theta, t) = \rho g(x_0 + h - x) - \rho\ddot{\Phi}(x, r, t)\cos n\theta \tag{2.2}$$

Тогда первое уравнение движения (1.2) запишется так:

$$u - \partial\Phi/\partial x = 0 \tag{2.3}$$

Используя последние два уравнения движения (1.2), выразим перемещения u_r и u_θ с учетом (2.2) через функцию динамического давления Φ; подставляя их в уравнение неразрывности (1.1), запишем его в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\Phi = -\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

Граничные условия (1.3) и (1.4) примут вид $(R' = \operatorname{ctg}\varphi)$

$$uR' - \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{W}{\sin\varphi} \quad \text{при } r = R, \qquad u - W_1 = 0 \quad \text{при } x = x_0 \tag{2.5}$$

$$\ddot{\Phi} + gu = 0 \quad \text{при } x = x_0 + h \tag{2.6}$$

Далее будем считать, что $R(x)$ является однозначной функцией.

Запишем общее решение уравнения (2.4) при $n \neq 0$, удовлетворяющее первому кинематическому граничному условию (2.5) и ограниченное при $r = 0$, (2.7)

$$\Phi = \frac{1}{n}\left(u|_{r=R}R' - \frac{W}{\sin\varphi}\right)R^{-n+1}r^n + \frac{r^n}{2n}\int_0^R \frac{\partial u}{\partial x}r^{-n+1}\,dr +$$

$$+ \frac{r^n}{2n}R^{-2n}\int_0^R \frac{\partial u}{\partial x}r^{n+1}\,dr - \frac{r^n}{2n}\int_0^r \frac{\partial u}{\partial x}r^{-n+1}\,dr + \frac{r^{-n}}{2n}\int_0^r \frac{\partial u}{\partial x}r^{n+1}\,dr$$

3. Сведение задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Будем разыскивать осевые перемещения в виде разложения

$$u(x, r, t) = \sum_{i=1} u_i(x, t)\varphi_i\left(\frac{r}{R}\right) \tag{3.1}$$

где $\varphi_i(r/R)$ — заданные функции. На основании (2.7) следует, что эти функции желательно выбирать такие $\varphi_i(\alpha) \sim \alpha^n$ или $\varphi_i(\alpha) \sim \alpha^{n+2(i-1)}$ при $\alpha \to 0$, чтобы уравнения (2.3) и (2.6) точнее удовлетворялись при $r \to 0$. Подставляя (3.1) в (2.7), получим

$$\Phi = -\frac{WR}{n\sin\varphi}\alpha^n + \frac{R}{2n}\sum_{i=1}^{k}\left\{[Ru_i' - (n-2)R'u_i]\,\alpha^n\int_\alpha^1 \varphi_i\alpha^{-n+1}\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + [Ru_i' + (n+2)R'u_i]\left(\alpha^n\int_0^1 \varphi_i\alpha^{n+1}\,d\alpha + \alpha^{-n}\int_0^\alpha \varphi_i\alpha^{n+1}\,d\alpha\right)\right\} \qquad \left(\alpha = \frac{r}{R}\right)$$

Здесь штрихи обозначают производные по x.

Уравнение (2.3), второе условие (2.5) и условие (2.6) удовлетворим приближенно по методу Бубнова — Галеркина на совокупности функций φ_j $(j = 1, \ldots, k)$

$$\int_0^R \left(u - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\varphi_j r\,dr = 0$$

$$\int_0^R (u - W_1)\varphi_j r\,dr = 0 \qquad \text{при } x = x_0$$

$$\int_0^R (\Phi^{\cdot\cdot} + gu)\varphi_j r\,dr = 0 \qquad \text{при } x = x_0 + h$$

Подставляя сюда (2.7) с учетом (3.1), получим:

уравнения движения

$$\sum_{i=1}^{k}[R^2k_{ji}u_i'' + 2RR'p_{ji}u_i' - (2na_{ji} + R'^2q_{ji} - RR''r_{ji})u_i] =$$

$$= 2d_j\left[\left(\frac{W}{\sin\varphi}\right)'R - (n-1)\frac{WR'}{\sin\varphi}\right] \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{3.3}$$

кинематические граничные условия при $x = x_0$

$$\sum_{i=1}^{k}a_{ji}u_i = \int_0^1 W_1\varphi_j\alpha d\alpha \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{3.4}$$

динамические граничные условия при $x = x_0 + h$

$$\sum_{i=1}^{k}\left[Rk_{ji}u_i^{\cdot\cdot\prime} + R'r_{ji}u_i^{\cdot\cdot} + 2n\frac{g}{R}a_{ji}u_i\right] = 2d_j\frac{W^{\cdot\cdot}}{\sin\varphi} \tag{3.5}$$

$$(j = 1, \ldots, k)$$

Коэффициенты в уравнениях (3.3) — (3.5) определяются по формулам

$$k_{ij} = d_id_j + c_{ij} + c_{ji}, \qquad p_{ij} = 2k_{ij} - n(c_{ij} - c_{ji})$$

$$q_{ij} = 2nb_{ij} + n(2n+1)d_id_j - (n^2+2)k_{ij} + 3n(c_{ij} - c_{ji})$$

$$r_{ij} = p_{ij} + nd_id_j \tag{3.6}$$

В формулах (3.6) величины a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_i равны:

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \alpha \, d\alpha, \qquad b_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \alpha^3 \, d\alpha$$

$$c_{ij} = \int_0^1 \left(\int_0^\alpha \varphi_i \alpha^{n+1} \, d\alpha \right) \varphi_j \alpha^{-n+1} \, d\alpha, \qquad d_i = \int_0^1 \varphi_i \alpha^{n+1} \, d\alpha$$

В случае, если поверхность жидкости закрыта невесовой «крышкой», которая неподвижна или остается перпендикулярной оси деформированной оболочки (при $n = 1$), то при $x = x_0 + h$ ставится кинематическое граничное условие, аналогично (3.4).

Запишем еще условия сопряжения двух решений в каком-либо сечении $x = c$, которое, например, может представлять место стыка двух различных оболочек. При $x = c$ должны выполняться условия

$$u_x^-(c, r, \theta, t) = u_x^+(c, r, \theta, t), \quad p^-(c, r, \theta, t) = p^+(c, r, \theta, t) \qquad (3.7)$$

Здесь индексы — и + обозначают принадлежность к участкам $x \leqslant c$ и $x \geqslant c$ соответственно. Из второго условия (3.7) в силу двух последних уравнений движения (1.2), которые выполняются точно, также следует

$$u_r^-(c, r, \theta, t) = u_r^+(c, r, \theta, t), \qquad u_\theta^-(c, r, \theta, t) = u_\theta^+(c, r, \theta, t)$$

Будем считать, что u^- и u^+ представлены в виде разложений (3.1) по одним и тем же функциям φ_i. Тогда кинематическое условие (3.7) будет выполняться, если

$$u_j^- = u_j^+ \quad \text{при } x = c \quad (j = 1, \ldots, k) \qquad (3.8)$$

Динамическое условие (3.7) удовлетворим приближенно по методу Бубнова. Тогда с учетом второго соотношения (2.2) будем иметь

$$\int_0^R (\Phi^- - \Phi^+) \varphi_j r \, dr = 0 \quad \text{при } x = c \quad (j = 1, \ldots, k) \qquad (3.9)$$

Подставляя в эти уравнения (2.7) и учитывая (3.1), получим

$$\sum_{i=1}^k [(u_i^{-\prime} - u_i^{+\prime}) R k_{ji} + (u_i^- R^{-\prime} - u_i^+ R^{+\prime}) r_{ji}] - 2d_j \left(\frac{W^-}{\sin \varphi^-} - \frac{W^+}{\sin \varphi^+} \right) = 0$$

$$\text{при } x = c \ (j = 1, \ldots, k)$$

Таким образом, краевая задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) с переменными коэффициентами при граничных условиях (3.4), (3.5), после чего давление в жидкости определяется по второй формуле (2.2) с учетом (3.2).

Аналогичные уравнения для осесимметричных колебаний жидкости внутри упругой оболочки вращения получены в [10].

Для цилиндра уравнения (3.3) переходят в дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, а для конуса — в дифференциальные уравнения типа Эйлера.

Если выбрать функции φ_i в виде полной системы ортогональных функций Бесселя $\varphi_i(\alpha) = J_n(\xi_{ni}\alpha)$, где ξ_{ni} — корни уравнения $J_n'(\xi) = 0$, то $a_{ij} = k_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и для цилиндра системы уравнений (3.3) и граничных условий (3.4), (3.5) распадаются и этот метод приводит к точному решению гидродинамической задачи для потенциала перемещений Φ.

4. Примеры. Рассмотрим возмущенное движение в плоскости $x0y$ абсолютно жесткой конической полости, частично заполненной жидкостью, которое характеризуется перемещением V_0 и малым углом поворота ϑ, связанной с полостью системы координат $0_1x_1y_1z_1$ с началом в вершине конуса:

$$x = x_1 + \vartheta y_1, \qquad y = V_0 + y_1 - \vartheta x_1$$

В этом случае $R = x\,\mathrm{tg}\,\beta$ (β — угол полураствора конуса), $n = 1$ и

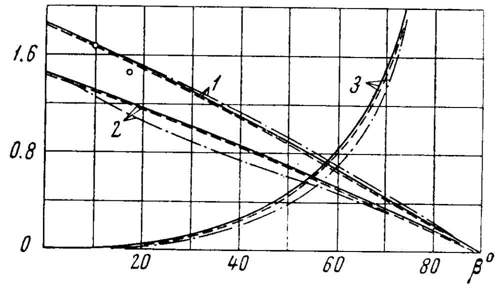
$$W(x) = -V_0 \cos\beta + \vartheta x \sec\beta$$

В разложении (3.1) удержим только один член ($k = 1$) и зададим $\varphi_1 = \alpha$, что соответствует гипотезе «плоских сечений». Тогда

$$a_{11} = {}^1/_4, \quad b_{11} = {}^1/_6$$

$$c_{11} = {}^1/_{24}, \quad d_1 = {}^1/_4, \quad k_{11} = {}^7/_{48}$$

$$p_{11} = {}^7/_{24}, \quad q_{11} = {}^1/_{12}, \quad r_{11} = {}^{17}/_{48}$$



Фиг. 2

Уравнение (3.3) и граничные условия (3.4), (3.5) (после отбрасывания несущественных множителей) запишутся так:

$$x^2u_1'' + 4xu_1' - \frac{4}{7}(1 + 6\,\mathrm{ctg}^2\,\beta)u_1 = \frac{24}{7}\,\frac{\vartheta x}{\sin\beta\cos\beta}$$

$$u_1 \neq \infty \quad \text{при } x = 0, \qquad h\ddot{u}_1' + \frac{17}{7}\ddot{u}_1 + \frac{24}{7}\,\frac{g}{h}\,\mathrm{ctg}^2\,\beta\cdot u_1 = 0 \quad \text{при } x = h$$

Решение дифференциального уравнения с учетом граничного условия при $x = 0$

$$u_1 = r_1\left(\frac{x}{h}\right)^{\varepsilon} + \vartheta h\frac{\mathrm{ctg}\,\beta}{\cos^2\beta\,(1 - \mathrm{ctg}^2\,\beta)}\left[\frac{x}{h} - \left(\frac{x}{h}\right)^{\varepsilon}\right] \qquad \text{при } \varepsilon \neq 1$$

$$u_1 = r_1\frac{x}{h} + \frac{48}{35}\vartheta x \ln\frac{x}{h} \qquad \text{при } \varepsilon = 1$$

где $\varepsilon = -{}^3/_2 + \sqrt{{}^3/_4 + ({}^4/_7)(1 + 6\,\mathrm{ctg}^2\,\beta)}$ — положительный корень характеристического уравнения ($\varepsilon = 1$ соответствует $\beta = 45°$); $r_1(t)$ — обобщенная координата, характеризующая колебания свободной поверхности по форме $\zeta_1(r, \theta) = (r / R_0)\cos n\theta$; $R_0 = h\,\mathrm{tg}\,\beta$ — радиус свободной поверхности.

Подставляя u_1 в граничное условие при $x = h$ и умножая его на $\pi\rho R_0^3 / 2$, получим

$$\mu_1\ddot{r}_1 + \mu_1\omega_1^2 r_1 + \lambda_1\ddot{V}_0 + \lambda_{01}\ddot{\vartheta} = 0 \tag{4.1}$$

Давление жидкости на стенки оболочки определяется по второй формуле (2.2) с учетом (3.2) при $a = 1$. Главный вектор и главный момент, действующие со стороны жидкости на оболочку приводятся к виду

$$\begin{aligned} P_y &= -(M\ddot{V}_0 - S\ddot{\vartheta} + \lambda_1\ddot{r}_1) \\ M_{z_1} &= -(-S\ddot{V}_0 + I\ddot{\vartheta} + \lambda_{01}\ddot{r}_1 - gS\vartheta) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь

$$M = \pi\rho R_0^3\frac{\mathrm{ctg}\,\beta}{3}, \quad S = \frac{\pi\rho R_0^4}{4\sin^2\beta}, \quad I = \frac{\pi\rho R_0^5}{5\sin^3\beta\cos\beta}\left[1 - \frac{6}{7(\varepsilon+4)^2}\right]$$

$$\mu_1 = \frac{\pi\rho R_0^3}{96\,\mathrm{ctg}\,\beta}(7\varepsilon + 17), \quad \lambda_1 = \frac{\pi\rho R_0^3}{4}, \quad \lambda_{01} = -\frac{\pi\rho R_0^4}{4\sin\beta\cos\beta}\,\frac{\varepsilon + 3}{\varepsilon + 4} \tag{4.3}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R_0}\,\frac{24\,\mathrm{ctg}\,\beta}{7\varepsilon + 17}$$

На фиг. 2 показаны зависимости от угла β квадрата безразмерной частоты $\omega_1^2 R_0 / g$ (кривая *1*) и квадратов безразмерных коэффициентов присоединенных масс $\lambda_1^2 / \rho R_0^3 \mu_1$ (кривая *2*) и $\lambda_{01}^2 \sin^5 \beta / \rho R_0^5 \mu_1$ (кривая *3*) для нормированной формы $\zeta_1 = (r / R_0 \sqrt{\mu_1}) \cos\theta$. Сплошными линиями показаны результаты, полученные по приведенным формулам. Пунктирными и штрихпунктирными линиями показаны результаты, полученные методом Ритца в работах [8, 9], когда в качестве координатных функций выбирались гармонические конические и цилиндрические функции соответственно. Точками даны результаты экспериментов [11] для частоты.

Отметим также, что при $\beta = 45°$ это решение совпадает с точным решением, полученным в работе [12] для низшей формы собственных колебаний жидкости в конусе при $\beta = 45°$ и $n = 1$.

В качестве второго примера определим низшую частоту собственных одноузловых колебаний ($n = 1$) жидкости в неподвижной цилиндрической полости с коническим дном. Ограничимся только одной координатной функцией $\varphi_1 = \alpha$. Тогда решения уравнения (3.3) внутри конуса (ограниченное при $x = 0$) и внутри цилиндра будут соответственно

$$u_1^- = A_1 \left(\frac{x}{h} \right)^\varepsilon, \qquad u_1^+ = C_1 \operatorname{sh} \frac{k_1}{R_0}(x - h_1) + C_2 \operatorname{ch} \frac{k_1}{R_0}(x - h_1)$$

где $h_1 = R_0 \operatorname{ctg} \beta$ — глубина конической части бака; $k_1 = \sqrt{24/7}$.

Удовлетворим условия сопряжения при $x = h_1$ (3.8) и (3.9)

$$u_1^- = u_1^+, \qquad R_0 (u_1^{-\prime} - u_1^{+\prime}) + 17/7 \operatorname{tg} \beta u_1^- = 0$$

и граничное условие (3.5) при $x = h = h_1 + h_2$

$$-\omega^2 R_0 u_1^{+\prime} + k_1 \frac{g}{R_0} u_1^+ = 0$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{g}{R_0} k_1 \frac{(7\varepsilon + 17) \operatorname{tg} \beta \operatorname{th} (k_1 h_2 / R_0) + 7 k_1}{(7\varepsilon + 17) \operatorname{tg} \beta + 7 k_1 \operatorname{th} (k_1 h_2 / R_0)} \tag{4.4}$$

При $\beta \to \pi/2$ формула (4.4) дает низшую частоту колебаний жидкости в цилиндрическом баке с плоским дном $\omega^2 = (g k_1 / R_0) \operatorname{th} (k_1 h_2 / R_0)$. Точное решение для цилиндра приводит к такой же формуле, где вместо $k_1 = 1.8516$ стоит $\xi_{11} = 1.8412$.

Поступило 23 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости, изд-во «Наукова думка», Киев, 1964.
2. Рапопорт И. М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, М., изд-во «Машиностроение», 1967.
3. Моисеев Н. Н. К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости. ПММ, 1959, т. 23, № 5.
4. Александрович Л. И., Лампер Р. Е. Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура. В сб. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, изд-во «Наука», 1966.
5. Palmer I. H., Asher G. W. Calculation of axisymmetric longitudinal modes for fluid-elastic tank-ullage gas systems and comparison with model test results. AIAA Simposium on Structural Dynamics and Aerolastisity, Boston, Massachusetts, 1965.
6. Балабух Л. И. Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом. В сб. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, изд-во «Наука», 1966.
7. Рапопорт И. М. Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью, М., изд-во «Машиностроение», 1966.
8. Докучаев Л. В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях, ПММ, 1964, т. 28, № 1.
9. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исслед., 1965, 3, вып. 2.
10. Шклярчук Ф. Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. В сб. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку, 1966, изд-во «Наука», 1966.
11. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосуде, изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр., 1961, № 4.
12. Levin E. Oscillations of a Fluid in a Restlinear Conical Container. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 6.