

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОМЕХАНИКИ ДВУХФАЗНЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СРЕД

Р. И. НИГМАТУЛИН

(Москва)

В работе рассматриваются основы гидромеханики и волны уплотнения в двухфазных средах, в которых конденсированная фаза присутствует в виде частиц различного диаметра. Рассмотрен вопрос, на сколь правомочно введение только одной линейной величины d (диаметр частиц), характеризующей дисперсность конденсированной фазы. В реальных смесях имеются капли или частицы различного диаметра и дисперсность конденсированной фазы должна характеризоваться некоторой функцией распределения $\eta(d)$. Чтобы не вводить лишнюю независимую переменную, рассмотрен случай, когда в смеси имеются капли или частицы с некоторым конечным набором размеров d_2, \dots, d_n . Так как частицы разных размеров будут иметь разные скорости и температуры, то соответствующая модель сплошной среды в каждой точке будет иметь n скоростей и n температур. Соответственно, параметры конденсированной фазы, которая далее называется второй фазой, будут снабжаться индексом 2, 3, ..., n внизу в зависимости от того, к какому сорту частиц эти параметры относятся; параметры несущего газа, который далее называется первой фазой, будут снабжаться индексом 1 внизу.

Приняты те же обозначения, а также допущения, что и в работе [1], именно: (1) расстояния, на которых параметры течения меняются существенно (вне поверхностей разрыва), много больше расстояний между частицами, а следовательно, и размеров самих частиц; (2) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессах взаимодействия между фазами; (3) столкновениями, т. е. взаимодействием между частицами можно пренебречь.

1. Уравнения гидромеханики. Так же, как и в [1], получим следующие дифференциальные уравнения движения. Уравнения сохранения массы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{v}_1 &= \sum_{j=2}^n (J_j^\circ - J_{0j}), & \rho_1 &= \rho_1^\circ a_1 \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_j \mathbf{v}_j &= J_{0j} - J_j^\circ, & \rho_j &= \rho_2^\circ a_j \quad (j = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ρ_j и a_j ($j = 1, \dots, n$), — соответственно, средняя плотность и объемное содержание « j -го газа»; ρ_1° и ρ_2° — истинные плотности вещества первой и второй фаз; J_j° и J_{0j} —, соответственно, «наблюдаемые» скорости испарения и конденсации на каплях размера d_j . Здесь фазовые переходы на каплях размера d_j условно разбиты на две реакции (каждая из которых имеет прямую и обратную реакции): 1) образование второй фазы из первой, в результате чего из первой фазы во вторую в единицу времени в единице объема уходит масса J_{0j} , импульс $J_{0j} v_{1j}'$ и внутренняя энергия $J_{0j} e_{2s}$, 2) образование первой фазы из второй, в результате из второй фазы в первую уходит масса J_j° , импульс $J_j^\circ v_j'$ и внутренняя энергия $J_j^\circ e_{1s}$.

Уравнения сохранения импульса

$$\begin{aligned} \rho_1 D_1 \mathbf{v}_1 &= -\alpha_1 \nabla p - \sum_{j=2}^n [\rho_j \mathbf{f}_j - J_j^\circ (\mathbf{v}_j' - \mathbf{v}_1) + J_{0j} (\mathbf{v}_{1j}' - \mathbf{v}_1)] + \rho_1 \mathbf{F}_1 \\ \rho_j D_j \mathbf{v}_j &= -\alpha_j \nabla p + \rho_j \mathbf{f}_j - J_j^\circ (\mathbf{v}_j' - \mathbf{v}_j) + J_{0j} (\mathbf{v}_{1j}' - \mathbf{v}_j) + \rho_j \mathbf{F}_j \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{f}_j — массовая сила со стороны первой фазы на j -й газ за счет трения и эффекта присоединенных масс; \mathbf{v}_j' — скорость j -го газа на поверхности капель, где происходят фазовые переходы; \mathbf{F}_j — внешняя массовая сила; оператор D_j определяется следующим образом:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial t} - (\mathbf{v}_j \cdot \nabla)$$

Следует отметить, что здесь пренебрегается (допущение (3)) непосредственным взаимодействием между i -м и j -м газами ($i, j \neq 1$), но это не означает, что эти газы движутся независимо один от другого, ибо они взаимодействуют через первую фазу. Значение этого взаимодействия указано в § 4.

В некоторых случаях необходимо учесть непосредственное взаимодействие между каплями разного размера из-за столкновений за счет разности их макроскопических скоростей [2]. Это будут дополнительные силы следующего вида

$$R_{ij} = \lambda(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2, \quad (i, j \neq 1).$$

Далее имеем уравнение энергии всей смеси

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \rho_j D_j \left(i_j + \frac{v_j^2}{2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{j=2}^n (J_{0j} - J_j^\circ) \left(i_1 - i_j + \frac{v_1^2 - v_j^2}{2} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^n (\rho_j \mathbf{F}_j \mathbf{v}_j + \rho_j Q_j) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и уравнения внутренней энергии капель

$$\begin{aligned} \rho_j D_j e_j &= \rho_j q_j + J_{0j} (e_{2s} - e_j) - J_j^\circ (e_{1s} - e_j) + \\ &+ p \left[J_{0j} \left(\frac{1}{\rho_{1^\circ}} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) - J_j^\circ \left(\frac{1}{\rho_{1s}^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) \right] + \rho_j Q_j \end{aligned} \quad (1.4)$$

где e и i — соответственно внутренняя энергия и энтальпия; q_j — теплообмен между первой фазой и j -м газом, Q_j — внешний приток тепла. Индекс s относится к состоянию насыщения.

Уравнения состояния фаз берутся в виде

$$\begin{aligned} p &= \rho_1^\circ R_1 T_1, \quad \rho_j^\circ = \rho_2^\circ = \text{const} \quad (j = 2, \dots, n) \\ i_1(p, T) &= c_2(T_s - T^\circ) + p/\rho_2^\circ + l(p) + c_{p1}(T_1 - T_s) \\ i_j(p, T) &= c_2(T_j - T^\circ) + p/\rho_2^\circ \quad (j = 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Выражения для f_j , q_j , J_{0j} , J_j° , представляющих взаимодействия между фазами, записаны аналогично тому, как это сделано в [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j &= \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} \left[\frac{3}{4} \frac{C_{d_j}}{d_j} \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_j)^3}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_j|} + \frac{1}{2} \frac{D_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_1)}{dt} \right], \quad C_{d_j} = C_d(N_{Re_j}) \\ &\left(N_{Re_j} = \frac{\rho_1^\circ |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_j| d_j}{\mu_1} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Второе слагаемое в (1.6) соответствует эффекту присоединенных масс; расчеты [1] показали, что при $d \geq 10^{-6} M$, $\rho_2^\circ / \rho_1^\circ > 10$ этим членом можно пренебречь.

Далее

$$q_j = \frac{6k_1}{\rho_2^\circ d_j^2} (T_1 - T_j) N_{Nu j} \quad (N_{Nu j} = N_{Nu}(N_{Pr}, N_{Re j})) \quad (1.7)$$

и линейное соотношение для скорости фазовых переходов, полученное в работе [1]

$$J_{0j} = F_0 \frac{6\alpha_j l}{d_j} \frac{T_s - T_1}{T_s} \quad (T_s > T_1), \quad J_{0j} = 0 \quad (T_s \leq T_1)$$

$$J_j^\circ = F^\circ \frac{6\alpha_j l}{d_j} \frac{T_j - T_s}{T_s} \quad (T_j > T_s), \quad J_j^\circ = 0 \quad (T_j \leq T_s) \quad (1.8)$$

Дифференциальные уравнения (1.1) — (1.4) вместе с уравнениями (1.5) — (1.8) образуют замкнутую систему.

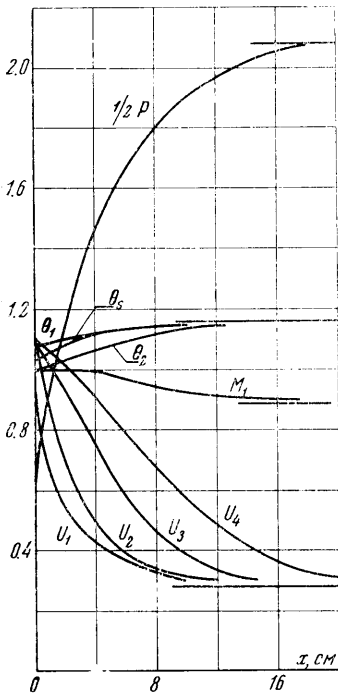
Соотношения на скачке не зависят от структуры второй фазы, поэтому они остаются в прежнем виде [3, 1].

Перейдем к безразмерным переменным

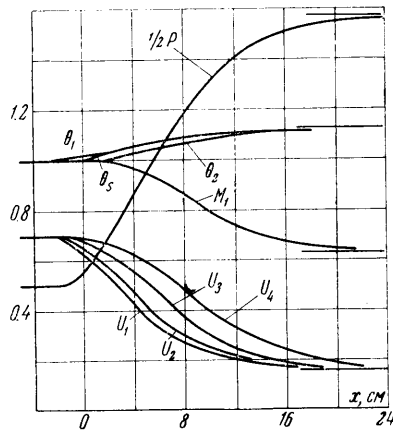
$$P = \frac{p}{p_0}, \quad U_j = \frac{v_j}{a_0}, \quad \theta_j = \frac{T_j}{T_{10}}, \quad M_j = \frac{\rho_j v_j}{\rho_{10} v_{10}} \quad \left(a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_{10}^\circ} \right) \quad (1.9)$$

Индекс нуль относится к некоторому начальному состоянию. Положим $v_j' = v_j$ ($j = 1$) и $v_{1j}' = v_j$, т. е. капли движутся как твердые шарики с «прилипанием» несущего газа на их поверхности. Это наиболее типичный случай, когда необходимо учитывать многоскоростные эффекты.

Далее аналогично [1] для одномерного установившегося случая уравнения можно разрешить относительно производных.



Фиг. 1



Фиг. 2

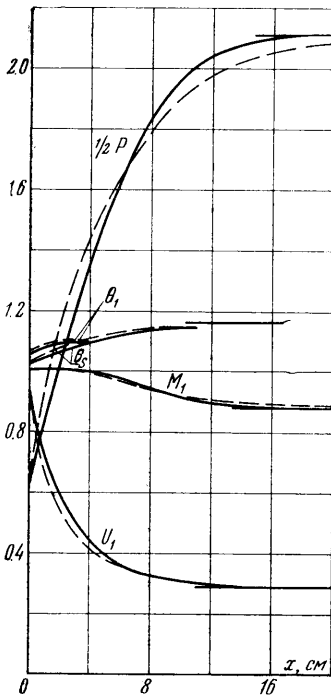
Порядок системы дифференциальных уравнений с учетом его понижения за счет первых интегралов равен $3(n - 1)$.

Термодинамические зависимости брались в таком же виде, как в [1].

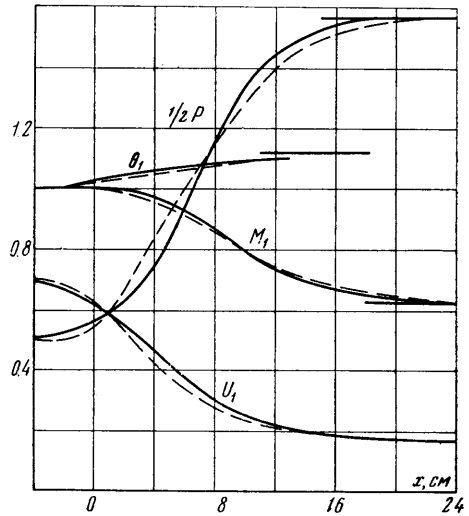
2. Расчет структуры волны уплотнения. Если перед фронтом волны имеется скачок (ударная волна, когда скорость потока превышает замороженную скорость звука, то расчет структуры фронта ничем не отличается от описанного в [1], а именно: из соотношений на скачке определяем параметры за скачком, которые дают граничные условия для системы в зоне релаксации.

Если же волна полностью размытая (скорость потока перед фронтом меньше замороженной скорости звука), то необходимо выбрать параметры в начальной точке интегрирования. Так как порядок системы $3(n-1)$ достаточно высок и чтобы не делать пристрелку по многим переменным, предлагается использовать результаты расчетов для смеси с одним размером частиц.

Будем считать, что на начальном участке волны уплотнения параметры U_1 , а также U_m , M_m , θ_m , соответствующие частицам с некоторым средним диаметром d_m ($2 \leq m \leq n$), изменяются так же, как U_1 , U_2 , M_2 , θ_2 в той же волне, но в смеси с одним диаметром частиц d_m , т. е. возьмем в некоторой точке $x_f = 0$ (здесь индекс f относится к на-



Фиг. 3



Фиг. 4

чальной точке интегрирования) значения U_{1f} , U_{mf} , M_{mf} , θ_{mf} из расчетов для смеси с одним диаметром частиц d_m . Значения же остальных переменных U_{jf} , M_{jf} , θ_{jf} ($j = 2, \dots, n; j \neq m$) выбираем из следующих соображений. Анализ уравнения п. 1, когда принят закон трения в виде $C_d = A Re^\delta$, дает

$$\frac{dU_j}{dx} \sim \frac{(U_j - U_1)^{2-\delta}}{d_j^{\delta+1}} \quad (2.1)$$

или переходя к конечным разностям, а также из условия выполнения этого соотношения для $j = m$ в итоге получим

$$\frac{U_{j0} - U_j}{U_{m0} - U_m} \approx \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{\delta+1} \left(\frac{U_j - U_1}{U_m - U_1}\right)^{2-\delta} \quad (2.2)$$

Отсюда каким-либо численным методом можно определить U_{jf} по заданным U_{1f} , U_{mf} и d_m/d_j . Из аналогичных соображений можно определить M_{jf} и θ_{jf} . В рассматриваемых вариантах $M_{jf} = M_{j0}$ (фазовые переходы начинались лишь с некоторого расстояния от начала фронта), а $\theta_{jf} \approx 1$. Из проведенных численных расчетов видно, что система дифференциальных уравнений асимптотически устойчива (в сторону $x > x_j = 0$) относительно вариаций U_{jf} , M_{jf} , θ_{jf} ($j = 2, \dots, n$) для некоторого произвольного U_{1f} .

Выбрав граничные условия в точке $x_f = 0$, систему можно интегрировать в обе стороны ($x > x_f$ и $x < x_f$).

3. Некоторые результаты. На фиг. 1, 2 приведены некоторые результаты численного интегрирования, отображающие структуру волн уплотнения в двухфазной пароводяной смеси, в которой имеются частицы трех размеров ($n = 3$), $d_{20} = 0.5 d_0$, $d_{30} = d_0 = 10^{-5} M$, $d_{40} = 1.5 d_0$; перед фронтом смесь находится в равновесии, $p_0 = 10 \text{ атм}$, причем $M_{20} = M_{30} = M_{40}$. Приведенные результаты соответствуют следующим законам взаимодействия:

$$F = 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{сек} / \text{м}^4, \quad C_j = 27 / N_{\text{Re}}^{0.84}, \quad N_{\text{Nu}} = 2 + 0.6 N_{\text{Pr}}^{1/4} N_{\text{Re}}^{1/2}$$

Все те выводы, которые приводятся в [1], справедливы и здесь. Следует отметить, что скорости частиц разных размеров в каждой точке могут существенно отличаться одна от другой. Температуры же частиц разного размера отличались незначительно, поэтому на графиках проводилась только одна средняя кривая.

Для сравнения на одном графике приведены кривые изменения параметров первой фазы в волнах уплотнения с одними и теми же параметрами, но в смеси с тремя размерами частиц (пунктирные кривые) и в смеси с одним размером частиц (d_0 , сплошные кривые), причем этот размер является средним для первой смеси.

На фиг. 3 показан вариант

$$M_{20} + M_{30} + M_{40} = 1.773 \quad (\alpha_{10} = 0.99), \quad U_0 = 1.1.$$

На фиг. 4 показан вариант

$$M_{20} + M_{30} + M_{40} = 3.583 \quad (\alpha_{10} = 0.98), \quad U_0 = 0.7.$$

Сравнение показывает, что осреднение размеров капель по массе, т. е. по формуле

$$d_{m0} = \frac{\sum_{j=2}^n M_{j0} d_{j0}}{\sum_{j=2}^n M_{j0}} \quad (3.1)$$

будет приемлемой операцией для упрощения расчетов.

НИИ механики МГУ

Поступило 27 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Бабуха Г. Л., Шрайбер А. А. Влияние соударений частиц, полидисперсного материала на движение и межфазовый теплообмен в вертикальном двухфазном потоке. ПМТФ, 1966, № 4.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.