

РЕЖИМЫ ЛАМИНАРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПОТОКИ

Ю. А. БУЕВИЧ

(Москва)

Возможные режимы течения дисперсной системы в вертикальных трубах исследованы на основе гидродинамической модели работы [1]. Граничные условия записаны в пренебрежении пристенным слоем, имеющим толщину порядка среднего расстояния между частицами.

Как следует из результатов работы [1], эффективные реологические характеристики сложной среды, состоящей из вязкой жидкости и взвешенных в ней частиц, существенно зависят не только от физических параметров фаз, но и от типа движения. Особенности механического поведения таких сред, например, поле концентрации диспергированной фазы в течении, оказываются совершенно различными для течений, по-разному ориентированных относительно направления действия внешних массовых сил, и в значительной мере определяются градиентами и скоростями изменения параметров течения. Поэтому возникает необходимость в независимом исследовании различных характерных видов движения дисперсных сред.

Ниже рассмотрена задача об установившемся движении в вертикальной трубе постоянного сечения, когда пульсации фаз обусловлены только специфической псевдотурбулентностью дисперсных систем [1], а обычная турбулентность отсутствует. Для вертикальных течений существенны лишь поперечные компоненты тензоров пульсационного давления и вязкости фаз, которые могут быть легко оценены из результатов [1].

В псевдотурбулентном режиме течения, когда время релаксации T_0 пробной частицы к условиям движения дисперсионной среды значительно меньше времени T , проходящего в среднем между последовательными соударениями этой частицы с соседними, имеется аналогия между переносом импульса фазами дисперсной системы и переносом в турбулизованной однородной жидкости, приводящим к появлению напряжений Рейнольдса [1]. После вычислений для поперечных компонент тензоров среднеквадратичных пульсационных скоростей фаз v' , w' , пульсационных давлений P_1 , P_2 и вязкостей η_1 , η_2 получим соотношения (ориентируем ось x обратно силе тяжести):

$$\begin{aligned}
 v'^2 &= G_1(\rho) \Phi(\rho, \kappa, c_g, c_u) \left(\frac{P}{\beta} \right)^2, & G_1 &= \frac{1}{15} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right)^2 \frac{\rho_* - \rho}{\rho_*} \\
 w'^2 &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} G_1(\rho) \Phi(\rho, \kappa, c_g, c_u) \left(\frac{P}{\beta} \right)^2, & c_g &= \frac{d_2 g}{P}, & c_u &= \frac{\beta u}{P}, & P &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\
 \eta_1 &= G_2(\rho) H_1(\rho, \kappa) \Phi(\rho, \kappa, c_g, c_u) \eta_0, & P_1 &= \kappa(1-\rho) d_2 v'^2 \\
 \eta_2 &= G_2(\rho) H_2(\rho, \kappa) \Phi(\rho, \kappa, c_g, c_u) \eta_0, & P_2 &= \rho d_2 w'^2 \\
 H_1 &= \kappa \kappa_0 (1-\rho), & H_2 &= \kappa_1 \rho, & \kappa_0 &= 1-\rho + \kappa \left(\rho + \frac{\xi}{1-\rho} \right), & \beta &= \frac{9\mu_0}{2a^2} \quad (0.1) \\
 \kappa_1 &= \kappa_0 + \kappa^2 \frac{(1-\rho + \xi)^2}{(1-\rho)(1-\rho + \kappa\xi)}, & \kappa_2 &= 1 + \kappa_0 + \frac{\kappa\xi}{1-\rho}, & G_2 &= \frac{1-\rho}{K} G_1 \\
 \Phi &= \left| L^2 + \rho c_u \frac{\kappa}{\kappa_0} \left[c_u - \left(2 + \frac{\xi}{1-\rho} \right) L \right] \right|, & \eta_0 &= \frac{d_2^2}{\beta} \left(\frac{P}{\beta} \right)^2, & \kappa &= \frac{d_1}{d_2} \\
 L &= \frac{1-\rho}{K} \left[1 + (1-\rho + \kappa\rho) c_g + K \left(\frac{1}{1-\rho} + \rho \frac{d \ln K}{d\rho} \right) c_u \right], & u &= v - w
 \end{aligned}$$

Здесь ρ — объемная концентрация диспергированной фазы в среде, значение ее в состоянии плотной упаковки равно ρ_* , d_1 и d_2 — плотности фаз, a — радиус частиц, μ_0 — вязкость однородной дисперсионной среды, $\xi = \xi(\rho)$ и $K = K(\rho)$ — коэффициенты присоединенной массы и отклонения эффективной силы вязкого сопротивления от стоксовой, рассматриваемые как некие экспериментально определяемые функции. Коэффициенты T_v и T_w в выражениях для η_1 и η_2

$$\eta_1 = d_1(1 - \rho)T_v v'^2, \quad \eta_2 = d_2 \rho T_w w'^2$$

следующих из (0.1), представляют лагранжевы масштабы корреляций пульсационных движений фаз. Соотношения для η_1, η_2 могут быть получены из рассмотрения флуктуаций в больших объемах дисперсной системы, содержащих в среднем $N \gg 1$ частиц, и из анализа пульсаций в пределе $N \rightarrow 1$ (см. [1]). Нетрудно показать, что оба метода дают одни и те же соотношения (0.1), так что T_v и T_w , определяемые для больших объемов, пропорциональны N .

В псевдогазовом режиме, когда $T_0 \gg T$ и основную роль в передаче импульса между частицами играют их непосредственные столкновения, выражения для v'^2, w'^2, P_1 и η_1 сохраняют прежний вид, но величины P_2 и η_2 определяются из аналогии диспергированной фазы с плотным газом жестких сфер. В этом режиме имеем [1]

$$P_2 = \rho(1 + Y(\rho))d_2 w'^2, \quad \eta_2 = d_2 \rho T_w' w'^2, \quad \lambda_0 = (4\sqrt{2}\pi a^2 n)^{-1} \quad (0.2)$$

$$T_w' = 8\rho \left[\frac{1}{Y(\rho)} + 0.8 + 0.76Y(\rho) \right] \frac{\lambda_0}{w'}, \quad Y = \frac{(\rho/\rho_*)^{1/3}}{1 - (\rho/\rho_*)^{1/3}}$$

$$n = \rho/\sigma_0$$

Здесь σ_0 — объем частицы. Соотношения (0.2) приближенно справедливы при $\rho > 0.10-0.15$, при малых ρ имеем $Y(\rho) \approx 4\rho$. Определяя среднюю длину λ свободного пробега в концентрированной системе как разность между радиусами удельных объемов частицы в рассматриваемом состоянии и в состоянии плотной упаковки, получим оценки

$$T_0 \approx \frac{\rho d_2}{\beta K}, \quad T \approx \frac{\lambda}{(2w'^2 + w_g'^2)^{1/2}}, \quad \lambda = a \frac{\rho_*^{1/3} - \rho^{1/3}}{(\rho_*\rho)^{1/3}} \quad (0.3)$$

$$2w'^2 + w_g'^2 = G_1(\rho) \left[15 \left(\frac{L}{\rho} \right)^2 + 5 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \Phi \right] \frac{|P|}{\beta}$$

Здесь использовано выражение для среднего квадрата $w_g'^2$ продольной пульсационной скорости, следующее из [1]. Из (0.3) видно, что для систем, представляющих основной практический интерес, псевдотурбулентный режим реализуется почти во всей области ρ за исключением весьма узкого интервала, примыкающего к $\rho = \rho_*$. Исключение могут составить лишь взвеси крупных тяжелых частиц в газе.

1. Движение в круглой трубе. Согласно [1], уравнения рассматриваемой задачи имеют вид

$$0 = (1 - \rho)P + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[(\mu + \eta_1)r \frac{dv}{dr} \right] - d_1(1 - \rho)g - \beta \rho K u, \quad \mu = \mu_0 S(\rho)$$

$$0 = \rho P + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\eta_2 r \frac{dw}{dr} \right) - d_2 \rho g + \beta \rho K u, \quad P = \text{const} \quad (1.1)$$

$$(1 - \rho) \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{dP_1}{dr} = \rho \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{dP_2}{dr} = 0.$$

$$S = 1 + \frac{5\gamma - 2 - 2^{1/5} \gamma \rho^{2/3} - 4/5 (\gamma - 1) \rho^{7/3}}{2(\gamma + 1) - 7\gamma \rho^{5/3} + (5\gamma - 2) \rho^{7/3}}$$

Аналогично нетрудно записать уравнения и для движения в трубах иных сечений. Из последних уравнений (1.1) следует соотношение

$$M(\rho, \kappa, c_u, c_g) = (1 - \rho)P_2 - \rho P_1 = \text{const} \quad (1.2)$$

В (1.1) μ — эффективная вязкость дисперсионной среды, фильтрующейся в пористом теле с неподвижным каркасом и пористостью $\epsilon = 1 - \rho$;

функция $S(\rho)$ была вычислена в [2], причем γ представляет отношение вязкости материала частиц к μ_0 . Заметим, что и в ρ входят составляющие, обусловленные как молекулярными движениями в жидкости, так и ее пульсациями при движении в пересеченном поровом пространстве.

В предельных случаях $\mu + \eta_1 \gg \eta_2$ или $\eta_2 \gg \mu + \eta_1$ и сравнимых градиентах скоростей фаз из (1.1) следует: $u = u(\rho)$ и далее, из (1.2), $\rho = \text{const}$ во всей области течения, за исключением, быть может, тонкого пристеночного слоя, где, во-первых, градиенты v или w могут быть велики, а во-вторых, происходит вырождение пульсационных скоростей фаз. Ясно, что толщина этого слоя должна быть в несколько раз выше величины λ из (0.3). Эксперименты свидетельствуют, что во многих случаях и при сравнимых вязкостях фаз концентрация частиц вне пристенного слоя толщины l приблизительно постоянна, а профили скоростей фаз расположены почти эквидистантно (см., например, [3]). Имея в виду затруднения, возникающие при формулировке граничных условий для дисперсных систем, используем ниже предположение о постоянстве концентрации в ядре течения, распространив его на всю область течения. Заметим, что это допущение обычно принимается не только для вертикальных, но даже и для горизонтальных движений [4]. В целом профили скоростей фаз имеют вид сплошных кривых на фиг. 1, на которой изображена ситуация, когда в пристенной области эти профили сближаются за счет тормозящего влияния стенки на частицы. Заменяя в области $l_0 \leq n \leq l$ истинные профили приближенными прямолинейными (пунктир на фиг. 1), получим граничное условие при $n = l_0$ в форме

$$v_0 - w_0 = u = \text{const}, \quad v_0, w_0 = v, w|_{n=l_0} \quad (1.3)$$

Величина l_0 представляет, с одной стороны, усредненную толщину жидких прослоек между стенкой и прилегающими частицами, а с другой стороны, характеризует минимальное расстояние, начиная с которого можно вообще использовать уравнения (1.1), (1.2). Поэтому естественно считать $l_0 = C\lambda$, $C \approx 1$. Представление о существовании жидких прослоек между стенкой и частицами при их контакте вполне оправдано. Действительно, частицу можно рассматривать как некоторый аналог цапфы, а стенку — как аналог подшипника, причем из гидродинамической теории смазки непосредственно следует вывод о возрастании давления в зазоре между цапфой и подшипником при уменьшении его толщины [5].

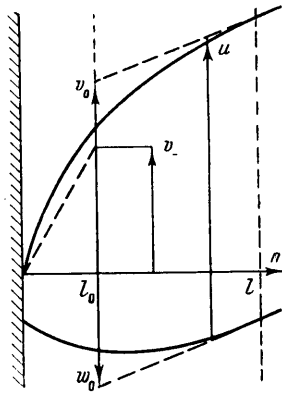
Условие непрерывности касательного напряжения на границе слоя имеет вид (1.4)

$$l_0 \left[(\mu + \eta_1) \frac{dv}{dn} \Big|_{n=l_0} + \eta_2 \frac{dw}{dn} \Big|_{n=l_0} \right] = \mu_0 v_- = \mu_0 (v_0(1 - \rho) + w_0 \rho)$$

Используя (1.3), это условие можно переписать в формах

$$l_0 (\mu + \eta_1 + \eta_2) \frac{dv}{dn} \Big|_{n=l_0} = \mu_0 (v_0 - \rho u)$$

$$l_0 (\mu + \eta_1 + \eta_2) \frac{dw}{dn} \Big|_{n=l_0} = \mu_0 (w_0 + (1 - \rho) u)$$



Фиг. 1

При $\rho \rightarrow \rho_*$ ($\lambda \rightarrow 0$) величины $l_0 \rightarrow 0$, $\eta_2 \rightarrow \infty$, так что касательное напряжение оказывается неопределенным. По-видимому, для плотного зернистого слоя вместо C целесообразнее вводить коэффициент сухого трения слоя о стенку при относительном движении. Непосредственное трение частиц о стенку существенно, конечно, и при $\rho \sim \rho_*$, особенно при больших числах Стокса для пульсационного движения; поэтому C в некотором смысле можно рассматривать как свободный параметр теории.

Заметим, что вывод о постоянстве ρ по сечению трубы следует из уравнения (1.2), которое при $\kappa = 1$, как легко видеть из (0.1), обращается в тождество $0 = 0$. Поэтому при $\kappa \sim 1$ в (1.2) могут оказаться существенными члены, связанные с влиянием стенки на область течения вне слоя l и возникновением радиальных сил, действующих на частицы в сдвиговом потоке, не учтенные в (1.1), (1.2). Эти эффекты должны приводить к формированию более сложного профиля концентрации при течении смесей, достаточно близких к равноплотным, и не учитываются в предлагаемом анализе.

Из первых уравнений (1.1) получаем линейное алгебраическое уравнение третьего порядка для определения параметра c_u как функции ρ , c_g и физических параметров фаз

$$\eta_2 [1 - \rho - \kappa(1 - \rho)c_g - \rho Kc_u] = (\mu + \eta_1)\rho(1 - c_g + Kc_u) \quad (1.5)$$

Решение уравнений (1.1) при граничных условиях (1.3) и (1.4), задаваемых при $r = R = R_0 - l_0$, где R_0 — радиус трубы, имеет вид

$$v = \frac{PR^2\psi_1}{4(\mu + \eta_1)} \left(1 + \frac{2C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} - \frac{r^2}{R^2} \right) + \rho u \quad (1.6)$$

$$w = \frac{PR^2\psi_2}{4\eta_2} \left(1 + \frac{2C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} - \frac{r^2}{R^2} \right) - (1 - \rho)u$$

$$\psi_1 = 1 - \rho - \kappa(1 - \rho)c_g - \rho Kc_u, \quad \psi_2 = \rho(1 - c_g + Kc_u)$$

Объемные потоки фаз равны

$$Q_1 = \pi R^2(1 - \rho) \left[\frac{PR^2\psi_1}{8(\mu + \eta_1)} \left(1 + \frac{4C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} \right) + \rho u \right] \quad (1.7)$$

$$Q_2 = \pi R^2\rho \left[\frac{PR^2\psi_2}{8\eta_2} \left(1 + \frac{4C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} \right) - (1 - \rho)u \right]$$

Теория работы [1] и используемая здесь концепция сплошной среды применима при $\lambda/R \ll 1$. Однако члены с λ/R в (1.6) и (1.7) могут стать существенными, если велико отношение вязкостей, входящее в эти уравнения, либо малы величины ψ_1 , ψ_2 . В частности, при $|\psi| \sim 1$ пристенным скольжением можно вообще пренебречь, если только

$$\frac{\lambda}{R} \ll \frac{\mu_0}{\mu + \eta_1 + \eta_2}$$

Это — условие приближенной справедливости условий прилипания, которые обычно принимаются без достаточных оснований [4]. При нарушении этого неравенства условия прилипания, вообще говоря, неадекватны, а при его обратном знаке — пристенное скольжение играет основную роль, а градиенты скоростей фаз внутри слоя относительно малы, что соответствует так называемому режиму движущегося плотного слоя [3].

Помимо «физической» концентрации ρ , описывающей состояние движущейся дисперсной среды, можно ввести «расходную» концентрацию ρ^* , описывающую соотношение полных расходов фаз. Из (1.5) и (1.7) для ρ^* имеем уравнение

$$\frac{\rho^*}{1 - \rho^*} = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - \alpha(1 - \rho)c_u}{1 + \alpha\rho c_u},$$

$$\alpha = \left[\frac{\beta R^2\psi_1}{8(\mu + \eta_1)} \left(1 + \frac{4C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} \right) \right]^{-1} \quad (1.8)$$

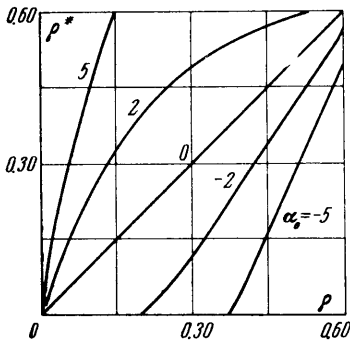
При $c_u > 0$ жидкая фаза «опережает» взвешенные частицы, так что $\rho^* < \rho$, при $c_u < 0$ — наоборот, «запаздывает», и $\rho^* > \rho$. Соотношения (1.6) — (1.8) позволяют определить следующие режимы течения:

1) Прямоточное восходящее течение имеет место при выполнении неравенств

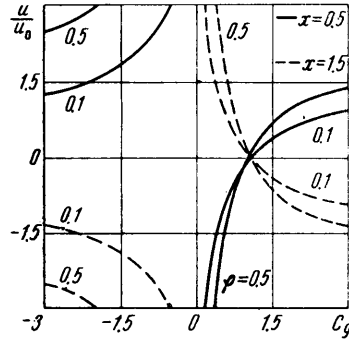
$$\alpha^{-1}(1 - \alpha(1 - \rho)c_u)P > 0, \quad \alpha^{-1}(1 + \alpha c_u)P > 0$$

2) Прямоточное нисходящее течение имеет место при выполнении обратных неравенств.

3) Противоточное течение реализуется, если величины в левых частях этих неравенств имеют разные знаки.



Фиг. 2



Фиг. 3

Для противоточных течений величина ρ^* из (1.8) отрицательна.

Исходя из формулы Пуазейля для полного объемного расхода среды, определим эффективную вязкость среды η для вертикального движения в трубе посредством равенств

$$\begin{aligned} \eta &= \left[(1 - \rho) \frac{\psi_1}{\mu + \eta_1} + \rho \frac{\psi_2}{\eta_2} \right]^{-1} \left[1 + \frac{4C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} \right]^{-1} = \\ &= \frac{\mu + \eta_1}{\psi_1} \left[1 + \frac{4C\lambda}{R} \frac{\mu + \eta_1 + \eta_2}{\mu_0} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если отношение вязкостей в (1.9) и величины ψ_i имеют порядок единицы, то вторым и третьим членами в квадратных скобках в (1.9) можно пренебречь. Тогда, в частности, $\rho^* \approx \rho$. Если вместо P ввести в рассмотрение один из эффективных градиентов давления в течении

$$\begin{aligned} P' &= \varphi P, \quad P'' = \varphi^* P, \quad \varphi = 1 - [\rho + (1 - \rho)\kappa]c_g, \\ \varphi^* &= 1 - [\rho^* + (1 - \rho^*)\kappa]c_g \end{aligned}$$

то легко определить и соответствующие вязкости η' и η'' .

Подчеркнем, что все выражения, встречающиеся выше, относятся к аналогу ламинарного течения, когда обычная турбулентность отсутствует. Ясно, что в достаточно быстрых течениях дисперсных систем с не очень высокой ρ эта «ламинарность» может нарушаться. Однако, с увеличением ρ можно ожидать «вымораживания» обычной турбулентности [6].

2. Предельные режимы движения. При невысоком уровне развития пульсационных движений в системе $\mu \gg \eta_1$, $\mu \gg \eta_2$ (необходимые оценки следуют непосредственно из (0.1) и соотношений п.1). В этом случае из уравнения (1.5) получим выражение для c_u

$$Kc_u = -1 + c_g \quad (2.1)$$

Кроме того, из (1.6) и (2.1) следует $\psi_1 = \varphi$. Отношение $\mu / \mu_0 = S(\rho) \sim 1$; поэтому, считая $\lambda / R \ll 1$, из (1.8) и (1.9) имеем

$$\eta = \mu\varphi, \quad \eta' = \mu \quad (2.2)$$

$$\frac{\rho^*}{1 - \rho^*} = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 + \alpha_0(1 - \rho)(S/K)}{1 - \alpha_0\rho(S/K)}, \quad \alpha_0 = \frac{16}{9\varphi} \left(\frac{a}{R} \right)^2 (1 - c_g)$$

Зависимости ρ^* от ρ при различных α_0 иллюстрируются кривыми фиг. 2. Здесь и ниже для S используется выражение (1.1), для K — выражение, следующее из эмпирической формулы работы [7] при $A \rightarrow 0$, где A — число Архимеда: $K = (1 - \rho)^{-3.75}$; принимается также $\xi = 1/2$, $\rho_* = 0.6$. Области отрицательных ρ^* на фиг. 2 соответствуют противоточному течению; кривые, расположенные выше прямой $\rho^* = \rho$, отвечают режимам, в которых диспергированная фаза опережает жидкую. Видно, в частности, что при достаточно больших α_0 и ρ расходная концентрация ρ^* может превосходить концентрацию плотноупакованной системы ρ_* .

Отношение скорости межфазового скольжения u в течении к скорости скольжения фаз u_0 в безградиентной системе [1] равно

$$\frac{u}{u_0} = \frac{-1 + c_g}{c_g} \frac{1}{(1 - \kappa)(1 - \rho)}$$

Зависимости этой величины от c_g при различных ρ и $\kappa = 0.5$ (сплошные кривые) и $\kappa = 1.5$ (пунктир) представлены на фиг. 3. Видно, что кривые, соответствующие значениям κ , симметричным относительно $\kappa = 1$, симметричны относительно оси абсцисс на фиг. 3. Существенно, что u и u_0 могут иметь различные знаки, а $|u|$ значительно превосходить $|u_0|$. Последнее показывает несправедливость допущения, молчаливо принимаемого обычно для течений различных типов, что $u \approx u_0$.

Прямоточному восходящему течению отвечает область $0 < c_g < c_g''$ параметра c_g , прямоточному нисходящему — области $c_g < 0$ и $c_g > c_g'$, противоточному — область

$$c_g'' < c_g < c_g', \quad c_g' = \max \{c_1, c_2\}, \quad c_g'' = \min \{c_1, c_2\}$$

$$c_1 = \frac{1 - \alpha_0(1 - \rho)(S/K)}{\rho + (1 - \rho)\kappa + \alpha_0(1 - \rho)(S/K)}, \quad c_2 = \frac{1 + \alpha_0\rho(S/K)}{\rho + (1 - \rho)\kappa + \alpha_0\rho(S/K)}$$

Рассмотрим теперь следующее приближение по малым η_i ($i = 1, 2$). Полагая $\delta P = 0$, $\delta \rho = 0$, имеем из (1.1) уравнения для δv и δw

$$0 = \beta\rho K\delta u + \eta_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right), \quad \delta u = \delta v - \delta w$$

$$0 = -\beta\rho K\delta u + \eta_1 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\delta v}{dr} \right)$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\delta v = -\frac{\eta_1 + \eta_2}{\mu} \frac{P'R^2}{4\mu} \left(1 + \frac{4C\lambda S}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right) + \rho\delta u \quad (2.3)$$

$$\delta w = \delta v - \delta u, \quad \delta c_u = \frac{\eta_2\varphi}{\rho K\mu}$$

Учитывая поправки (2.3), для эффективной вязкости η' при $\lambda / R \rightarrow 0$ получим

$$\eta' = \mu [1 - \mu^{-1}(\eta_1 + \eta_2)]^{-1} \approx \mu + \eta_1 + \eta_2 \quad (2.4)$$

В частности, при $\rho \ll 1$, $\kappa \sim 1$ ($\kappa \gg \rho$) имеем $\eta_2 \sim \rho\eta_1 \ll \eta_1$; учитывая (0.1), получим далее с точностью до членов $\sim \rho^2$

$$\eta \approx \mu_0 (1 + 5/2\rho - 21/10\rho^{2/3} + c\rho^2),$$

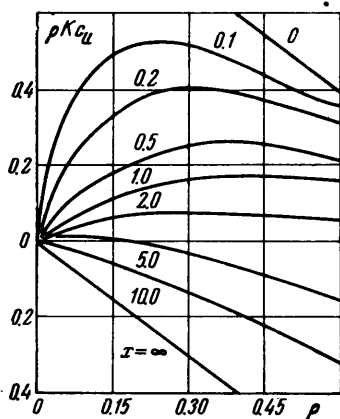
$$\mu_0 c \approx 7.32 \cdot 10^{-4} (1 + \kappa\xi) d_2 g^2 a^6 v_0^{-3}, \quad (v_0 = \mu_0 / d_1) \quad (2.5)$$

Таким образом, коэффициент при ρ^2 в этом выражении существенно зависит от физических параметров фаз и его вообще нельзя считать некоторой константой. Поэтому неудивительно, что тщательно выполненные эксперименты разных авторов привели к совершенно различным значениям для величины c (см., например, обзор в [8]). Отметим, что при $c \rightarrow 0$, если $\rho \ll 1$, реализуется эффект «аномальной» вязкости, либо, если ρ не очень мала, вязкость равна примерно эйнштейновской [2]. Заметим также, что в общем случае в (2.5) должны присутствовать члены, имеющие порядок степеней λ/R , а равно и поправки, связанные с неучитываемыми в этой работе силами, что еще более затрудняет интерпретацию вискозиметрических экспериментов на дисперсных системах. Для газозвесей низкой концентрации возможно неравенство $\rho \geq \kappa$, так что в (2.5) появляется член вида $c\kappa^{-1}\rho^3$, имеющий тот же порядок величины, что и, например, член $c\rho^2$. Противоречие между (2.5) для газозвесей и эмпирической формулой Гагершадта [3] объясняется тем, что последняя получена для развитого турбулентного движения.

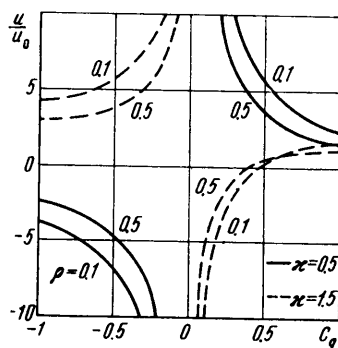
В противоположном предельном режиме вязкостью μ можно пренебречь по сравнению с η_1 или η_2 . В этом случае решение уравнения (1.5) имеет вид

$$c_u = \frac{1}{\rho K} \frac{-\rho H_1 + (1 - \rho) H_2 + [\rho H_1 - \kappa(1 - \rho) H_2] c_g}{H_1 + H_2} \quad (2.6)$$

Величины H_1 и H_2 определены в (0.1). Зависимости параметра $\rho K c_u$ от ρ при различных κ и $c_g = 0$ приведены на фиг. 4, а зависимости отношения u/u_0 от c_g при $\kappa = 0.5$ (сплошные кривые) и $\kappa = 1.5$ (пунктир) и разных ρ — на фиг. 5. Как и в предыдущем режиме, скорость u может быть сколь угодно большой, если достаточно велика величина P . В част-



Фиг. 4



Фиг. 5

ности, межфазовое скольжение появляется и при движении равноплотных суспензий (фиг. 4). При $4 \leq \kappa \leq 5$ величина $\rho K c_u$, рассматриваемая как функция ρ , меняет знак при некотором $\rho = \rho_0(\kappa)$. Из фиг. 5 видно, что кривые u/u_0 , отвечающие значениям κ , симметричны относительно $\kappa = 1$, в рассматриваемом случае не симметричны относительно оси абсцисс и в некотором смысле обратны кривым фиг. 3. Превышение эффективной скоростью межфазового скольжения значения u_0 хорошо известно из экспериментов с плотными взвешенными слоями под названием «эффект пониженного сопротивления» слоя [9]. В этих экспериментах это превышение может достигать 20—50%. Ясно, что пульсации частиц в дисперсной системе сопровождаются дополнительными затратами энергии среднего движения, что и приводит к увеличению вязкости, и не могут вызвать понижение сопротивления решетки частиц потоку. В [10, 11] эффект пониженного сопротивления объясняется медленной циркуляцией диспергированного материала и дисперсионной среды, которая отсутствует в рассматриваемых течениях. Из приводимого анализа следует, что этот эффект связан с действием на взвешенные частицы, помимо сил вязкого взаимодействия с несущим потоком, сил со стороны поля давления в дисперсионной среде. Весьма вероятно, что эта же причина играет основную роль и в «снижении сопротивления» частиц, наблюдаемом во взвешенном слое. Отметим еще, что формулируемый в [4] вывод, что «из двух сред, движущихся совместно, большую скорость имеет та, вязкость которой меньше», оказывается совершенно неверным.

При $\rho \ll \kappa$ имеем $H_1 \gg H_2$ и для c_u верна формула (2.1); при этом $\eta' \approx \eta_1$. Если $\kappa \ll \rho$, из (2.6) следует:

$$\rho K c_u \approx 1 - \rho, \quad \eta' \approx \eta_2$$

Для рассматриваемого режима был произведен расчет псевдотурбулентных среднеквадратичных скоростей и вязкостей фаз из (0.1), а также эффективных вязкостей η и η' . В таблице собраны, например, значения безразмерной вязкости η'/η_0 при различных κ и ρ и $c_g = -0.3, 0$ и 0.3 . Все эти величины, рассматриваемые как функции от ρ , имеют максимум при $\rho \approx 0.15$; их зависимость от κ и c_g оказывается бо-

Зависимость безразмерной эффективной вязкости $10^5 \eta'/\eta_0$
от κ и ρ при $c_g = -0.3$ (первые цифры в клетках таблицы),
 $c_g = 0.0$ (вторые цифры), $c_g = 0.3$ (третьи цифры)

ρ	$\kappa = 0.2$	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	4.0
0.05	52.602	40.120	41.802	48.835	59.266	147.48	464.35
	58.331	45.733	46.398	51.090	57.502	94.760	151.51
	64.358	51.697	51.247	53.427	55.824	54.254	15.830
0.10	109.40	89.079	94.179	109.74	131.89	307.36	878.60
	120.89	99.972	102.32	112.14	124.98	193.30	275.58
	132.96	111.57	110.84	114.66	118.43	107.42	32.483
0.15	120.23	103.84	111.61	130.00	154.95	339.14	877.74
	132.32	115.00	119.13	130.31	144.05	209.43	262.16
	145.01	126.76	126.93	130.73	133.78	113.12	32.502
0.20	97.725	89.146	97.563	113.72	134.59	277.22	646.04
	107.07	97.580	102.54	112.16	123.16	168.37	181.13
	116.85	106.41	107.68	110.71	112.43	88.431	23.301
0.25	64.929	62.411	69.591	81.269	95.581	185.47	385.94
	70.800	67.585	72.159	79.048	86.305	110.89	99.566
	76.928	72.916	74.802	76.920	110.90	56.608	14.011
0.30	36.628	37.053	42.116	49.310	57.668	105.45	193.61
	39.738	39.725	43.145	47.382	51.476	62.070	44.679
	42.977	43.495	44.201	45.526	45.702	30.767	7.945
0.35	17.746	18.887	21.889	25.706	29.907	51.505	82.118
	19.151	20.057	22.178	24.435	26.429	29.840	16.258
	20.610	21.264	22.475	23.211	23.195	14.338	2.641
0.40	7.341	8.222	9.718	11.450	13.256	21.471	29.099
	7.878	8.652	9.746	10.778	11.610	12.236	4.628
	8.434	9.094	9.777	10.132	10.085	5.687	2.641
0.45	2.529	2.984	3.596	4.251	4.898	7.446	5.222
	2.698	3.112	3.572	3.966	4.256	4.170	0.949
	2.873	3.243	3.549	3.693	3.662	1.869	1.384
0.50	0.682	0.849	1.044	1.238	1.419	2.019	0.650
	0.724	0.878	1.028	1.145	1.224	1.110	0.116
	0.766	0.908	1.012	1.057	1.044	0.478	0.581
0.55	0.120	0.158	0.197	0.235	0.268	0.355	0.026
	0.126	0.162	0.193	0.216	0.230	0.191	0.004
	0.133	0.166	0.188	0.197	0.194	0.078	0.158

лее сложной. Начиная с некоторого ρ становится существенным перенос импульса за счет столкновений между частицами, истинная η' достигает минимума и далее, с увеличением ρ в псевдогазовой области (см. (0.2) и (0.3)) возрастает до бесконечности при $\rho \rightarrow \rho_*$. С переходом от второго предельного режима к первому максимуму и минимуму на зависимостях η' от ρ сдвигаются вправо, в сторону больших ρ , а затем сливаются и исчезают. Наличие этих максимума и минимума согласуется с экспериментальными данными по измерению эффективной вязкости взвешенного слоя [9]. Косвенным подтверждением могут служить также максимумы и минимумы на зависимостях коэффициентов теплопередачи от ρ как во взвешенном слое [9], так и в других дисперсных системах [3].

В области $\rho \sim \rho_*$ при псевдогазовом режиме вязкость η_2 очень велика, и, как следует из (1.6), в этой области наблюдается почти стержнеподобное движение плотного зернистого слоя, характеризуемое малыми градиентами скоростей фаз внутри слоя (особенно скорости диспергированной фазы), если только приложенного перепада давления достаточно для преодоления жидкого или сухого трения слоя о стенки трубы. Если перепад давления мал, то в пределе имеем фильтрацию дисперсионной среды через неподвижную насышку частиц в трубе. Уравнение движения

$$0 = (1 - \rho)(1 - \kappa c_g)P + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) - \beta \rho K v, \quad v|_{r=R} \approx 0$$

имеет решение

$$v(r) = v_m(m) f\left(\frac{r}{R}\right), \quad v_m = \frac{4V}{m^2} \left(1 - \frac{1}{I_0(m)}\right), \quad m = R \left(\frac{\beta \rho K}{\mu}\right)^{1/2}$$

$$V = \frac{1 - \rho}{S} \frac{R^2 P (1 - \kappa c_g)}{4\mu_0}, \quad f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{I_0(m) - I_0(mr/R)}{I_0(m) - 1} \quad (2.7)$$

Здесь $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. При $m \rightarrow 0$ профиль скорости жидкости стремится к Пуазейлевскому, а $v_m \rightarrow V$. С увеличением m максимальная скорость v_m убывает, так что при $m \gg 1$

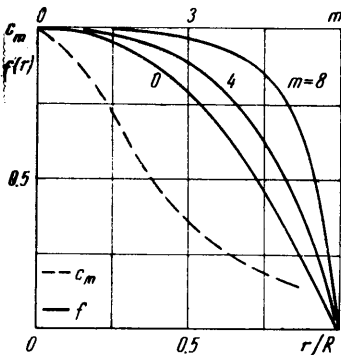
$$c_m = \frac{v_m}{V} \approx \frac{4}{m^2} (1 - \sqrt{2\pi m} e^{-m}).$$

$m \gg 1$

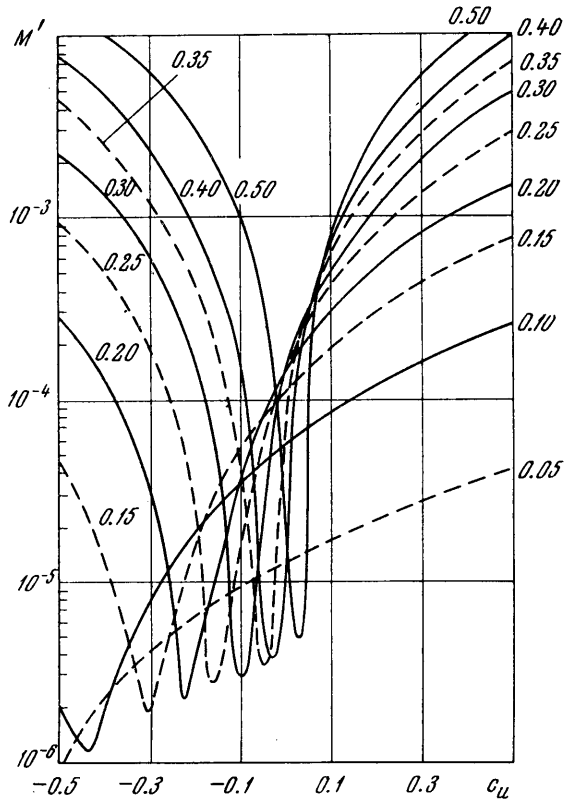
а профиль $f(r/R)$ становится все более плоским

$$f(r/R) \approx 1 - (R/r)^{1/2} e^{-m(1-r/R)}$$

$m(r/R) \gg 1$



Фиг. 6



Фиг. 7

Зависимость величины c_m от m (пунктир) и профили $f(r/R)$ для нескольких значений m (сплошные кривые) приведены на фиг. 6. Отклонение профиля скорости от плоского вблизи стенки представляет собой пристенный эффект именно того типа, который в общем случае произвольной дисперсной системы не может быть рассмотрен

в рамках теории, основанной на использовании граничного условия (1.3). Пристенные эффекты, связанные с использованием некоторого более точного граничного условия на стенке, целесообразно рассматривать одновременно с влиянием сил, действующих на частицы в радиальном направлении. Если, однако, величина M в (1.2) достаточно велика, последними можно пренебречь. Предварительный анализ, в котором радиальные силы не учитывались, а условие (1.3) было заменено соотношением, аналогичным выражению для скорости скольжения газа у стенки в кинетической теории, приводит к выводу, что в пристенном слое l величины u и ρ отличаются от значений в ядре течения на u' и ρ' , представляющие собой функции от r . Последние величины связаны между собой условием постоянства величины M или пропорциональной ей величины

$$M' = -\rho(1 - \rho)G_1\Phi\kappa_2^{-1}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Этот анализ показывает, что чаще всего вблизи стенки скорость межфазового скольжения уменьшается по модулю, как это изображено на фиг. 1, так что u и u' имеют разные знаки. Значения функции $M'(c_u)$ иллюстрируются кривыми фиг. 7. При расчете было принято $\kappa = 0.5$; цифры у кривых на фиг. 7 обозначают соответствующие последним значения ρ . По этим кривым нетрудно построить также «изобары» $M' = \text{const}$ на плоскости ρ, c_u , из которых легко определить знак и величину ρ' , если известна u' . Видно, что структура этих изобар весьма сложна. Нетрудно показать из фиг. 7, что в различных ситуациях при $u'/u < 0$ может происходить как относительное накопление частиц в пристенном слое, так и обеднение дисперсной системы в этой области.

Интересный пристенный эффект имеет место при течении достаточно концентрированных взвесей частиц в газах. В этом случае в пристенном слое возможны большие градиенты скорости газа, причем u и v оказываются здесь даже выше, чем в ядре течения — скорость газа резко возрастает в слое l_0 , достигает максимума, затем так же резко падает внутри слоя l , и далее сравнительно медленно увеличивается до второго максимума в центре трубы. При этом в пристенном слое имеет место некоторое уменьшение ρ . Это явление неоднократно наблюдали на опыте; такие эксперименты описаны, например, в [3].

Более подробное изучение пристенных эффектов выходит за рамки этой работы. Отметим, однако, что даже если эти эффекты не существенны в чисто гидродинамическом отношении, они способны существенно изменять коэффициенты теплопередачи между средой и стенкой, в связи с чем их дальнейшее исследование представляет несомненный интерес.

Поступило 8 II 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Бувевич Ю. А. Неньютоновская гидромеханика дисперсных систем. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
2. Бувевич Ю. А., Сафрай В. М. Вязкость жидкой фазы в дисперсных системах. ПМТФ, 1967, № 2.
3. Горбис З. Р. Теплообмен дисперсных сквозных потоков. М.—Л., Изд-во «Энергия», 1964.
4. Файзуллаев Д. Ф. Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах. Ташкент, Изд-во «Фан», 1966.
5. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред. Изд-во иностр. лит., 1954.
6. Vagned R. A. The Flow of Cohesionless Grains in Fluids. Phil. Trans. Roy. Soc. ser. A, 1956, vol. 249, No. 964.
7. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения. Изв. ВУЗов, Нефть и газ, 1958, № 1.
8. Фриш Г. Л., Симха Р. Вязкость коллоидных дисперсий и растворов, содержащих макромолекулы. В сб. «Реология». Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Забродский С. С. Гидродинамика и теплообмен в псевдооживленном (кипящем) слое. Госэнергоиздат, 1963.
10. Happel J., Brenner H. Viscous Flow in Multiparticle Systems: Motion of Spheres and a Fluid in a Cylindrical Tube. A.I.Ch.E. Journ. 1957, vol. 3, No. 4, p. 506—513.
11. Adler I. L., Happel J. The Fluidization of Uniform Smooth Spheres in Liquid Media. Chem. Engng. Progr. Symp. Ser., 1962, vol. 58, No. 38.