№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1968

ВИХРЬ ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

О. М. КИСЕЛЕВ

(Казань)

Задача о движении вихря под свободной поверхностью бесконечно глубокой тяжелой жидкости была впервые исследована Л. Н. Сретенским в 1933 г. (см. [1]). Вскоре М. В. Келдыш [1] дал более простое решение задачи об обтекании изолированной особенности потоком со свободной поверхностью. В основе работ Л. Н. Сретенского и М. В. Келдыша лежит теория волн малой амплитуды, которая, как будет показано, перестает быть справедливой при больших числах Фруда F.

Метод, предлагаемый ниже, позволяет получить решение, переходящее в точное при $F \to \infty$. Когда F не велико, это решение приближенно совпадает с прежними при условии, что интенсивность вихря мала.

1. Постановка задачи. Принимаемые допущения. Рассмотрим плоскопараллельный поток тяжелой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, обтекающий вихрь интенсивности Γ (фиг. 1). Движение жидкости установившееся и потенциальное. Далеко впереди от вихря поток имеет горизонтальную свободную поверхность и постоянную скорость V_0. Ось x направим вдоль невозмущенной свободной поверхности, ось y — вертикально вверх. Пусть g — ускорение силы тяжести, H — расстояние от свободной поверхности до линии тока, проходящей через критическую точку, при $x = -\infty$. Кроме того, обозначим через u и v составляющие скорости возмущенного движения по осям x и y, через ψ — функцию тока возмущенного движения.

При выводе граничного условия, принятого в теории волн малой амплитуды (см., например, [2], стр. 463), используются следующие предположения о малости отношений

$$(u)_{y=\delta(x)} / V_0 \tag{1.1}$$

$$(v)_{y=\delta(x)} / V_0 \tag{1.2}$$

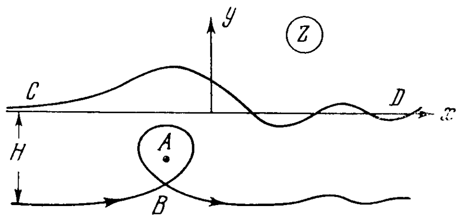
$$[(u)_{y=\delta(x)} - (u)_{y=0}] / (u)_{y=\delta(x)} \tag{1.3}$$

$$[(\psi)_{y=\delta(x)} - (\psi)_{y=0}] / (\psi)_{y=\delta(x)} \tag{1.4}$$

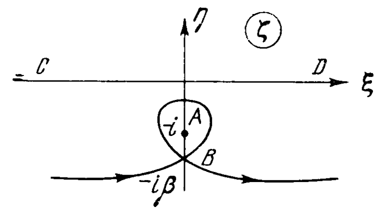
Здесь $y = \delta(x)$ — уравнение свободной поверхности. Однако для течения невесомой жидкости условия (1.3), (1.4) заведомо не выполняются, так как $\delta(x)$ обращается в $+\infty$ или $-\infty$ (свободная поверхность бесконечно поднимается над невозмущенным уровнем или бесконечно опускается). Если, кроме того, относительная интенсивность вихря Γ / HV_0 не мала, то условия (1.1, 1.2) также не выполняются. Вследствие этого решения Л. Н. Сретенского и М. В. Келдыша, основанные на предположениях (1.1), (1.4) не справедливы при больших числах Фруда $F = V_0 / \sqrt{gH}$.

В решении, которое предлагается ниже, используется только одно допущение, а именно, предполагается, что модуль скорости V на свободной поверхности близок к постоянной V_0. Это позволяет получить решение, переходящее в точное, при $F \to \infty$.

2. Решение задачи. Будем искать аналитическую функцию $z(\zeta)$, конформно отображающую нижнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 2) на область течения в плоскости $z = x + iy$. При этом потребуем, чтобы бесконечно удаленные точки



Фиг. 1



Фиг. 2

плоскостей z и ζ соответствовали одна другой и чтобы точке A — центру вихря — в плоскости ζ соответствовала точка $\zeta = -i$. Пусть

$$\lim_{\xi \to -\infty} \frac{dz}{d\zeta} = K \qquad (2.1)$$

Тогда комплексный потенциал течения

$$w = KV_0\zeta + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta + i}{\zeta - i}$$

Отсюда

$$\frac{dw}{d\zeta} = KV_0 \frac{\zeta^2 + \beta^2}{\zeta^2 + 1}, \qquad \Gamma = -\pi K V_0 (\beta^2 - 1) \qquad (2.2)$$

Значение функции тока Ψ в критической точке B:

$$\Psi_B = -KV_0 \left[\beta + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \ln \left| \frac{1+\beta}{1-\beta} \right| \right]$$

Учитывая, что на свободной поверхности $\Psi = 0$, получаем

$$H = K \left[\beta + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \ln \left| \frac{1+\beta}{1-\beta} \right| \right] \qquad (2.3)$$

Из (2.2) и (2.3) легко найти

$$\Gamma / HV_0 = - \frac{\pi (\beta^2 - 1)}{\beta + \frac{1}{2} (\beta^2 - 1) \ln \left| \frac{1+\beta}{1-\beta} \right|} \qquad (2.4)$$

Равенства (2.3) и (2.4) устанавливают взаимно-однозначную связь между физическими параметрами H, Γ / HV_0 и математическими параметрами K, β.

Уравнение Бернулли для свободной поверхности можно записать в виде

$$\ln V = \ln V_0 + {}^1/_2 \ln (1 - 2\nu y), \qquad \nu = g / V_0^2. \qquad (2.5)$$

Очевидно, V мало отличается от V_0, когда величина νy мала. Принимая допущение о малости νy на свободной поверхности, будем вместо (2.5) использовать линеаризованное соотношение

$$\ln V = \ln V_0 - \nu y \qquad (2.6)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G = \ln V_0 + i\nu z - \ln \frac{dw}{dz} \tag{2.7}$$

В силу (2.6)

$$\operatorname{Re} G = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{2.8}$$

Особенности функции G в нижней полуплоскости ζ известны

$$i\nu z \sim ia\zeta, \qquad \ln \frac{dw}{dz} \sim \ln \frac{\zeta + i\beta}{\zeta + i} \qquad \left(a = \frac{Kg}{V_0^2}\right) \tag{2.9}$$

Из (2.3) следует:

$$\frac{gH}{V_0^2} = a\left[\beta + \frac{1}{2}(\beta^2 - 1)\ln\left|\frac{1+\beta}{1-\beta}\right|\right] \tag{2.10}$$

Таким образом, при фиксированной величине Γ / HV_0 параметр a обратно пропорционален F^2.

По известным особенностям и условию (2.8) функцию $G(\zeta)$ легко построить

$$G(\zeta) = ia\zeta + ic - \ln \frac{(\zeta - i)(\zeta + i\beta)}{(\zeta + i)(\zeta - i\beta)} \qquad (c = \nu K_0) \tag{2.11}$$

Здесь K_0 — вещественная постоянная. Из (2.7), учитывая (2.2), (2.11). имеем

$$\frac{dz}{d\zeta} e^{i\nu z} = \frac{1}{V_0} \frac{dw}{d\zeta} e^{G(\zeta)}$$

или

$$\frac{dz}{d\zeta} e^{i\nu z} = K \frac{(\zeta - i\beta)^2}{(\zeta - i)^2} e^{ia\zeta + ic} \tag{2.12}$$

Получено обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $z(\zeta)$. Интегрируя его и определяя константу интегрирования из условия

$$y \to 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad \xi \to -\infty \tag{2.13}$$

будем иметь

$$z = K\zeta + K_0 - i\frac{K}{a}\ln\left\{1 + \frac{ia(\beta - 1)^2}{\zeta - i} + [2a(\beta - 1) + a^2(\beta - 1)^2]\, e^{-ia\zeta} f(\zeta)\right\} \tag{2.14}$$

$$f(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\zeta} \frac{e^{iat}\, dt}{t - i}$$

(интегрирование ведется от точки с координатами $\eta = 0$, $\xi = -\infty$); полученное решение удовлетворяет всем поставленным условиям.

3. О единственности решения. Покажем, что при заданных g, Γ, H, V_0 функция $z(\zeta)$ единственным образом определяется по условиям (2.6), (2.13), если потребовать, чтобы производные $dz / d\zeta$, $d^2z / d\zeta^2$ были ограничены в нижней полуплоскости ζ и чтобы $dz / d\zeta$ не обращалась в нуль.

Параметры K, β однозначно определяются из уравнений (2.4), (2.3), поскольку правые части последних монотонны по β. Следовательно, $dw / d\zeta$ однозначно определяется из (2.2). Найденное решение (2.14) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}(\ln V_0 + i\nu z - \ln w' + \ln z') = 0 \qquad (\eta = 0) \tag{3.1}$$

(штрихами обозначены производные по ζ).

Предположим, что существует некоторая другая функция $z_1(\zeta)$, отвечающая условиям задачи. Согласно (2.6)

$$\operatorname{Re}(\ln V_0 + i\nu z_1 - \ln w' + \ln z_1') = 0 \qquad (\eta = 0) \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) найдем, что

$$\operatorname{Re}(i\nu z - i\nu z_1 + \ln z' - \ln z_1') = 0 \qquad (\eta = 0)$$

$$\operatorname{Re}(i\nu z' - i\nu z_1' + z'' / z' - z_1'' / z_1') = 0 \qquad (\eta = 0)$$

Учитывая, что функция

$$i\nu z' - i\nu z_1' + z'' / z' - z_1'' / z_1'$$

ограничена в нижней полуплоскости ζ и чисто мнима на вещественной оси, получаем

$$i\nu z' - i\nu z_1' + z'' / z' - z_1'' / z_1' = i\rho$$

Отсюда

$$i\nu z - i\nu z_1 + \ln z' - \ln z_1' = i\rho\zeta + i\omega \tag{3.3}$$

Здесь ρ, ω — вещественные постоянные. Из (3.3) и (2.12) следует:

$$e^{i\nu z_1}\frac{dz_1}{d\zeta} = K\frac{(\zeta - i\beta)^2}{(\zeta - i)^2}e^{i(a-\rho)\zeta + i(c-\omega)}$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$z_1 = -\frac{i}{\nu}\ln\frac{a}{a-\rho} + \frac{a-\rho}{\nu}\zeta + \frac{c-\omega}{\nu} -$$

$$-i\frac{K}{a}\ln\left\{1 + \frac{i(a-\rho)(\beta-1)^2}{\zeta - i} + (C_1 + iC_2)e^{-i(a-\rho)\zeta} +\right.$$

$$\left. + e^{-i(a-\rho)\zeta}[2(a-\rho)(\beta-1) + (a-\rho)^2(\beta-1)^2]\int\limits_{-\infty}^{\zeta}\frac{e^{i(a-\rho)t}\,dt}{t-i}\right\}$$

Вещественные постоянные $\rho = C_1 = C_2 = 0$, согласно условию (2.13). Следовательно, функция $z_1(\zeta)$ не отличается от (2.14), так как постоянная K_0 не фиксирована.

4. Исследование фукции $f(\zeta)$. Дадим некоторые оценки для интеграла

$$f(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\zeta}\frac{e^{iat}\,dt}{t-i}$$

при положительном a и ζ, меняющемся в нижней полуплоскости. (4.1)

После трехкратного интегрирования по частям имеем

$$f(\zeta) = e^{ia\zeta}\left\{\frac{1}{ia(\zeta-i)} + \frac{1}{[ia(\zeta-i)]^2} + \frac{2}{[ia(\zeta-i)]^3} + \frac{6}{(ia)^3}\int\limits_{\infty}\frac{e^{ia(t-\zeta)}\,dt}{(t-i)^4}\right\}$$

При любом фиксированном $\zeta = \xi + i\eta$

$$\int\limits_{-\infty}^{\zeta}\frac{e^{ia(t-\zeta)}\,dt}{(t-i)^4} = \int\limits_{-\infty+i\eta}^{\zeta}\frac{e^{ia(t-\zeta)}\,dt}{(t-i)^4}$$

Проведем в последнем соотношении интегрирование вдоль прямой, параллельной оси ξ ($t = \sigma + i\eta$, $\eta < 0$); получим

$$\left| \int\limits_{-\infty+i\eta}^{\zeta} \frac{e^{ia(t-\zeta)}dt}{(t-i)^4} \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{ia(\sigma-\xi)}d\sigma}{[\sigma - i(1-\eta)]^4} \right| < \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, из (4.1) следует:

$$f(\zeta) = e^{ia\zeta}\left\{\frac{1}{ia(\zeta-i)} + \frac{1}{[ia(\zeta-i)]^2} + R(\zeta, a)\right\} \qquad (4.2)$$

$$|R(\zeta, a)| < \frac{1}{a^3}(2+3\pi) \quad (a > 0, \quad \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0) \qquad (4.3)$$

Пользуясь теоремой Коши, нетрудно вычислить значения функции $f(\zeta)$ в точках $\zeta = +\infty$, $\zeta = 0$, $\zeta = -i$ (см., например [3])

$$f(+\infty) = 2\pi i e^{-a}, \qquad f(0) = i\pi e^{-a} + e^{-a}\operatorname{Ei}(a),$$
$$f(-i) = i\pi e^{-a} + e^{-a}\operatorname{Ei}(2a) \qquad (4.4)$$

где $\operatorname{Ei}(a)$ — интегральная показательная функция [4].

При помощи (4.4) представим $f(\xi)$ в виде

$$f(\xi) = i\pi e^{-a} + e^{-a}\operatorname{Ei}(a) + J_1 + iJ_2 + iJ_3 \qquad (4.5)$$

$$J_1 = \int\limits_0^{a\xi} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}dt, \quad J_2 = \int\limits_0^{a\xi} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}dt, \quad J_3 = \int\limits_0^{\xi} \frac{e^{iat}dt}{t^2+1} \qquad (4.6)$$

Очевидно

$$|J_3| < \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} \qquad (4.7)$$

Рассмотрим две последовательности

$$\int\limits_0^{1/2\pi} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}dt, \quad \int\limits_{1/2\pi}^{3/2\pi} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}dt, \ldots, \int\limits_{\pi(n-1/2)}^{\pi(n+1/2)} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}dt, \ldots$$

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}dt, \quad \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}dt, \ldots, \int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}dt, \ldots$$

Нетрудно доказать, что при $0 < a \leqslant 0.4$ обе последовательности являются знакопеременными с монотонно убывающими по абсолютной величине членами. Этот факт позволяет установить, что при $0 < a \leqslant 0.4$

$$|J_1| < \int\limits_0^{1/2\pi} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}dt < \int\limits_0^{1/2\pi} \frac{tdt}{t^2+a^2} \leqslant 0.4835 - \ln a \qquad (4.8)$$

$$|J_2| < \int\limits_0^{\pi/2} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}dt < \int\limits_0^{1} \frac{t^2dt}{t^2+a^2} + \int\limits_1^{\pi} \frac{tdt}{t^2+a^2} \leqslant 2.1513 \qquad (4.9)$$

Используя известное разложение [4]

$$\operatorname{Ei}(a) = C + \ln a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k!k} \qquad (a > 0) \tag{4.10}$$

получим

$$|e^{-a} \operatorname{Ei}(a)| < 1 + C - \ln a = 1.5772 - \ln a \tag{4.11}$$

Подстановка выражений (4.7) — (4.9) и (4.11) в (4.5) дает

$$|f(\xi)| < 7.25 - 2\ln a \qquad (0 < a \leqslant 0.4) \tag{4.12}$$

Найдем оценку для $e^{-ia\zeta} f(\zeta)$ при малых положительных a и $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0$, эту функцию можно представить в виде

$$e^{-ia\zeta} f(\zeta) = e^{-ia\zeta}[f(\xi) + J] \qquad J = \int_{\xi}^{\xi+i\eta} \frac{e^{iat}\,dt}{t - i} \tag{4.13}$$

Интеграл J будем брать по прямой, параллельной мнимой оси ($t = \xi + i\tau$), тогда

$$\begin{gathered} |e^{-iaj}| = \left| e^{a\eta} \int_0^{\eta} \frac{e^{-a\tau}\,d\tau}{\xi - i(1-\tau)} \right| \leqslant e^{a\eta} \int_{\eta} \frac{e^{-a\tau}\,d\tau}{1-\tau} = \\ = e^{-a(1-\eta)}[\operatorname{Ei}(a - a\eta) - \operatorname{Ei}(a)] \qquad (\eta \leqslant 0,\ a > 0) \end{gathered} \tag{4.14}$$

При помощи разложения (4.10) последнее неравенство приведем к виду

$$|e^{-iaj}| < e^{-a(1-\eta)} \ln(1 - \eta) + 1 \qquad (\eta \leqslant 0,\ a > 0)$$

Можно показать, что

$$\max_{x \geqslant 1} (e^{-ax} \ln x) < \max(1, -\ln a) \qquad (0 < a < 1)$$

или

$$\max_{x \geqslant 1} (e^{-ax} \ln x) < -\ln a \qquad \left(0 < a \leqslant \frac{1}{e}\right)$$

Таким образом, учитывая (4.12), из (4.13) получим

$$|e^{-ia\zeta} f(\zeta)| < 8.25 - 3\ln a \qquad (0 < a \leqslant e^{-1},\ \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0) \tag{4.15}$$

Оценки (4.3), (4.15) позволяют исследовать решение (2.14) в предельных случаях. При $a \to \infty$ ($F \to 0$) из (2.14) с учетом (4.2), (4.3) получается

$$z = K\zeta + K_0 \tag{4.16}$$

Из выражения

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta - i\beta)^2}{(\zeta - i)^2} \frac{K}{1 + ia(\beta - 1)^2(\zeta - i)^{-1} + [2a(\beta - 1) + a^2(\beta - 1)^2]\, e^{-ia\zeta} f(\zeta)}$$

при $a \to 0$ ($F \to \infty$) в соответствии с (4.15) будем иметь

$$\frac{dz}{d\zeta} = K \frac{(\zeta - i\beta)^2}{(\zeta - i)^2}. \tag{4.17}$$

Формулы (4.16), (4.17) показывают, что в обоих предельных случаях решение переходит в точное (течение под прямолинейной горизонтальной стенкой и течение невесомой жидкости).

5. Геометрические и гидродинамические характеристики потока. Пользуясь (4.4), найдем из (2.14) асимптотическую форму свободной поверхности при больших значениях ξ:

$$x=K\xi+K_0+\frac{K}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{A\cos a\xi}{1+A\sin a\xi},\quad y=-\frac{K}{2a}\ln(1+2A\sin a\xi+A^2)$$

$$A=[2a(\beta-1)+a^2(\beta-1)^2]2\pi e^{-a}$$

Длина волны λ и амплитуда α равны

$$\lambda=\frac{2\pi}{a}K=\frac{2\pi V_0^2}{g}\qquad \alpha=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}=\frac{K}{4a}\left|\ln\left(\frac{1+A}{1-A}\right)^2\right|$$

Отсюда

$$\lim_{a\to\infty}\alpha=\lim_{a\to\infty}\lambda=\lim_{a\to\infty}\alpha/\lambda=0$$

При $a\to 0$ длина волны неограниченно возрастает, а амплитуда

$$\alpha\to\alpha_0=4K\pi|\beta-1| \tag{5.1}$$

При $a(\beta-1)=-2$, $\alpha=0$, т. е. для каждого фиксированного числа F существует такая положительная величина Γ/HV_0, при которой волны на свободной поверхности отсутствуют.

Определим положение вихря. Пусть $\operatorname{Im} z(-i)=-h$, тогда, согласно (2.14) и (4.4)

$$h=K+\frac{K}{2a}\ln\left\{\left[1-\frac{a(\beta-1)^2}{2}+B\operatorname{Ei}(2a)\right]^2+\pi^2B^2\right\} \tag{5.2}$$

$$B=e^{-2a}[2a(\beta-1)+a^2(\beta-1)^2]$$

Учитывая асимптотическое разложение [5]

$$\operatorname{Ei}(x)=\frac{e^x}{x}\left(1+\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}+\ldots\right)\qquad (x\gg 1)$$

получим

$$\lim_{a\to\infty}h=K. \tag{5.3}$$

Волновое сопротивление Q и подъемная сила P вихря вычисляются по формуле Чаплыгина

$$Q-iP=\frac{i\rho}{2}\oint\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2\frac{d\zeta}{dz}\,d\zeta$$

Здесь интеграл можно взять по бесконечно малой окружности с центром в точке $\zeta=-i$. При этом получается

$$Q-iP=-\rho\pi K^2V_0^2\left\{i\varkappa\left[\beta^2-1+\frac{(\beta^2-1)^2}{4}\right]-\mu\frac{(\beta^2-1)^2}{4}\right\} \tag{5.4}$$

$$\varkappa=\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta=-i}=\frac{4}{K(1+\beta)^2}\left\{1-\frac{a(\beta-1)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+[2a(\beta-1)+a^2(\beta-1)^2][e^{-2a}\operatorname{Ei}(2a)+i\pi e^{-2a}]\right\}$$

$$\mu=\left(\frac{d}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta=-i}=\frac{2i(\beta-1)}{K(\beta+1)^3}\left\{2+a\frac{1+8\beta-\beta^2}{2}+a^2(\beta^2-1)+\right.$$

$$\left.+[4a(\beta-1)+2a^2(\beta^2-4\beta-1)-2a^3(\beta^2-1)][e^{-2a}\operatorname{Ei}(2a)+i\pi e^{-2a}]\right\}$$

При $a = 0$

$$Q = 0, \quad P = 2\pi\rho K V_0^2(\beta - 1) \quad \text{или} \quad P = -{}^1/_2\rho V_0^2 \alpha_0 \operatorname{sign} \Gamma$$

При $a = \infty$

$$Q = 0$$

$$P = \rho\pi K V_0^2 \left[\beta^2 - 1 + \frac{(\beta^2 - 1)^2}{4}\right] \quad \text{или} \quad P = -\rho V_0 \Gamma \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi h V_0}\right)$$

Здесь учитывались соотношения (5.1), (2.2), (5.3).

Пусть величина $|\Gamma / HV_0|$ мала (мало $|\beta - 1|$). В формуле (5.4) будем пренебрегать величинами порядка $(\beta - 1)^3$. При этом получим

$$Q = \rho\pi^2 K V_0^2 a e^{-2a} (\beta^2 - 1)^2$$

$$P = \rho\pi K V_0^2 (\beta^2 - 1)[1 - {}^1/_4(\beta^2 - 1) + (\beta^2 - 1) a e^{-2a} \operatorname{Ei}(2a)]$$

Учитывая (2.2) и (2.9), будем иметь

$$Q = \rho \frac{\Gamma^2 g}{V_0^2} e^{-2a}$$

$$P = -\rho\Gamma V_0 \left[1 + \frac{\Gamma}{4\pi K V_0} - \frac{\Gamma g}{\pi V_0^3} e^{-2a} \operatorname{Ei}(2a)\right] \tag{5.5}$$

Из выражения (5.2) легко видеть, что если a мало, то

$$h = K(1 + \varepsilon)$$

где ε имеет порядок $\beta - 1$. Поэтому, не меняя порядка погрешности, в (5.4), (5.5) можно положить $K = h$

$$Q = \rho \frac{\Gamma^2 g}{V_0^2} e^{-2\nu h}, \quad P = -\rho V_0 \Gamma \left[1 + \frac{\Gamma}{4\pi h V_0} - \frac{\Gamma g}{\pi V_0^3} e^{-2\nu h} \operatorname{Ei}(2\nu h)\right] \tag{5.6}$$

Формулы (5.6) совпадают с соответствующими формулами М. В. Келдыша. Напомним, что это совпадение получается при условии, что число Фруда F невелико, а относительная циркуляция Γ / HV_0 мала.

В заключение заметим, что принятая аппроксимация граничного условия (2.6) имеет простой физический смысл. Действительно, если переписать (2.6) в форме

$${}^1/_2 V^2 - {}^1/_2 V_0^2 e^{-2\nu y} = 0$$

то видно, что последнее выражение представляет собой уравнение Бернулли для свободной поверхности в поле массовых сил с составляющими $X = 0$, $Y = -ge^{-2\nu y}$. Таким образом, полученное решение является точным решением задачи о течении жидкости в указанном поле массовых сил.

Аналогично задаче о вихре решаются задачи о движении любой изолированной особенности под свободной поверхностью бесконечно глубокой тяжелой жидкости.

Поступило 9 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Замечания о некоторых движениях тяжелой жидкости. Техн. заметки ЦАГИ, 1935, вып. 52.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, изд. 5-е, т. 1, Гостехиздат, 1955.
3. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Тр. конференции по теории волнового сопротивления. Изд. ЦАГИ, 1937.
4. Градштейн И. С., Рыжик Л. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений. Физматгиз, 1962.
5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.