

О НЕКОТОРЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТАХ В КАНАЛЕ МГД-ГЕНЕРАТОРА

В. А. БИТЮРИН, В. И. КОВБАСЮК, С. А. МЕДИН

(Москва)

Проведенные в последние годы теоретические и экспериментальные исследования показывают, что течение плазмы в канале реального МГД-генератора значительно отличается от квазиодномерной модели потока в идеализированном магнитогидродинамическом канале. В первую очередь это отличие обнаруживается при анализе электродинамики МГД-генератора. Обычно действительные электрические характеристики генератора хуже ожидаемых, что может быть вызвано, в частности, неоднородностями потока и электрическими утечками в канале. Действие этих факторов особенно сильно проявляется при наличии эффекта Холла.

Некоторые качественные и количественные оценки этих явлений уже делались в литературе. В [1] было указано на необходимость учета влияния холодного пограничного слоя на эффективную проводимость плазмы в канале, в [2] показано, что это влияние значительно увеличивается при наличии эффекта Холла. Влияние шунтирования плазмы электропроводными стенками канала рассматривалось в работах [3-5].

В данной работе выполнен анализ совместного действия эффектов, связанных с неоднородностями потока и электрическими утечками при анизотропии проводимости плазмы, и приведен пример расчета течения в МГД-генераторе с конечным изменением параметров.

1. Рассмотрим уравнения электродинамики для стационарного течения проводящего газа в канале фарадеевского МГД-генератора при малых магнитных числах Рейнольдса. Полагая, что $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$, $\mathbf{u} = \{u, 0, 0\}$, $\mathbf{j} = \{j_x, j_y, 0\}$ и $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, 0\}$, запишем уравнения Максвелла и закона Ома в виде

$$\oint_L E_{\perp} dL = 0, \quad \oint_{\Sigma} j_n d\Sigma = 0 \quad (1.1)$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [E_x - \beta(E_y - uB)], \quad j_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [(E_y - uB) + \beta E_x]$$

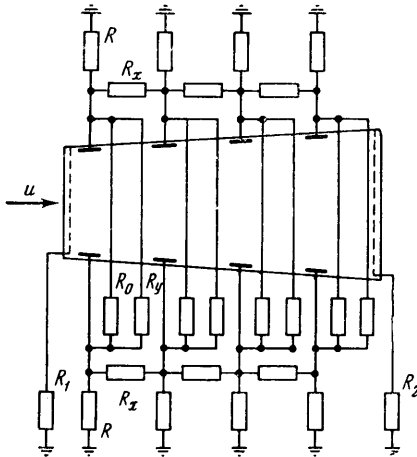
В уравнениях (1.1) использована общепринятая система обозначений. Рассмотрим электрическую схему МГД-генератора (фиг. 1), на которой условно показаны сопротивления электрической нагрузки R_0 и утечек — в продольном направлении R_x , в поперечном направлении R_y и на землю R . При достаточно высокой степени секционирования генератора нагрузку и утечки в канале можно считать распределенными. Введем удельные сопротивления нагрузки r_0 и проводимости утечек G_x, g_y, g :

$$r_0 = R_0 l, \quad G_x = \frac{2l}{R_x}, \quad g_y = \frac{1}{R_y l}, \quad g = \frac{1}{Rl} \quad (1.2)$$

где l — длина секции.

Проводимости G_x и g_y обусловлены электрическими утечками по стенкам канала вследствие потери изоляционных свойств в тонком поверхностном слое материала, подвергающегося действию весьма высоких тем-

ператур и соединений ионизирующей присадки. Поэтому схема фиг. 1 является условной в том смысле, что в общем случае утечки по стенкам не могут быть представлены в виде сосредоточенных сопротивлений R_x и R_y , присоединенных к электродам, так как проводящие стенки канала приводят к распределенному шунтированию плазмы. Это будет учтено в дальнейшем при выводе уравнений (1.4) и (1.6). Проводимость g возникает из-за неидеальной изоляции электродов (по системе охлаждения и цепи нагрузки) от земли.



Фиг. 1

Наконец, могут существовать утечки продольного тока на входе и выходе канала (сопротивления R_1 и R_2), которые закорачивают продольный ток генератора на землю через соседние элементы контура.

Предполагая, что длина канала много больше расстояния между электродами и пренебрегая изменением параметров по оси z , получим из (1.1.1), что

$$V_x = \varphi - \varphi_1 = - \int_{x_1}^x E_x dx \quad (1.3)$$

$$V_y = \varphi^+ - \varphi^- = - \int_{-a/2}^{a/2} E_y dy + \Delta V$$

$$E_x = E_x(x)$$

$$E_y = E_y(x, y)$$

где V_x — разность потенциалов Холла по оси канала, V_y — напряжение на электродах, ΔV — сумма падений потенциала на электродах.

Преобразуем уравнение (1.1.2), выбрав для интегрирования поверхность, ограничивающую объем канала между двумя бесконечно близкими сечениями. Учитывая (1.3), находим

$$- \frac{dI}{dx} = 2g \left(\varphi_1 - \int_{x_1}^x E_x dx \right), \quad I = \int_S j_x dS + G_x E_x \quad (1.4)$$

В качестве граничных условий для уравнения (1.4) используем уравнения закона Кирхгофа (фиг. 1)

$$R_1 I_1 = -\varphi_1, \quad R_2 I_2 = \varphi_2 \quad (1.5)$$

Вторую связь из уравнения (1.1.2) получим, вводя поверхностную проводимость изоляционной стенки σ_w , связанную с g_y в случае $\sigma_w = \sigma_w(x)$ соотношением $g_y = 2\sigma_w/a$, в виде

$$(j_y b + 2\sigma_w E_y) = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{g}{2} \right) V_y \quad (1.6)$$

Уравнения (1.4) и (1.6) получены при тех же предположениях, что и уравнения (1.3).

Таким образом, при помощи уравнений (1.1.3), (1.1.4), (1.3), (1.4) и (1.6) при граничных условиях (1.5) можно найти распределение электродинамических параметров задачи при известных характеристиках потока и параметрах внешней цепи (1.2) (предполагается, что магнитное поле

является постоянным). Ниже рассмотрены некоторые эффекты, описываемые полученной системой уравнений, и будет выполнен анализ полного решения задачи о течении для характерного случая.

2. Рассмотрим эффекты шунтирования МГД-генератора проводящими стенками канала. Определим характеристики генератора с однородными параметрами при условии $g = 0$ и $\Delta V = 0$. Используя уравнения (1.1.3), (1.1.4), (1.3)–(1.6), получим

$$\begin{aligned} j_y &= -\sigma_{\text{eff}} u B (1 - k \alpha), & j_0 &= \frac{V_y}{r_0 b} = -\sigma_{\text{eff}} u B (1 - k) & (2.1) \\ N_y &= -j_0 E_y = \sigma_{\text{eff}} u^2 B^2 \alpha k (1 - k), & E_x &= -\kappa \beta u B (1 - k \alpha) \\ k &= \frac{V_y}{V_y^0} = \frac{E_y}{u B \alpha}, & \sigma_{\text{eff}} &= \sigma \frac{1 + \kappa \beta^2}{1 + \beta^2} \\ \kappa &= \left[1 + \frac{1 + \beta^2}{\sigma a b} \left(G_x + \frac{L}{R_1 + R_2} \right) \right]^{-1}, & \alpha &= \left[1 + \frac{2\sigma_w}{b\sigma_{\text{eff}}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Из (2.1) следует, что продольное шунтирование МГД-генератора уменьшает эффективную проводимость σ_{eff} плазмы. Параметр продольного шунтирования κ ($0 \leq \kappa \leq 1$), как видно из (2.1.7), определяется отношением проводимостей плазмы и утечек вдоль канала и не зависит от нагрузки генератора. Наличие продольных утечек в фарадеевском секционированном МГД-генераторе вызывает падение холлового поля пропорционально κ (2.1.4).

Поперечное шунтирование МГД-генератора приводит к уменьшению напряжения холостого хода V_y^0 . Параметр поперечного шунтирования α ($0 \leq \alpha \leq 1$) зависит только от отношения эффективной проводимости плазмы и проводимости утечек по изоляционной стенке. Отметим, что вследствие шунтирования поперечной цепи удельный ток нагрузки j_0 меньше плотности тока в плазме j_y , и полезная мощность генератора N_y уменьшается так же, как и напряжение холостого хода.

В уравнениях (2.1) коэффициент нагрузки k определяется как отношение напряжения на электродах генератора под нагрузкой к напряжению холостого хода.

Выполняя несложные преобразования, из уравнений (2.1.6)–(2.1.8) получим

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{2\sigma_w}{(1 + \kappa \beta^2)[G_x + L/(R_1 + R_2)]} \frac{1 - \kappa}{\kappa} \quad (2.2)$$

Учитывая, что $G_x \sim 2\sigma_w(a + b)$, нетрудно показать, что при $\beta^2 \gg 1$ и $a \sim b$ имеет место неравенство

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha} \ll \frac{1 - \kappa}{\kappa} \quad (2.3)$$

Из неравенства (2.3) видно, что проводящие стенки канала закорачивают холловское поле в большей степени, чем поперечное. Поэтому снижение мощности генератора из-за эффекта Холла является более существенным по сравнению с эффектом поперечного шунтирования.

Рассмотрим влияние утечек тока на землю на характеристики МГД-генератора. Зададим все гидродинамические параметры потока, а также g , G_x , E_y и ab постоянными по длине канала. Тогда уравнение (1.4) с учетом (1.1.3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} = \frac{2g}{\sigma a b / (1 + \beta^2) + G_x} E_x \quad (2.4)$$

При граничных условиях $R_1 = R_2 = \infty$ решение уравнения (2.4) записывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{\beta(E_y - uB)} &= \kappa = \frac{\text{sh } a(x/L) - \text{sh } a(x/L - 1)}{\text{sh } a} & (2.5) \\ a &= L \left(\frac{2g}{\sigma a b / (1 + \beta^2) + G_x} \right)^{1/2}, & L &= x_2 - x_1 \end{aligned}$$

Из приведенного решения следует, что при относительно больших значениях сопротивления утечки на землю, когда их шунтированием поперечной цепи генератора практически можно пренебречь, имеет место сильное закорачивание холлового поля. Например, при характерных значениях параметров $\sigma b / 2ga = 10^2$, $L/a = 10^2$, $\beta = 2$, $G_x = 0$ имеем $\kappa = 0.2$ в середине канала.

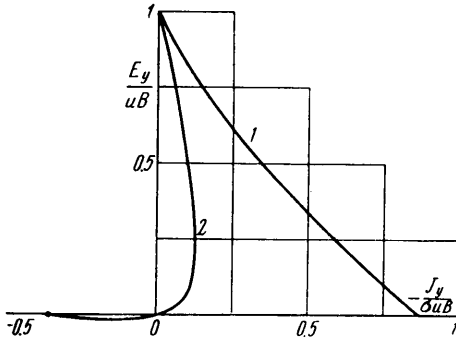
Закорачивание холловского поля и вызванное этим снижение эффективности генератора может также происходить вследствие неоднородности плазмы в канале. Для иллюстрации этого эффекта воспользуемся методом анализа, предложенным в работе [2]. Предполагая, что сечение канала и гидродинамические параметры потока за исключением проводимости ($\sigma = \sigma(y)$) и числа Холла ($\beta = \beta(y)$) постоянны, при отсутствии утечек по стенкам из (1.1) получим

$$j_y = -\frac{\langle \sigma \rangle}{G} uB(1-k), \quad k = \frac{V_y}{V_y^0} = \frac{\langle E_y \rangle}{uB} \quad (2.6)$$

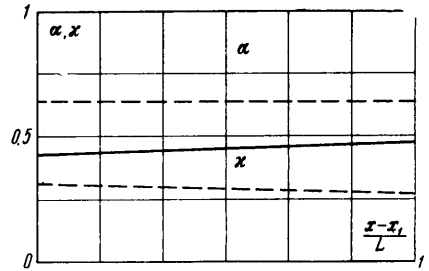
$$E_x = -\kappa \langle \beta \rangle uB(1-k), \quad \kappa = \frac{1}{G} = \frac{1}{\langle \sigma \rangle \langle (1+\beta^2)/\sigma \rangle - \langle \beta \rangle^2}$$

В уравнениях (2.6) знаком $\langle \rangle$ отмечены величины, усредненные по y . Из (2.6) видно, что эффекты закорачивания холловского поля и снижения эффективной проводимости неоднородной плазмы особенно сильно проявляются при $\beta > 1$.

В отличие от рассмотренного случая эффект Холла не влияет на характеристики МГД-генератора, в котором имеются только продольные неоднородности и нет электрических утечек. Если же продольные утечки существуют, то в генераторе с про-



Фиг. 2



Фиг. 3

дольными неоднородностями потока может наблюдаться взаимное электродинамическое влияние различных секций генератора, обусловленное протеканием общего тока Холла. Это влияние качественно можно исследовать, рассмотрев МГД-генератор с постоянными гидродинамическими параметрами и сечением канала, в котором имеется скачок проводимости ($\sigma = \sigma'$ при $x - x_1 \leq L/2$, $\sigma = \sigma''$ при $x_2 - x \leq L/2$). Полагая: $g = \sigma_w = G_x = \Delta V = R_1 = R_2 = 0$, находим из (1.1.3), (1.1.4), (1.3.1), (1.4)–(1.6)

$$\frac{j_y'}{\sigma' uB} = - \left[1 + \sigma' r' + \beta^2 \frac{\sigma''}{\sigma'} \frac{2 + \sigma' r' + \sigma'' r''}{(1 + \sigma''/\sigma')(1 + \sigma'' r'') + \beta^2 (1 - \sigma''/\sigma')} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

$$E_y' = -r' j_y', \quad r' = r_0' b / a$$

На фиг. 2 представлены вольт-амперные характеристики первого и второго участков канала при условии $r' = r''$ для случая $\sigma' / \sigma'' = 10$, $\beta = 2$. Из графика видно, что закорачивание цепи Холла мало влияет на характеристики первого участка (кривая 1), в то время как второй участок канала в генераторном режиме работает неэффективно, а в режимах, близких к короткому замыканию ($r_0 \rightarrow 0$) переходит в режим ускорителя (кривая 2). Более «холодный» второй участок играет роль сопротивления, блокирующего ток Холла в генераторе. Это приводит также к тому, что суммарная мощность генератора значительно превышает мощность генератора с однородной «горячей» ($\sigma'' = \sigma'$) плазмой. (Для данного примера этот эффект будет максимальным при $r'' = 0$).

Отметим, что при изменении нагрузки таким образом, что $E_y' = E_y''$, обе характеристики будут линейными. В общем случае вид вольт-амперных характеристик двух взаимосвязанных участков канала может быть весьма различным.

3. Рассмотрим совместную задачу о распределении газодинамических и электродинамических параметров потока в рамках допущений, сделанных в п. 1, используя гидравлическое (квазиодномерное) приближение для записи гидродинамических членов в уравнениях сохранения массы,

импульса и энергии. Уравнения гидродинамики для стационарного течения совершенного проводящего газа запишем в виде

$$\langle \rho \rangle \langle u \rangle S = m, \quad p = \rho RT \quad (3.1)$$

$$\langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{d\langle u \rangle}{dx} + \frac{d\langle p \rangle}{dx} = B \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} j_y dy - \xi \frac{\langle \rho \rangle \langle u \rangle^2}{2D}$$

$$\langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{d}{dx} \left(c_p \langle T \rangle + \frac{\langle u \rangle^2}{2} \right) = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} (j_x E_x + j_y E_y) dy - \alpha (\langle T \rangle - T_w) \frac{4}{D}$$

Система уравнений, описывающая течение в магнитогидродинамическом канале, замыкается уравнениями (1.1.3), (1.1.4), (1.3), (1.4), (1.6).

Будем считать, что давление в сечении канала постоянно, а профили скорости и температуры в сечении заданы степенными функциями

$$u = u_0(x) \psi(y), \quad T = T_w + [T_0(x) - T_w] \psi(y) \quad (3.2)$$

$$\psi(y) = (1 - 2|y|/a)^{1/2}$$

проводимость и число Холла являются известными функциями термодинамических параметров газа

$$\sigma = 2.05 \cdot 10^5 T^{0.75} \exp(-2.515 \cdot 10^4 / T) p^{-0.5}, \quad \beta = 0.59 \cdot 10^5 B \sqrt{T} / p \quad (3.3)$$

а коэффициенты трения и теплоотдачи определяются по формулам

$$\xi = 0.316 (R_D)^{-0.35}, \quad \alpha = 0.0396 c_p \langle \rho \rangle \langle u \rangle (R_D)^{-0.25} (P)^{-2/3} \quad (3.4)$$

Здесь и ниже значения всех размерных величин даны в системе единиц СИ. Для решения задачи нужно вычислить интегралы в правых частях уравнений движения и энергии (3.1.2), (3.1.3). Для этого требуется выразить E_y , j_x и j_y через электродинамические параметры течения, зависящие только от x . Нетрудно видеть, что указанные величины определяются из уравнений (1.1.3), (1.1.4), (1.3.4) и (1.6) через E_x и j_0 .

Холловское поле E_x и удельный ток нагрузки j_0 при помощи (1.1.3), (1.1.4), (1.3.4), (1.6) и (3.2) можно представить в виде

$$E_x = - \frac{u_0 B (\lambda \mu + \nu R^*) - IR^* - \mu \Delta V}{\theta R^* - \mu^2} \quad (3.5)$$

$$j_0 = - \frac{u_0 B \lambda - \mu E_x - \Delta V}{R^*} \left(1 + \frac{g r_0}{2} \right)^{-1}$$

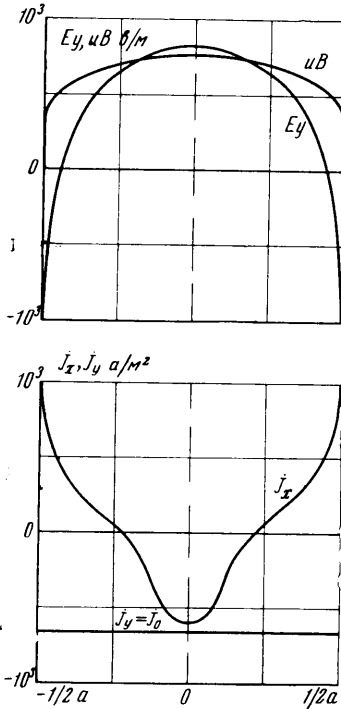
$$R^* = \frac{1}{b} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1 + \beta^2}{\sigma} \delta dy + r_0 \left(1 + \frac{g r_0}{2} \right)^{-1}$$

$$\lambda = \int_{-a/2}^{a/2} \psi \delta dy, \quad \mu = \int_{-a/2}^{a/2} \beta \delta dy, \quad \nu = 2 \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_w \beta \psi \delta dy$$

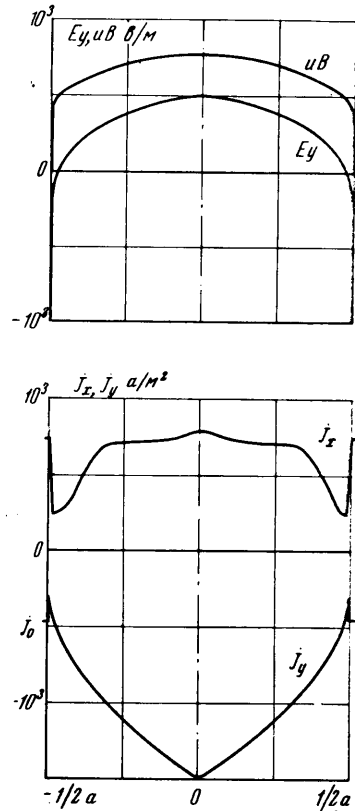
$$\theta = b \int_{-a/2}^{a/2} \left(\sigma + \frac{2\sigma_w}{b} \right) \delta dy + G_x, \quad \delta = \left[1 + \frac{2\sigma_w (1 + \beta^2)}{b\sigma} \right]^{-1}$$

Входящие в уравнения (3.5) гидродинамические параметры и $I(x)$ определяются из решения соответствующих одномерных дифференциальных уравнений задачи.

В качестве примера был проведен расчет течения в канале МГД-генератора при следующих условиях: $a = 0.220 + 0.020(x - x_1)$, $b = 0.080$, $B = 1.7$, $M_1 = 0.468$, $T_{01} = 2500$, $p_{01} = 0.75 \cdot 10^5$, $\gamma = 1.13$, $R = 300$, $T_w = 1600$. На фиг. 3 построено распределение параметров κ и α , определенных в соответствии с (2.1.4) и (2.1.5) по средним величинам $\langle u \rangle$, $\langle E_y \rangle$ и $\langle \beta \rangle$ при нагрузке $r_0 = 2,08$ и $g = 1/R_1 = 1/R_2 = \Delta V = 0$ для случаев, когда утечки по стенкам отсутствуют (сплошные кривые) и когда



Фиг. 4



Фиг. 5

$\sigma_w = 0.08 \psi(y)$, $G_x = 0.14(a + 2b)$ (пунктирные кривые). На фиг. 4 и 5 для первого и второго примеров показаны профили uB , E_y , j_x и j_y во входном сечении канала.

Из фиг. 3 видно, что в канале с идеальными стенками имеет место интенсивное закорачивание холловского поля ($\kappa < 1$) вследствие неоднородности потока. Эффект шунтирования проводящей стенкой еще более снижает κ , а также уменьшает α .

Влияние неоднородности потока приводит к тому, что в плазме циркулирует холловский ток (фиг. 4), вследствие чего максимальное значение поля E_y оказывается больше $u_0 B$. При наличии шунтирования стенкой эпюра холловского тока j_x деформируется и смещается в область положительных значений тока (фиг. 5). Ток нагрузки j_0 в этом случае меньше тока в плазме j_y за исключением узких областей вблизи электродов. Последнее обстоятельство также вызвано шунтирующим действием стенки.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 22 I 1968

1. Любимов Г. А. Изменение электрического потенциала вблизи стенки канала при движении ионизованного газа в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 5.
2. Rosa R. J. Hall and Ion-Slip Effects in a Nonuniform Gas. Phys. Fluids. 1962, vol. 5, No. 9.
3. Блэкман В., Джонс М., Диметриадис Э. Исследование магнитогиродинамического преобразования энергии в прямоугольных каналах. Сб. ст. «Инженерные вопросы магнитной гидродинамики», М., Изд-во «Мир», 1965.
4. Reseck K. G., Eustis R. H., Kruger C. H. MHD-Generator Performance Prediction Including Two-Dimensional Effects and Wall Leakage. Electricity from MHD, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966, vol. 3.
5. Hunt J. C. R. Magnetohydrodynamic Flow in Rectangular Ducts. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt. 4.