

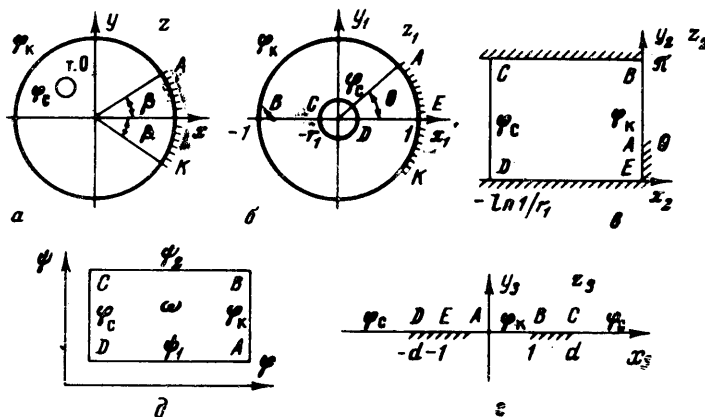
О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ В НЕФТЯНЫХ ЗАЛЕЖАХ С ЧАСТИЧНО НЕПРОНИЦАЕМОМ КОНТУРОМ

Р. А. МУКМИНОВ

(Москва)

Исследовано влияние непроницаемости части контура залежи на дебит скважины при следующих предположениях: пласт однороден, давления на контуре питания и на скважине постоянные, распределение давления в области фильтрации описывается уравнением Лапласа. Проведены числовые расчеты для оценки возможной эффективности разрушения экранирующей части применением мощных источников энергии, сконцентрированной в малом объеме.

Анализу влияния сброса в пласте с удаленным контуром питания посвящены работы [1, 2]. Случай залежи с круговыми и прямолинейными порогами рассмотрен в [3].



Фиг. 1

1. Дебит скважины в круговом пласте. Пусть совершенная скважина радиусом r_0 с центром в точке $a = x_0 + iy_0 = \delta e^{i\alpha_0}$ дренирует с потенциалом φ_c круговой пласт (фиг. 1, а). За масштаб длины принят радиус контура залежи, на которой поддерживается потенциал φ_k , причем часть контура AK с центральным углом 2β непроницаема.

Аналитической функцией [4]

$$z_1 = e^{i\gamma} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z = x + iy = \rho e^{i\alpha} \quad (1.1)$$

где γ — произвольное действительное число, область фильтрации отображается на внутренность единичного круга плоскости $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1}$, а центр скважины переводится в начало координат (фиг. 1, б).

Так как обычно $r_0 \ll 1$, то с точностью до малых величин второго порядка радиус r_1 скважины в плоскости z_1 определится выражением [5]

$$r_1 = r_0 \left| \frac{dz_1}{dz} \right|_{z=a} = \frac{r_0}{1 - \delta^2} \quad (1.2)$$

Положение запечатанной части контура на окружности $|z_1| = 1$, согласно (1.1), определится соотношениями

$$\theta = \arg z_{1A} = \gamma + \beta - 2 \arctg \frac{\delta \sin(\alpha_0 - \beta)}{1 - \delta \cos(\alpha_0 - \beta)} \quad (1.3)$$

$$\theta_1 = \arg z_{1K} = \gamma - \beta - 2 \arctg \frac{\delta \sin(\alpha_0 + \beta)}{1 - \delta \cos(\alpha_0 + \beta)}$$

Произвольная константа γ выбирается из условия $\arg z_{1A} = -\arg z_{1K}$.

При этом выражение (1.3.1) примет вид

$$\theta = \beta - \operatorname{arctg} \frac{\delta \sin(\alpha_0 - \beta)}{1 - \delta \cos(\alpha_0 - \beta)} + \operatorname{arctg} \frac{\delta \sin(\alpha_0 + \beta)}{1 - \delta \cos(\alpha_0 + \beta)} \quad (1.4)$$

В силу симметрии, отрезки BC и ED — линии тока, и поэтому в дальнейшем рассматривается область $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$, которая функцией [4]

$$z_2 = \ln z_1 \quad (1.5)$$

конформно отображается на прямоугольник (фиг. 1, ϵ).

По формуле Кристоффеля — Шварца отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z_3 \geq 0$ (фиг. 1, ϵ) на внутренность прямоугольника $BCDEB$ представляется интегралом [4]

$$z_2 = \sigma_1 \int_{-1}^{z_3} \frac{dz_3}{\sqrt{(d^2 - z_3^2)(1 - z_3^2)}} + \tau_1 \quad (1.6)$$

Здесь d — абсцисса точки действительной оси $y_3 = 0$, соответствующая вершине C многоугольника $BCDEB$. Независимые постоянные σ_1 и τ_1 определяются из условий $z_3 = -1, z_2 = 0$ в точке E и $z_3 = 1, z_2 = i\lambda$ в точке B . При этом выражение (1.6) на участке $-1 < z_3 \leq 1$ можно представить в следующем виде:

$$y_2 = \frac{\pi F(\lambda, k_1)}{K(k_1)}, \quad k_1 = \frac{2d^{0.5}}{d+1}, \quad \lambda = \operatorname{arcsin} \left(\frac{d+1}{2} \frac{1+x_3}{d+x_3} \right)^{0.5} \quad (1.7)$$

так как на данном участке $z_2 = iy_2, z_3 = x_3; K(k)$ и $F(\lambda, k)$ — полный и неполный эллиптические интегралы первого рода, соответственно.

Если в соотношении (1.7), устанавливаемом связь между точками отрезка EB в плоскостях z_2 и z_3 , принять $y_2 = 0$, то для определения координаты точки $A (x_3 = c)$ в плоскости z_3 получим уравнение

$$\theta = \frac{\pi F(\lambda_1, k_1)}{K(k_1)}, \quad \lambda_1 = \operatorname{arcsin} \left(\frac{d+1}{2} \frac{1+c}{d+c} \right)^{0.5} \quad (1.8)$$

Рассматривая интеграл Кристоффеля — Шварца (1.6) на участке $-d \leq z_3 < -1$ и полагая $z_3 = -d$, что соответствует $z_2 = \ln r_1$, будем иметь

$$\frac{\pi}{\ln 1/r_1} = \frac{K(k_1)}{K(k_1')}, \quad k_1' = \frac{d-1}{d+1} \quad (1.9)$$

Для нахождения дебита верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z_3 \geq 0$ конформно отображается на прямоугольник $ABCD$ плоскости комплексного потенциала $\omega = \varphi + i\psi$ (фиг. 1, δ). По формуле Кристоффеля — Шварца на отрезке $c < z_3 \leq 1$ имеем

$$\omega = \sigma_2 \int_c^{z_3} \frac{dz_3}{\sqrt{(d-z_3)(1-z_3)(z_3-c)(z_3+d)}} + \tau_2 \quad (1.10)$$

Так как в точке $A \omega = \varphi_K + i\psi_1, z_3 = c$, то $\tau_2 = \varphi_K + i\psi_1$ и выражение (1.10) на участке $-d \leq z_3 < c$ примет вид

$$\varphi_K - \varphi = -\frac{2\sigma_2 i F(v, k_2')}{\sqrt{(d+1)(d-c)}}, \quad v = \operatorname{arcsin} \left(\frac{d+1}{d+c} \frac{c-x_3}{1-x_3} \right)^{0.5} \quad (1.11)$$

$$k_2' = \left(\frac{d-1}{d+1} \frac{d+c}{d-c} \right)^{0.5}$$

поскольку на рассматриваемом отрезке $AD \omega = \varphi + i\psi_1, z_3 = x_3$.

Полагая в (1.11) $x_3 = -d$, что соответствует $\varphi = \varphi_c$, получим

$$-2\sigma_2 i = (\varphi_K - \varphi_c) [(d+1)(d-c)]^{0.5} / K(k_2') \quad (1.12)$$

Из соотношений (1.10), (1.12) при $z_3 = 1, \omega = \varphi_K + i\psi_2$ после ряда преобразований следует:

$$\psi_2 - \psi_1 = (\varphi_K - \varphi_c) \frac{K(k_2)}{K(k_2')}, \quad k_2 = \left(\frac{2d}{d+1} \frac{1-c}{d-c} \right)^{0.5} \quad (1.13)$$

Отсюда дебит скважины в круговой залежи с частично запечатанным контуром

определится формулой

$$q = 2(\psi_2 - \psi_1) = 2(\varphi_K - \varphi_C)K(k_2) / K(k_2') \quad (1.14)$$

Последняя зависимость может быть использована также для точных вычислений дебита кольцевой галереи, если под θ понимать половину центрального угла, под которым виден непроницаемый участок контура, а r_1 принять за радиус галереи.

Эллиптические интегралы первого рода табулированы [6, 7], что существенно упрощает численные расчеты. Используя эти таблицы, из выражения (1.9) находят величину модуля k_1 и параметра d , затем из соотношения (1.8) определяется значение c , после чего, определив, согласно (1.13), k_2 , рассчитывают величину дебита q .

Так как обычно r_0 порядка 10^{-4} и меньше, $\delta < 0.9 \div 0.95$, то $-\pi / \ln r_1$ мало; следовательно, модуль k_1 тоже мал, и, используя приближенные формулы для эллиптических интегралов первого рода [8, 9], из выражений (1.7) — (1.9) получим

$$k_1 = \frac{2d^{0.5}}{d+1} = 4r_1^{0.5}, \quad x_3 = \frac{d+1-2d \sin^2 \alpha_1/2}{2 \sin^2 \alpha_1/2 - (d+1)}, \quad c = \frac{d+1-2d \sin^2 \theta/2}{2 \sin^2 \theta/2 - (d+1)} \quad (1.15)$$

Зависимость (1.13) для модуля k_2 , после ряда несложных преобразований с учетом (1.7.2), (1.15.3), примет вид

$$k_2 = \frac{k_1 \cos \theta/2}{(1 - k_1^2 \sin^2 \theta/2)^{0.5}} \approx k_1 \cos \theta/2 \leq k_1 \quad (1.16)$$

При этом из соотношения (1.14) для дебита скважины, эксцентрично расположенной в круговой залежи с частично запечатанным контуром, получим окончательную формулу

$$q = 2\pi(\varphi_K - \varphi_C) / \ln \frac{1 - \delta^2}{r_0 \cos^2 \theta/2} \quad (1.17)$$

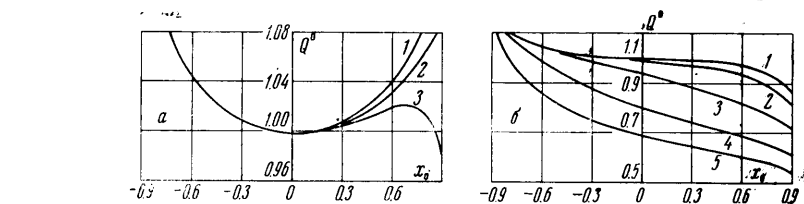
В частном случае $\beta = 0$ это выражение совпадает с известной формулой дебита эксцентричной скважины в пласте с круговым контуром питания [10]. В предельном случае $\beta = \pi$, согласно (1.4), (1.17), имеем $\theta = \pi$, $q = 0$.

Модуль k_2' близок к единице. Поэтому использованием приближенных формул для эллиптических

интегралов первого рода [8, 9] выражение (1.11), описывающее изменение потенциала вдоль запечатанной части, с учетом (1.12), (1.15) можно привести к виду

$$\frac{\varphi_K - \varphi}{\varphi_K - \varphi_C} = \frac{1}{K(k_2')} \ln \frac{\cos \alpha_1/2 + (\sin^2 \theta/2 - \sin^2 \alpha_1/2)^{0.5}}{\cos \theta/2} \quad (1.18)$$

На фиг. 2 представлены графики безразмерного дебита $Q^0(x_0, 0)$ (фиг. 2, а) и $Q^0(\delta, \alpha_0)$, где $\delta = 0.7$ и 0.9 (соответственно, пунктирные и сплошные линии фиг. 2, б). Расчеты велись по формуле (1.17) для скважины радиусом 0.1 м, расположенной в



Фиг. 2

залежи радиусом 5 км; причем за единицу принят дебит скважины в случае $\beta = 0$. Кривые 1—6 на фиг. 2, а рассчитаны, соответственно, для $2\beta = 30, 60, 90, 180, 300$ и 340° , а кривые 1—3 фиг. 2, б для $2\beta = 60, 90$ и 180° .

Из проведенных расчетов следует два вывода. Наличие сравнительно большого запечатанного участка контура залежи ($2\beta = 60 \div 120^\circ$) уменьшает на $10-30\%$ дебит скважины, расположенной в непосредственной близости, и мало влияет на дебит

скважины, удаленной от непроницаемого участка. Небольшое вскрытие запечатанного пласта обеспечивает при стационарной фильтрации жидкости возможность получения сравнительно высоких дебитов из одиночной скважины. Так, при вскрытии контура залежи на 5—6% дебит центральной скважины составит 70% дебита аналогичной скважины, расположенной в полностью распечатанном пласте.

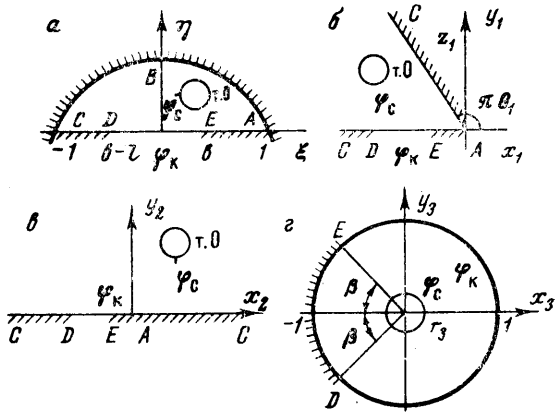
Эти выводы подтверждаются также расчетами, результаты которых представлены на фиг. 3, где за единицу принят дебит, определяемый по формуле Дююи. Кривые 1—3 фиг. 3, а рассчитаны соответственно для $2\beta = 10, 20, \text{ и } 30^\circ$, а кривые 1—5 фиг. 3, б — для $2\beta = 60, 90, 180, 300 \text{ и } 340^\circ$. Данные расчеты позволили выявить следующее обстоятельство: при малых величинах β абсолютное значение дебита скважины растет по мере приближения последней к непроницаемому участку контура по действительной оси. Необходимо отметить, что зависимость $Q^0(x_0, 0)$ при $\beta = 15^\circ$ осложняется наличием небольшого горба.

2. Дебит горизонтальной скважины в рифогенной залежи. Вертикальное сечение залежи массивного типа в первом приближении аппроксимируется

круговым сегментом (фиг. 4, а). Допустим, что некоторым образом удалось на отрезке абсцисс $[b-l, b]$ обеспечить гидродинамическую связь нефтяной залежи с активными подошвенными водами, присутствие которых предполагается. Пусть $\pi\theta_1$ — угол, образованный осью абсцисс ξ и касательной к дуге в точке А; r_0 — радиус горизонтальной дрены; φ_c и φ_k — потенциалы на контуре скважины и на вскрытой щели, соответственно; центр скважины расположен в точке $\theta, \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 = \delta e^{i\alpha_0}$.

При дробно-линейном отображении [11]

$$z_1 = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad (2.1)$$



Фиг. 4

образом кольцевого сегмента служит угол $\pi\theta_1 \leq \arg z_1 \leq \pi$ (фиг. 4, б), причем

$$z_{1E} = \frac{1-b}{1+b} e^{\pi i}, \quad z_{1D} = \frac{1-b+l}{1+b-l} e^{\pi i}, \quad z_{10} = \delta_1 e^{-i\alpha_0} \quad (2.2)$$

$$\delta_1 = \left(\frac{1 - 2\delta \cos \alpha_0 + \delta^2}{1 + 2\delta \cos \alpha_0 + \delta^2} \right)^{0.5}, \quad \alpha_1 = -\pi + \arctg \frac{\delta \sin \alpha_0}{1 - \delta \cos \alpha_0} + \arctg \frac{\delta \sin \alpha_0}{1 + \delta \cos \alpha_0}$$

$$r_1 = r_0 \left| \frac{dz_1}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} = \frac{2r_0}{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \alpha_0}$$

Согласно формуле Шварца — Кристоффеля [11], интеграл

$$z_1 = C_1 \int_0^{z_2} \frac{dz_2}{z_2^{\theta_1}} = C z_2^{1-\theta_1} \quad (2.3)$$

отображает верхнюю полуплоскость z_2 (фиг 4, в) на внутренность угла раствором $\pi(1-\theta_1)$ с вершиной в начале координат. Если принять $C = e^{i\pi\theta_1}$, то получим на плоскости z_1 исходный угол $\pi\theta_1 \leq \arg z_1 \leq \pi$.

Из выражений (2.2), (2.3) после некоторых преобразований следует:

$$z_{2E} = \rho_1 e^{\pi i}, \quad z_{2D} = \rho_2 e^{\pi i}, \quad z_{20} = \delta_2 e^{-i\alpha_0}, \quad \alpha_2 = \pi(\theta_1 + \alpha_1)$$

$$\kappa = \frac{1}{1-\theta_1}, \quad \rho_1 = \left(\frac{1-b}{1+b} \right)^\kappa, \quad \rho_2 = \left(\frac{1-b+l}{1+b-l} \right)^\kappa, \quad \delta_2 = \left(\frac{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \alpha_0}{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \alpha_0} \right)^{\kappa/2} \quad (2.4)$$

$$r_2 = r_1 \left| \frac{dz_2}{dz_1} \right|_{z_1=z_{10}} = \frac{2\kappa r_0}{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \alpha_0} \left(\frac{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \alpha_0}{1 + \delta^2 + 2\delta \cos \alpha_0} \right)^{\kappa\theta_1/2}$$

Дробно-линейной функцией [4]

$$z_3 = e^{i\gamma} \frac{z_2 - z_{20}}{z_2 - \bar{z}_{20}}, \quad \gamma = \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_1 + \delta_2 \cos \alpha_2} + \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_2 + \delta_2 \cos \alpha_2} \quad (2.5)$$

область фильтрации $\text{Im } z_2 \geq 0$ конформно отображается на единичный круг $|z_3| \leq 1$ (фиг. 4, з). При этом контуру исходной скважины будет соответствовать малый контур с центром в начале координат и радиусом

$$r_3 = r_2 \left| \frac{dz_3}{dz_2} \right|_{z_2=z_{20}} = \frac{\kappa r_0 [(1 + \delta^2)^2 - 4\delta^2 \cos^2 \alpha_0]^{-0.5}}{|\sin \kappa(\pi\theta_1 + \alpha_1)|} \quad (2.6)$$

Половина центрального угла, под которым виден вскрытый участок, определится выражением

$$\arg z_{3E} = -\arg z_{3D} = \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_2 + \delta_2 \cos \alpha_2} - \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_1 + \delta_2 \cos \alpha_2} \quad (2.7)$$

Обозначим через 2β угол, под которым виден непроницаемый участок контура $|z_3| = 1$. Для определения β получим соотношение

$$\beta = \pi + \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_1 + \delta_2 \cos \alpha_2} - \arctg \frac{\delta_2 \sin \alpha_2}{\rho_2 + \delta_2 \cos \alpha_2} \quad (2.8)$$

Таким образом, исходная задача определения дебита горизонтальной дрены в рифогенной залежи с частично вскрытым контуром сведена к определению дебита скважины радиусом r_3 в круговом пласте с частично запечатанным контуром и расчет дебита сводится к использованию полученных выше соотношений (1.8), (1.9), (1.13), (1.14). В большинстве практически интересных случаев можно использовать приближенную формулу (1.17).

Рассмотрим некоторые частные случаи данной задачи. Если принять $\theta_1 = 0$, то получим приток жидкости к скважине конечного радиуса r_0 в полуплоскости, когда на отрезке $[b - l, b]$ непроницаемой оси абсцисс поддерживается постоянный потенциал; причем без нарушения общности можно считать $b = 1, l = 2$. При $\beta = 0$ имеем приток к совершенной скважине в нефтеносном пласте в форме кругового сегмента. Случай $b = 1, l = 2$ представляет практический интерес применительно к заливообразным и висячим залежам, месторождениям (например, Гальча, расположенное в Средней Азии) с резким фациальным изменением пород и т. д.

На фиг. 5 представлены графики изменения безразмерного дебита Q^0 горизонтальной дрены радиусом 0.1 м в зависимости от ширины вскрытия l . Кривые 1-6 построены, соответственно, для $b = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$ и 0. За единицу дебита принят дебит дрены в полностью распечатанном пласте ($\beta = 0$). Расчеты велись для рифогенной залежи с максимальной мощностью 600 м и длиной хорды 4 км, дренируемой скважиной с центром в точке $\zeta_0 = 0.25e^{\pi i/2}$.

Из проведенных расчетов следует: небольшое вскрытие рифогенной залежи обеспечивает сравнительно высокий дебит единичной скважины; в зависимости от положения вскрытой части пласта b существует некоторая оптимальная ширина вскрытия l и при дальнейшем увеличении l не наблюдается существенного прироста дебита дрены.

3. Дебит скважины в залежах с тектоническими нарушениями. Пусть залежь нефти имеет форму кругового сегмента (фиг. 4, а); на дуге ABC поддерживается постоянный потенциал φ_k , а хорда AC непроницаема.

Методом последовательных конформных отображений данная задача сводится к случаю притока жидкости к скважине в круговом пласте. Радиус скважины в преобразованном пласте определится соотношением (2.6). Для $\beta = 0$ — половины центрального угла, под которым видна непроницаемая часть $|z_3| = 1$, из выражений (2.7), (2.4), приняв $b = 1, l = 2$, получим

$$\beta = 2\pi n - \alpha_2 = 2\pi n - \frac{\pi\theta_1 + \alpha_1}{1 - \theta_1} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (3.1)$$

В дальнейшем определение дебита сводится к использованию формулы (1.14) или (1.17). В частном случае $\theta_1 = 1/2$, $\alpha_0 = \pi/2$ из (1.17) после ряда преобразований следует:

$$q = 2\pi(\varphi_k - \varphi_c) / \ln \frac{1 - \delta^4}{2\delta r_0} \quad (3.2)$$

Выражение (3.2), полученное ранее [1], представляет дебит скважины, когда круговая залежь эксплуатируется батареей из двух скважин [10].

Поступило 10 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я. О притоке жидкости к скважинам в неоднородной среде. Докл. АН СССР, 1942, т. 34, № 2.
2. Щелкачев В. И., Пыхачев Г. Б. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. АзГОНТИ, 1939.
3. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. «Недра», 1966.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд-во «Наука», 1965.
5. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостехиздат, 1963.
6. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд-во АН СССР, 1948.
7. Беляков В. М., Кравцова Р. И., Рапопорт М. Г. Таблицы эллиптических интегралов, т. 1, 2. Изд-во АН СССР, 1963.
8. Журковский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. Изд-во АН СССР, 1941.
9. Сикорский Ю. С. Элементы теорий эллиптических функций с приложениями к механике. Гл. ред. общетехнич. лит-ры и номогр., 1936.
10. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
11. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. Изд-во иностран. лит., 1963.

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР СЕМИНАРЫ¹

Общий семинар Института проблем механики под руководством А. Ю. Ишлинского и Г. И. Баренблатга

Сорок второе заседание 30 XI 1967 г. Г. К. Пожарицкий (Москва). *Импульсные дифференциальные игры преследования**.

Сорок третье заседание 14 XII 1967 г. Л. М. Письмен (Москва). *Гидродинамика и процессы переноса в реакторах с зернистым слоем. Устойчивость химических реакций.*

Каталитический реактор представляет собой трубу, заполненную пористыми «зернами» катализатора, в которой движется поток реагирующих веществ, и реакция происходит как на наружной поверхности зерна, так и — в основном — на поверхности пор. Распределение концентрации и температуры внутри зерен описывается уравнениями теплопроводности и диффузии с источниками, а обмен с окружающим потоком происходит по закону Ньютона. В результате того, что разогрев сильно интенсифицирует реакцию, а она, в свою очередь, сопровождается выделением тепла, элементарный процесс в одном зерне может идти в нескольких стационарных режимах, а суммарная средняя скорость реакции в зерне может оказаться выше, чем скорость реакции, определяемая по условиям на поверхности.

Исследуя закономерности порождения новых стационарных решений при бифуркации стационарных состояний с изменением параметра, можно установить условия устойчивости и неустойчивости отдельных стационарных состояний.

Рассматривая одномерную модель зерна в виде плоской пластинки, можно обследовать существование, наряду с несколькими симметричными, также и несимметричных стационарных режимов.

¹ Содержание докладов, отмеченных звездочкой, см. в журнале «Механика твердого тела».