

## ОБ ЭФФЕКТЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСТАНОВИВШИХСЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ

А. И. ЛЕОНОВ, А. Я. МАЛКИН

(Москва)

Возникновение так называемых «нормальных напряжений» (эффект Вейссенберга) при сдвиговом течении вязко-упругих жидкостей, в частности расплавов полимеров, представляет одно из наиболее своеобразных явлений, происходящих при деформировании этих систем. Качественно возникновение нормальных напряжений описывалось в ряде механических теорий, в которых их природа связывалась с возможностью больших упругих деформаций (см. [1]). В связи с установлением факта существования универсальных характеристик вязко-упругих свойств расплавов полимеров [2] и построением теории тиксотропии этих систем [3] появилась возможность количественного описания эффекта Вейссенберга.

Можно предложить два независимых подхода к количественному описанию обсуждаемого эффекта. Первый основан на использовании метода аналогий между динамическими и статическими (т. е. измеряемыми в условиях установившегося течения) свойствами расплавов полимеров; второй использует результаты тиксотропной теории вязко-упругости. В обоих случаях количественные расчеты основываются на использовании универсальных характеристик вязко-упругих свойств расплавов полимеров, найденных в работе [2]. Эффект Вейссенберга заключается в том, что при течении в условиях простого сдвига возникают напряжения  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$  и  $\tau_{33}$ . Задача состоит в отыскании зависимости напряжений от градиента скорости  $\dot{\gamma}_0 = dv_1/dx_2$ . Здесь  $x_1$  — координата, отсчитываемая вдоль потока,  $x$  — поперечная координата,

1. Известным экспериментальным фактом является аналогия между зависимостями эффективной вязкости от градиента скорости  $\eta(\dot{\gamma}_0)$  и действительной части динамической вязкости от частоты  $\eta'(\omega)$ . Как впервые указывалось в работе [4], этот результат получается как частный случай при использовании нелинейных операторов, заменяющих операцию частного дифференцирования по времени в уравнении деформации упруго-вязкого тела. Запишем это уравнение в виде

$$\left(1 + \sum_{m=1}^M a_m D^m\right) \tau_{ij} = 2\eta_0 \left(1 + \sum_{m=1}^M b_m D^m\right) \dot{\gamma}_{ij} \quad (1.1)$$

$$\left(2\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь  $\tau_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $a_m$ ,  $b_m$  — константы,  $M$  и  $N$  — число членов сумм — определяются выбранным числом параметров, описывающих индивидуальные свойства системы, но для настоящего рассмотрения величины  $M$  и  $N$  несущественны.

Оператор  $D$  представляет некоторый нелинейный оператор. Известны два типа таких операторов, предложенных для описания поведения упруго-вязких тел. Первый — это оператор  $D_v$  Де-Витта-Яуманна, имеющий вид [5]

$$D_v b_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} - \omega_{i\alpha} b_{\alpha j} + b_{i\alpha} \omega_{\alpha j} \quad \left(2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (1.2)$$

Второй нелинейный оператор Олдройда  $D_0$ , подробно рассмотренный в работе [4]. Его вид

$$D_0 b_{ij} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} - b_{kj} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - b_{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{2}{3} b_{mn} \dot{\gamma}_{mn} \delta_{ij} \quad (1.3)$$

Использование (1.1) с учетом (1.2) для анализа двух типов сдвиговых деформаций — стационарного течения со скоростью сдвига  $\dot{\gamma}$  и гармонических колебаний с малой амплитудой и частотой  $\omega$  — приводит к следующим выражениям:

$$\frac{\eta(\dot{\gamma}_0)}{\eta_0} = \frac{PR + QS}{R^2 + S^2}, \quad \frac{\eta'(\omega)}{\eta_0} = \frac{PR + QS}{R^2 + S^2}, \quad \frac{\eta''(\omega)}{\eta_0} = \frac{PS - QR}{R^2 + S^2} \quad (1.4)$$

При этом нормальные напряжения будут связаны следующими соотношениями

$$\tau_{22} = -\tau_{11} = \frac{PS - QR}{R^2 + S^2} \eta_0 \dot{\gamma}_0, \quad \tau_{33} = 0, \quad \tau_{22} - \tau_{11} = 2\tau_{22}$$

В равенствах (1.4)

$$P = \sum_{n=0}^N (-1)^n b_{2n} \omega^{2n}, \quad Q = \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} b_{2n-1} \omega^{2n-1}$$

$$R = \sum_{n=0}^M (-1)^n a_{2n} \omega^{2n}, \quad S = \sum_{n=1}^M (-1)^{n-1} a_{2n-1} \omega^{2n-1}$$

Здесь  $\eta_0$  — наибольшая ньютоновская вязкость,  $\eta(\dot{\gamma})$  — неньютоновская (эффективная) вязкость,  $\eta'(\omega)$  и  $\eta''(\omega)$  соответственно действительная и мнимая части комплексной динамической вязкости. В случае когда  $\dot{\gamma} = \omega$ , из (1.4) следует

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta'(\omega), \quad \tau_{22} = \eta''(\omega) \omega = G'(\omega) \tag{1.5}$$

Здесь  $G'$  действительная часть комплексного динамического модуля упругости при сдвиге.

Очень близкие результаты получаются при замене (1.2) в уравнении (1.1) на (1.3). Как было показано в [4], в этом случае формулы для  $\eta'(\omega)$  и  $\eta''(\omega)$  останутся без изменений, что вполне естественно, так как при анализе динамических функций ( $\eta', \eta'', G', G''$ ) имеем дело по существу с линейризованным уравнением (1.1); выражения для статических функций ( $\tau_{ik}(\dot{\gamma}), \eta(\dot{\gamma})$ ) также не изменяются (хотя изменятся соотношения между диагональными компонентами тензора напряжений), но во всех случаях и, в частности, в функциях  $P, Q, R$  и  $S$  вместо  $\omega = \dot{\gamma}_0$  должно выполняться условие  $\omega = \sqrt{2/3} \dot{\gamma}_0$ . Соотношения между  $\tau_{11}, \tau_{22}$  и  $\tau_{33}$  имеют вид

$$\tau_{22} = \tau_{33}, \quad \tau_{11} = -2\tau_{22}, \quad \tau_{22} - \tau_{11} = 3\tau_{22}$$

Тогда формулы (1.5) заменятся

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta'(a\omega), \quad \tau_{22}(\dot{\gamma}) = a\dot{\gamma}_0 \eta''(a\dot{\gamma}_0) = G'(a\dot{\gamma}_0)$$

$$a = \sqrt{2/3} \tag{1.6}$$

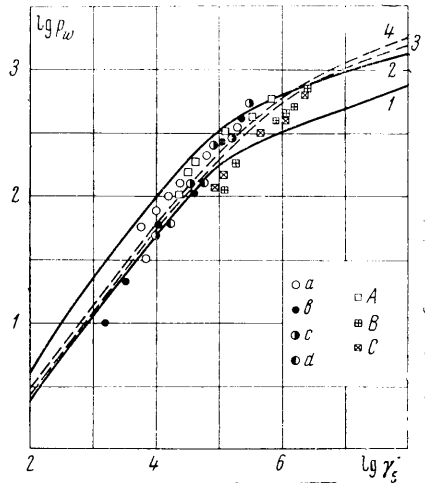
Значения динамических функций для расплавов полимеров были определены в работе [6]. Тогда, используя (1.5) или (1.6), можно вычислить универсальную по крайней мере по отношению к расплавам линейных полимеров температурно-инвариантную зависимость нормальных напряжений от скорости сдвига. Так как аргументы ( $\omega$  и  $\dot{\gamma}$ ) в работах [2, 6] были пронормированы по наибольшей ньютоновской вязкости ( $\eta_0$ ), то в настоящем рассмотрении используется такая же нормировка. Вообще в дальнейшем при проведении конкретных расчетов будут использоваться только нормированные значения соответствующих величин, что специально больше оговариваться не будет.

На фиг. 1 пунктиром представлены результаты расчета величины  $|\tau_{22} - \tau_{11}|$ , которая в дальнейшем будет обозначаться как  $P_w$  для обоих рассмотренных случаев. Кривая 3 построена согласно формуле

$$P_w(\dot{\gamma}) = 2G'(\omega), \quad \dot{\gamma} = \omega \tag{1.7}$$

а кривая 4 согласно формуле

$$P_w(\dot{\gamma}) = 3G'(\omega), \quad \dot{\gamma} = \sqrt{3/2} \omega \tag{1.8}$$



Фиг. 1. Результаты расчета нормальных напряжений. 1 — по теории тиксотропии с  $a = 1$ ; 2 — по теории тиксотропии с  $a = 4$ ; 3 — с использованием оператора Де-Витта-Нуманна; 4 — с использованием нелинейного оператора Олдройда. Экспериментальные данные: полидиметилсилоксаны, по данным работы [9], у которых  $\eta_0$  равны  $a - 2.6 \cdot 10^3$ ;  $b - 1.12 \cdot 10^3$ ;  $c - 1 \cdot 10^3$ ;  $d - 1.65 \cdot 10^2$ ; полиэтилены, по данным работы [10], обозначаемые как A, B, C

2. Рассмотрим теперь соотношения для нормальных напряжений для одномерного сдвигового течения расплава полимера, исходя из теории тиксотропии упруго-вязких сред [3]. Общие соотношения теории имеют вид

$$\tau^{ik} = 2 \int_s^\infty N(s) ds \int_{-\infty}^t e^{-s(t-t')} \frac{\partial x^i}{\partial x'^n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \dot{\gamma}^{mn}(x^j, t') dt'$$

$$\varphi(S) = \sqrt{2} S \int_{-\infty}^t \dot{\Gamma}(x^j, t') e^{-S(t)(t-t')} dt' \quad (2.1)$$

$$\tau^{ik} = p^{ik} + g^{ik} p, \quad \dot{\Gamma} = (\dot{\gamma}^{mn} \dot{\gamma}_{mn})^{1/2}, \quad 2\dot{\gamma}_{mn} = \nabla_m v_n + \nabla_n v_m$$

Здесь  $\dot{\Gamma}$  — квадратичный инвариант тензора скоростей деформации,  $g^{ik}$  — компоненты фундаментального метрического тензора,  $p$  — изотропное (термодинамическое) давление,  $x'^i$  — функции смещения, удовлетворяющие уравнениям с условиями Коши

$$\frac{\partial x'^k}{\partial t} + v^k \frac{\partial x'^k}{\partial x^k} = 0, \quad x'^k(x^i, t, t')|_{t=t'} = x^k \quad (2.2)$$

Реологические уравнения (2.1) надлежит решать совместно с уравнениями изменения импульсов и уравнением неразрывности

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^k \nabla_k \right) v^i = F^i + \nabla_k p^{ki}, \quad \nabla_k v^k = 0 \quad (2.3)$$

В первом уравнении (2.1)  $N(s)$  — функция распределения релаксационных частот, которая, согласно [2], выражается так:

$$N(s) = \begin{cases} 2.24 \cdot 10^{-3} s^{0.4} & (0 \leq s \leq 4.68 \cdot 10^4) \\ 0.166 & (4.68 \cdot 10^4 \leq s \leq 3.8 \cdot 10^5) \\ 7.1 \cdot 10^{-2} s^{-0.65} & (3.8 \cdot 10^5 \leq s < \infty) \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь функция  $N(s)$  нормирована на значение наибольшей ньютоновской вязкости  $\eta_0$ , а  $s$  — приведенная релаксационная частота. Функция тиксотропии  $\varphi(S)$ , определяющая собой изменение релаксационного спектра (функцию  $N(s)$ ), согласно результатам работы [8], может быть принята в первом приближении линейной:  $\varphi(S) = aS$ ; где  $a$  — некоторая константа.

Для случая простого сдвига стационарные соотношения теории были получены в работе [3]. Эти формулы имеют вид (в приведенных переменных)

$$\tau_{12} = \eta(\dot{\gamma}_0) \dot{\gamma}_0, \quad \varphi(S_0) = aS_0 = \dot{\gamma}_0, \quad \tau_{22} = \tau_{33} = 0, \quad \tau_{11} = 2(\dot{\gamma}_0)^2 \int_{S_0}^\infty N(s) \frac{ds}{s^2} \quad (2.5)$$

Величина  $\tau_{11}$  определяет эффект нормальных напряжений и равна, как это следует из (2.5), величине  $P_w$ . Подставляя (2.4) в первое выражение (2.1) и проводя интегрирование, получим выражение для  $P_w$ , зависимость которого от приведенной скорости сдвига  $\dot{\gamma}$  для двух значений параметра  $a$  ( $a = 1$  и  $a = 4$ ), приведена на фиг. 1. К сожалению, в настоящее время известно очень мало прямых измерений нормальных напряжений в расплавах полимеров. На фиг. 1, в сравнении с указанными выше расчетными кривыми, представлены экспериментальные данные работы [9] по полидиметилсилаксанам разного молекулярного веса и работы [10] по полиэтиленам, в которой, однако, получены данные не по установленным значениям нормальных напряжений, а по максимальным их значениям, что затрудняет сопоставление с расчетными данными. Как видно на фиг. 1, экспериментальные данные в целом неплохо коррелируют с результатами расчетов. Применительно к теории тиксотропии сопоставление указывает на то, что функцию тиксотропии в достаточно широком диапазоне приведенных частот нельзя описывать линейной аппроксимацией, что, однако, будет делаться в дальнейшем только с целью упрощения расчетов, претендуя не более чем на полуколичественное согласие теории с экспериментом. С другой стороны, как это видно из фиг. 1, использование операторов Олдройда или Де-Витта-Яуманна практически равноценно и приводит к хорошим результатам во всем исследованном диапазоне скоростей сдвига. Отсюда следует, в частности, что соотношение между динамическим модулем и нормальными напряжениями, можно принимать как это предсказывается формулой (1.7).

3. Рассмотрим теперь стационарное течение упруго-вязкой тиксотропной среды в зазоре между неограниченными параллельными дисками, отстоящими один от другого на расстоянии  $h$ . Пусть нижний диск неподвижен, а верхний вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  «физические» компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформации имеют вид

$$\begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\varphi = \omega r z / h, \quad v_z = 0, \quad \dot{\gamma}_{rr} = 0, \quad \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = 0, \\ \dot{\gamma}_{zz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\varphi} = 0, \quad \dot{\gamma}_{rz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{\varphi z} = \omega_0 r / (2h) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции смещения  $x'^i$  легко определяются из уравнений (2.2) (в которые входят контравариантные компоненты вектора скорости) и имеют вид

$$r' \equiv r, \quad \varphi' = \varphi - (\omega z / h)(t - t'), \quad z' \equiv z \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в первое выражение (2.1) с учетом известных соотношений между «физическими» и контравариантными компонентами тензоров в цилиндрических координатах, получаем при  $t \rightarrow \infty$  выражения для «физических» компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned} p_{22} = -p, \quad p_{\varphi\varphi} = -p + 2\Omega^2 \int_{\Omega/a}^{\infty} N(s) \frac{ds}{s^2} \\ p_{zz} = -p, \quad p_{r\varphi} = 0, \quad p_{rz} = 0 \quad (3.3) \\ p_{\varphi z} = \Omega \int_{\Omega/a}^{\infty} N(s) \frac{ds}{s} \quad \left( \Omega = \frac{\omega_0 r}{h} \right) \end{aligned}$$

Величина  $|p_{rr} - p_{\varphi\varphi}| = |p_{zz} - p_{\varphi\varphi}| = P_w$  представлена на фиг. 1.

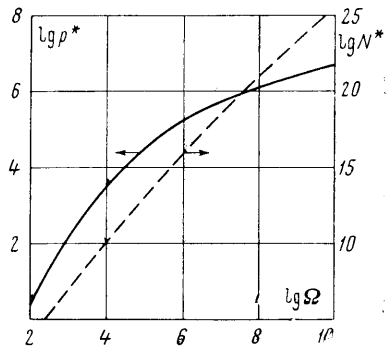
Рассмотрим теперь влияние нормальных напряжений на гидродинамическое давление  $p$ . Уравнения изменения импульсов (2.3) в пренебрежении массовыми силами и квадратичными членами инерции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = 2 \left( \frac{\omega_0}{h} \right)^2 r \int_{\Omega/a}^{\infty} N(s) \frac{ds}{s^2} \\ \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Интегрирование первого выражения (3.4) с учетом выражения (2.4) и значения  $\Omega$  из (3.3) дает выражение для распределения гидродинамического давления, которое в двойных логарифмических координатах представлено на фиг. 2 сплошной линией. Здесь по оси абсцисс отложен логарифм величины  $\Omega = \omega r / h$ , а по левой оси ординат — логарифм величины  $p^* = p - p_0$ . Величина  $p_0$  определяется из естественного граничного условия:  $p = 0$  при  $r = R$ , где  $R$  — радиус свободной поверхности образца, помещенного между дисками. На этой же фигуре пунктиром показана величина приведенной осевой силы  $N^*$ , рассчитанной по формуле

$$N^* = \frac{N\Omega^2}{2\pi h^2}, \quad N = 2\pi \int_0^R r p dr \quad (3.5)$$

Для этой зависимости  $R$  играет роль граничного радиуса диска. Заметим, что учет центробежных сил в распределении давления может привести к появлению вторичного течения, представляющему хорошо известный экспериментальный факт «выползания» расплава полимеров из зазора по вращающейся поверхности. Сплошной график на фиг. 2 позволяет дать некоторые оценки давлений, возникающих в аппарате типа бесшнекового экструдера, нашедшего некоторое распространение в промышленности переработки пластмасс. Так, если  $\eta_0 = 10^9 \text{ нз}$ ,  $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$  ( $n \approx 100 \text{ об/мин}$ ) и  $R/h = 25$ , то, согласно фиг. 2, давление в центре между дисками составляет около 2,5 атм. По-видимому, это значение по порядку достаточно близко к верхнему пределу ожидаемых давлений; ожидаемое в бесшнековом экструдере давление значительно меньше, чем реализуемое в практике экструзии или литья под давлением.



Фиг. 2. Распределение давления и зависимость осевого усилия от радиуса диска для случая окружного течения между двумя параллельными дисками

4. Исследуем стационарное течение упруго-вязкой тиксотропной среды в зазоре, образованном конической и плоской поверхностями, как это имеет место в ротационном вискозиметре конус — плоскость. В сферической системе координат  $r, \varphi, \theta$  «физические» компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформации имеют вид

$$\begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = r \sin \theta \omega(\theta) \\ \dot{\gamma}_{rr} = \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = \dot{\gamma}_{\theta\theta} = \dot{\gamma}_{r\varphi} = \dot{\gamma}_{r\theta} = 0 \\ 2\dot{\gamma}_{\varphi\theta} = \omega'(\theta) \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $\omega(\theta)$  — переменная угловая скорость в зазоре. Функции смещения, определенные по уравнениям (2.2) имеют вид

$$r' = r, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi - \omega(\theta)(t - t') \quad (4.2)$$

Подставляя (4.1) и (4.2) в первое выражение (2.1), получим для «физических» компонент тензора напряжений выражения

$$\begin{aligned} p_{\varphi\varphi} = -p + 2[\omega'(\theta) \sin \theta]^2 \int_{\kappa}^{\infty} \frac{N(s)}{s^2} ds \\ p_{rr} = p_{\theta\theta} = -p, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = 0 \\ \tau_{\varphi\theta} = \omega'(\theta) \sin \theta \int_{\kappa}^{\infty} \frac{N(s)}{s^2} ds, \quad \kappa = \varphi^{-1}[\omega'(\theta) \sin \theta] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения изменения импульсов для данного случая принимают вид

$$\begin{aligned} -\rho \dot{r}' + \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{p_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho \frac{v_\varphi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\tau_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.3) — (4.4) может быть приближенно проинтегрирована, если пренебречь квадратичными членами инерции и рассматривать лишь практически интересный случай малого угла  $\delta$  между образующей конуса и плоскостью. В этом случае равенства (4.3) примут вид

$$\begin{aligned} p_{\varphi\varphi} = -p + 2 \left( \frac{\omega_0}{\delta} \right)^2 \int_{\kappa_0}^{\infty} \frac{N(s)}{s^2} ds \quad \left( \kappa_0 = \varphi^{-1} \left( \frac{\omega_0}{\delta} \right) \right) \\ p_{rr} = p_{\theta\theta} = -p, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = 0 \\ \tau_{\varphi\theta} = \frac{\omega_0}{\delta} \int_{\kappa_0}^{\infty} \frac{N(s)}{s} ds \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\omega_0$  — относительная угловая скорость вращения пары диск — конус.

Интегрирование первого уравнения (4.4) при этих условиях с учетом  $p = 0$  при  $r = R$  (где  $R$  — радиус диска) дает

$$p = \tau_{\varphi\varphi} \ln(R/r) \quad (\tau_{\varphi\varphi} = P_w) \quad (4.6)$$

Здесь  $P_w$  — величина нормального (вейссенбергова) напряжения, определенная по формуле (2.5) и представленная на фиг. 1, при значении скорости сдвига  $\dot{\gamma} = \omega_0/\delta$ . Величина осевого усилия, подсчитанная по формуле (3.5), имеет вид

$$N = \frac{\pi R^2}{2} P_w$$

Отметим также, что учет инерции приводит здесь к таким же явлениям, как и в приборе типа диск — диск.

5. В заключение рассмотрим стационарное пуазейлево течение в неограниченной круглой трубе упруго-вязкой тиксотропной среды. В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  «физические» компоненты вектора скорости и тензора скоростей деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = u(r), \quad \dot{\gamma}_{rz} = \dot{\gamma}'_0, \quad (\dot{\gamma}'_0 = du/dz) \\ \dot{\gamma}_{zz} = 0, \quad \dot{\gamma}_{rr} = 0, \quad \dot{\gamma}_{\varphi\varphi} = 0, \quad \dot{\gamma}'_{\varphi z} = 0, \quad \dot{\gamma}'_{r\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $u(r)$  — продольная компонента вектора скорости. Определенные из уравнений (2.2) функции смещения имеют вид

$$r' = r, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z - u(r) (t - t') \quad (5.2)$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в первое выражение (2.1), получим для физических компонент тензора напряжений выражение

$$p_{zz} = -p + 2\gamma_0'^2 \int_{\gamma_0'/a}^{\infty} \frac{N(s)}{s^2} ds, \quad p_{rz} = \gamma_0' \int_{\gamma_0'/a}^{\infty} \frac{N(s)}{s} ds$$

$$p_{rr} = p_{\varphi\varphi} = p_{\varphi z} = p_{r\varphi} = 0 \quad (5.3)$$

Уравнение стационарного движения имеет вид

$$-P = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r p_{rz}), \quad P = -\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}$$

Отсюда следует, что

$$p_{rz} = -Pr/2 \quad (5.4)$$

Здесь  $P$  — продольный градиент давления.

Система уравнений (5.3) — (5.4) позволяет в принципе решить задачу об определении поля скоростей и напряжений в рассматриваемом случае течения тиксотропной среды с учетом обычных условий прилипания. Однако если проводить вычисления во всем диапазоне скоростей сдвига, то аналитическое представление результатов расчета затруднено. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением асимптотического случая достаточно больших скоростей и напряжений сдвига, когда, как это следует из выражений (2.4) и (5.3), почти по всему радиусу трубы справедлив так называемый «степенной закон» течения. Если  $\gamma_0' \geq 3,8 \cdot 10^5$ , то получим

$$P_w(r) = p_{zz} + p = 8,6 \cdot 10^2 a \gamma_0'^{0,35}, \quad \tau(r) = |p_{rz}| = 1,09 \cdot 10^3 \cdot \gamma_0'^{0,35} = Pr/2 \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что распределение нормальных напряжений по радиусу трубы с точностью до постоянного множителя совпадает с распределением касательных напряжений и имеет вид

$$P_w(r) = 0,4aPr = 0,8a\tau(r) \quad (5.6)$$

Заметим, что выражение (5.6) справедливо всюду, за исключением некоторой окрестности  $r = 0$ . Судя по количественным результатам работы [2], это справедливо при  $\tau > 2 \cdot 10^5$  или когда приведенные скорости сдвига больше  $10^6$  *дин/см<sup>2</sup>*. Точность приведенных выражений тем выше, чем больше скорости сдвига или напряжения сдвига.

Авторы благодарны Г. В. Виноградову и Г. И. Баренблатту за постоянный интерес к работе и ее обсуждение.

Поступило 22 V 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин Н. И. К вопросу об эффекте Вейссенберга. Коллоидный ж., 1960, т. 22, № 2.
2. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реологические свойства полимеров в текучем состоянии. ПМТФ, 1964, № 5.
3. Леонов А. И. Теория тиксотропии упруго-вязких сред с непрерывным распределением времен релаксации. ПМТФ, 1964, № 4.
4. Spriggs T. W., Bird R. B. Some nonlinear viscoelastic models with inclusion of results from molecular theory. Industr. and Engng. Chem. Fundamentals, 1965, vol. 4, No. 2.
5. De Witt T. W. A. Rheological Equation of State with Predicts Non — Newtonian Viscosity, Normal Stresses and Dynamic Moduli, J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 7.
6. Малкин А. Я., Яновский Ю. Г., Виноградов Г. В. Универсальность температурно-инвариантной характеристики динамических свойств линейных полимеров в текучем состоянии. Высокомолекуляр. соединения, 1965, т. 7, № 7.
7. Виноградов Г. В., Малкин А. Я., Прозоровская Н. В., Каргин В. А. Реология полимеров. Об универсальности температурно-инвариантной характеристики вязкости полимерных систем. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4.
8. Леонов А. И., Малкин А. Я. Об экспериментальной проверке теории тиксотропии упруго-вязких полимерных сред, ПМТФ, 1965, № 4.
9. Benbow J. J., Howells E. R., Normal Stress, Shear Recovery and Viscosity in Polydimethyl Siloxanes. Polymer, 1961, vol. 2, No. 4.
10. King R. G., A Rheological measurements of three polyethylene melts. Rheol. Acta, 1966, vol. 5, No. 1.