ЛУЧИСТЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ ИЗЛУЧАЮЩЕГО, ПОГЛОЩАЮЩЕГО И РАССЕИВАЮЩЕГО ГАЗА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСЕ РАССЕЯНИЯ

В. И. ПОЛЯКОВ, А. Н. РУМЫНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается задача о лучистом теплообмене между плоскопараллельным слоем газа, излучающим и рассеивающим лучистую энергию, и твердыми поверхностями, ограничивающими его с одной или с двух сторон. Температура газа может иметь произвольный профиль, допускающий на границе со стенками разрывы.

Эта задача решалась в ряде работ, например [1-3] численно.

В данной работе в рамках усредненных уравнений переноса радиации по направлениям получено аналитическое решение этой задачи при произвольной индикатрисе рассеяния (в предположении равенства температуры газа и рассеивающих частиц). Исследованы некоторые случаи, выяснены отдельные особенности лучистого теплообмена, обусловленные рассеянием лучистой энергии. Получены расчетные формулы, позволяющие рассчитывать лучистые тепловые потоки в ряде прикладных задач, в частности, при течении высокотемпературных газовых смесей, содержащих частицы окислов металлов или другие рассеивающие аэрозоли.

1. Лучистый поток через элементарную площадку равен

$$H = \int_0^\infty H_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\lambda \cos\theta \, d\Omega \, d\lambda \tag{1.1}$$

Здесь λ — длина волны; H — интегральный лучистый поток; $H_\lambda d\lambda$, $I_\lambda d\lambda$ — лучистый поток и, соответственно, интенсивность излучения в интервале длин волн $(\lambda, \lambda + d\lambda)$; θ — угол между нормалью к стенке z и лучом; Ω — телесный угол.

В сферической системе координат (z, θ, φ) выражение (1.1) можно представить так:

$$H_\lambda = \int_{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\lambda \cos\theta \sin\theta \, d\theta \tag{1.2}$$

Для определения интенсивности I_λ нужно решать уравнение переноса лучистой энергии, которое в общем случае имеет вид:

$$\cos\theta \frac{\partial I_\lambda(l)}{\partial z} = -\rho(\alpha_\lambda + \sigma_\lambda) I_\lambda(l) + \rho\alpha_\lambda B_\lambda + \frac{\rho\sigma_\lambda}{4\pi} \int_{4\pi} I(l') x_\lambda(\beta) \, d\Omega' \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность газа, α_λ и σ_λ — массовые коэффициенты поглощения и рассеяния, $B_\lambda(T)$ — функция Планка, T — температура, $x(\beta)$ — индикатриса рассеяния, β — угол между падающим лучом l' и рассеянным l.

Граничные условия для уравнения (1.3)

$$I_{\lambda 1}(l) = \varepsilon_{\lambda w} B_{\lambda w} - \frac{1 - \varepsilon_{\lambda w}}{\pi} \int_{-2\pi} I_{\lambda 2}(l') \cos\theta' x_{\lambda w}(l', l) \, d\Omega' \quad (z = 0) \tag{1.4}$$

$$I_{\lambda 2}(l) = \varepsilon_{\lambda w} B_{\lambda w} + \frac{1 - \varepsilon_{\lambda w}}{\pi} \int_{2\pi} I_{\lambda 1}(l') \cos\theta' x_{\lambda w}(l', l) \, d\Omega' \quad (z = \delta) \tag{1.5}$$

$$B_{\lambda w} = B_\lambda(T_w) \qquad \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} x(l' \; l) \cos\theta \, d\Omega = 1$$

Здесь $I_{\lambda 1}$, $I_{\lambda 2}$ — интенсивность лучей при $\theta < 1/2\pi$ и $\theta > 1/2\pi$, соответственно, $\varepsilon_{\lambda w}$ — степень черноты стенок, δ — геометрическая толщина слоя газа, $x_{\lambda w}(l', l)$ — индикатриса отражения стенок.

При написании граничных условий (1.4), (1.5) предполагалось, что стенки имеют одинаковую температуру T_w и степень черноты ε_w, однако решение при различных температурах T_{w1}, T_{w2} и степенях черноты ε_{w1}, ε_{w2} принципиально ничем не отличается от изложенного ниже при $T_{w1} = T_{w2} = T_w$, $\varepsilon_{w1} = \varepsilon_{w2} = \varepsilon_w$.

Заметим, что задача для полубесконечного слоя газа, для которого $\lim T = T_\infty$ при $z \to \infty$, решается аналогично поставленной здесь с той лишь разницей, что вместо граничного условия (1.5) нужно использовать условие

$$I_{\lambda 1} = I_{\lambda 2} = B_\infty = B_\lambda(T_\infty) \qquad (z = \infty) \tag{1.6}$$

Решение для полубесконечного слоя ниже получено из решения задачи для конечного слоя посредством предельного перехода при $\delta \to \infty$.

2. Будем искать лучистый поток (уравнение (1.1)), используя усреднение Эддингтона [4]. Интегрируя уравнение (1.3) по всем направлениям, получим

$$\frac{dH_\lambda}{d\tau_\lambda} = 4\pi\gamma_\lambda B_\lambda - \gamma_\lambda c \varepsilon_{R\lambda} \tag{2.1}$$

Здесь τ_λ — оптическая толщина, $\varepsilon_{R\lambda}$ — плотность лучистой энергии, c — скорость света

$$\tau_\lambda = \int_0^z \rho(\alpha_\lambda + \sigma_\lambda)\,dz, \qquad \varepsilon_{R\lambda} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\lambda\,d\Omega, \qquad \gamma_\lambda = \frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\lambda + \sigma_\lambda} \tag{2.2}$$

Умножая обе части уравнения (1.3) на $\cos\theta$, можно получить второе уравнение

$$\frac{dcP_{R\lambda}}{d\tau_\lambda} = -H_\lambda + \frac{1-\gamma_\lambda}{4\pi}\int_{4\pi} I_\lambda(l')\int_{4\pi} x_\lambda(\beta)\cos\theta\,d\Omega\,d\Omega' \tag{2.3}$$

Здесь $P_{R\lambda}$ — радиационное давление

$$P_{R\lambda} = \frac{1}{c}\int_{4\pi} I_\lambda \cos^2\theta\,d\Omega \tag{2.4}$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части уравнения (2.3), перейдем от системы координат (z, θ, φ) к системе координат (l', β, φ'), в которой

$$\cos\theta = \cos\beta\cos\theta' + \sin\beta\sin\theta'\cos(\varphi' - \varphi_1') \tag{2.5}$$

Тогда

$$\int_{4\pi} x(\beta)\cos\theta\,d\Omega = 2\pi\cos\theta'\int_0^\pi x(\beta)\sin\beta\cos\beta\,d\beta \tag{2.6}$$

а уравнение (2.3) перейдет в следующее:

$$\frac{dcP_{R\lambda}}{d\tau_\lambda} = -H_\lambda + (1-\gamma_\lambda)\Gamma_\lambda H_\lambda, \qquad \Gamma_\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\pi x_\lambda(\beta)\cos\beta\sin\beta\,d\beta \tag{2.7}$$

Усреднение Эддингтона состоит в использовании приближенного равенства, строго справедливого при наличии термодинамического равновесия

$$P_{R\lambda} = {}^1/_3\varepsilon_{R\lambda}$$

Исключая из уравнений (2.1) и (2.7) радиационное давление и плотность лучистой энергии при $\gamma(\tau_\lambda, \lambda) = \gamma(\lambda)$, получаем уравнение для лучистого потока H_λ

$$\frac{d^2H_\lambda}{d\tau_\lambda^2} = 3\left[1 - (1-\gamma_\lambda)\Gamma_\lambda\gamma_\lambda\right]H_\lambda + 4\pi\gamma_\lambda\frac{dB_\lambda}{d\tau_\lambda} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) справедливо при любой индикатрисе рассеяния. Граничные условия для уравнения (2.8) можно получить из условий (1.4), (1.5) и уравнения (2.1) в следующем виде:

$$H_\lambda = \varepsilon_{\lambda w}\left[\frac{1}{4\gamma_\lambda}\frac{dH_\lambda}{d\tau_\lambda} + \frac{H_\lambda}{2}\right] \qquad (\tau_\lambda = 0) \tag{2.9}$$

$$-H_\lambda = \varepsilon_{\lambda w}\left[\frac{1}{4\gamma_\lambda}\frac{dH_\lambda}{d\tau_\lambda} - \frac{H_\lambda}{2}\right] \qquad (\tau_\lambda = \tau_{\lambda\delta}) \tag{2.10}$$

$$\tau_{\lambda\delta} = \int_0^\delta \rho(\alpha_\lambda + \sigma_\lambda)\,dz$$

При симметричном профиле температуры граничное условие (2.10) можно заменить более простым

$$H_\lambda = 0, \qquad \tau_\lambda = \frac{1}{2}\tau_{\lambda\delta} = \tau_{\lambda m} \tag{2.11}$$

3. Решение уравнения (2.8) с граничными условиями (2.9), (2.11) есть

$$H_\lambda = -\frac{4\pi\gamma_\lambda}{s_{\lambda 2} - s_{\lambda 1}} \int_0^{\tau_\lambda} \frac{dB_\lambda}{d\xi} \exp[s_{\lambda 1}(\tau_\lambda - \xi)]\, d\xi + \frac{4\pi\gamma_\lambda}{s_{\lambda 2} - s_{\lambda 1}} \int_0^{\tau_\lambda} \frac{dB_\lambda}{d\xi} \exp[s_{\lambda 2}(\tau_\lambda - \xi)]\, d\xi +$$
$$+ C_{\lambda 1} \exp(s_{\lambda 1}\tau_\lambda) + C_{\lambda 2} \exp(s_{\lambda 2}\tau_\lambda) \tag{3.1}$$

$$C_{1\lambda} = -\frac{F_\lambda(1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 2})}{(1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 1}) \exp(s_{\lambda 2}\tau_{\lambda m}) - (1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 2}) \exp(s_{\lambda 1}\tau_{\lambda m})} \tag{3.2}$$

$$C_{2\lambda} = \frac{F_\lambda(1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 1})}{(1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 1}) \exp(s_{\lambda 2}\tau_{\lambda m}) - (1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 2}) \exp(s_{\lambda 1}\tau_{\lambda m})} \tag{3.3}$$

$$F_\lambda = \frac{4\pi\gamma_\lambda \exp(s_{\lambda 1}\tau_{\lambda m})}{s_{\lambda 2} - s_{\lambda 1}} \int_0^{\tau_{\lambda m}} \frac{dB_\lambda}{d\xi} \exp(-s_{\lambda 1}\xi)\, d\xi - \frac{4\pi\gamma_\lambda \exp(s_{\lambda 2}\tau_{\lambda m})}{s_{\lambda 2} - s_{\lambda 1}} \int_0^{\tau_{\lambda m}} \frac{dB_\lambda}{d\xi} \exp(-s_{\lambda 2}\xi)\, d\xi \tag{3.4}$$

$$a_{\lambda 1} = -\frac{s_{\lambda 1}}{4\gamma_\lambda} - \frac{1}{2}, \qquad a_{\lambda 2} = -\frac{s_{\lambda 2}}{4\gamma_\lambda} - \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

$$s_{\lambda 1} = \sqrt{3 - 3(1 - \gamma_\lambda)\Gamma_\lambda}\sqrt{\gamma_\lambda}, \qquad s_{\lambda 2} = -\sqrt{3 - 3(1 - \gamma_\lambda)\Gamma_\lambda}\sqrt{\gamma_\lambda} \tag{3.6}$$

Лучистый поток между газом и стенкой равен

$$H_\lambda = C_{\lambda 1} + C_{\lambda 2} = \frac{\varepsilon_{\lambda w} F(a_{\lambda 1} - a_{\lambda 2})}{(1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 1}) \exp(s_{\lambda 2}\tau_{\lambda m}) - (1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 2}) \exp(s_{\lambda 1}\tau_{\lambda m})} \tag{3.7}$$

Интегральный лучистый поток H определяется в соответствии с (1.1) интегрированием этого выражения по всему спектру длин волн.

Из формулы (3.7) следует как частный случай известная формула для лучистого потока при отсутствии рассеяния ($\sigma_\lambda = 0$, $\gamma_\lambda = 1$) и при постоянной температуре газа $T_r = \text{const}$:

$$H_\lambda = -\frac{\pi \varepsilon_{\lambda w} \varepsilon_{r\lambda}}{\varepsilon_{r\lambda} + \varepsilon_{w\lambda} - \varepsilon_{w\lambda}\varepsilon_{r\lambda}} (B_{\lambda r} - B_{\lambda w}) \tag{3.8}$$

Здесь $\varepsilon_{\lambda r}$ — коэффициент черноты плоского газового слоя

$$\varepsilon_{\lambda_r} = 1 - 2E_3(\tau_{\lambda\delta}) \approx 1 - \exp(-\beta\tau_{\lambda\delta}) \tag{3.9}$$

$$E_3(\tau) = \int_1^\infty t^{-3} \exp(-\tau t)\, dt \approx \frac{1}{2} \exp(-\beta\tau) \qquad (1.5 \leqslant \beta \leqslant 2)$$

В приближении Эддингтона $\beta = \sqrt{3}$.

Решение для полубесконечного слоя можно получить из формул (3.1)—(3.6), положив в них $s_{\lambda 1}\tau_{\lambda m} = \infty$.

В частности, для лучистого потока на стенке будем иметь следующее выражение:

$$H = -\int_0^\infty \frac{\pi \varepsilon_{\lambda w}}{1 + \varepsilon_{\lambda w} a_{\lambda 2}} \int_0^\infty \frac{dB_\lambda}{d\xi} \exp(-s_{\lambda 1}\xi)\, d\xi\, d\lambda \tag{3.10}$$

Решение (3.10) справедливо для любого профиля температуры в излучающем слое. В частности, когда вблизи стенки содержится тепловой пограничный слой толщины δ^*, в котором B_λ изменяется от $B_\lambda(T_r)$ до $B_\lambda(T_w)$ (для иллюстрации ограничимся линейным профилем), то решение примет вид

$$H = \pi \int_0^\infty \varepsilon_\lambda{}^\circ [B_\lambda(T_w) - B_\lambda(T_r)]\, d\lambda \tag{3.11}$$

Здесь $\varepsilon_\lambda{}^\circ$ — приведенная степень черноты, определяющая лучистый теплообмен в длине волны λ между полубесконечным слоем излучающей, поглощающей и рассеивающей среды с рассматриваемым профилем температуры (наличие теплового пограничного слоя у стенки) и твердой стенкой с коэффициентом черноты $\varepsilon_{\lambda w}$:

$$\varepsilon_\lambda{}^\circ = \frac{4\varepsilon_{\lambda w}[1 - \exp(-\sqrt{3}\,\gamma_\lambda \tau_\lambda{}^* R)]}{\tau_\lambda{}^*[2(2-\varepsilon_{\lambda w}) + \sqrt{3}\,\varepsilon_{\lambda w} R]\sqrt{3}\,\gamma_\lambda R} \tag{3.12}$$

$$R = \sqrt{1 + (1 - \Gamma_\lambda)\sigma_\lambda / \alpha_\lambda}$$

Из формулы (3.10) нетрудно получить аналогичные формулы для других профилей температуры в пограничном слое.

Устремляя оптическую толщину пограничного слоя $\tau_\lambda{}^*$ к нулю, получим формулу для расчета лучистого теплообмена между стенкой и полубесконечным слоем газа с постоянной температурой T_r, т. е. при наличии скачка температуры у стенки

$$\varepsilon_\lambda{}^\circ = \frac{4\varepsilon_{\lambda w}}{2(2-\varepsilon_{\lambda w}) + \sqrt{3}\,\varepsilon_{\lambda w}\sqrt{1 + (1-\Gamma_\lambda)\sigma_\lambda/\alpha_\lambda}} \tag{3.13}$$

Формулы (3.12) и (3.13) наглядно иллюстрируют влияние рассеяния на лучистый теплообмен. Вид индикатрисы рассеяния определяет величину параметра Γ_λ. Из второй формулы (2.7) следует, что $\Gamma_\lambda \leqslant 1$, причем граничным значениям $\Gamma_\lambda = \pm 1$ соответствуют индикатрисы $x_\lambda(\beta) = +\delta(\beta)$, где δ — дельта-функция Дирака. При $\Gamma_\lambda = +1$ луч рассеивается строго в своем направлении. В этом случае, как следует из (3.12), (3.13) рассеяние не влияет на лучистый тепловой поток при любом конечном σ_λ. Этот вывод непосредственно следует также из приближенного уравнения (2.8), его можно получить и строго на основании точного уравнения (1.3). При $\Gamma_\lambda = -1$ и фиксированном $\sigma_\lambda \neq 0$ рассеяние приводит к максимальному снижению лучистого потока.

Для сферической индикатрисы $x_\lambda(\beta) = 1$ (изотропное рассеяние) $\Gamma_\lambda = 0$, для индикатрисы вида $x_\lambda(\beta) = 1 + a\cos\beta$ параметр $\Gamma_\lambda = {}^1/_3 a$ и т. п. В случае произвольной индикатрисы параметр Γ_λ элементарно определяется численно.

Из формул (3.12), (3.13) следует, что отсутствие или наличие скачка температуры у стенки приводит к различному поведению теплового потока с возрастанием σ_λ ($\Gamma_\lambda \neq 1$)

при $T_r(0) = T_w$

$$\varepsilon_\lambda{}^\circ \to \frac{4}{3\tau_\lambda{}^*(1-\Gamma_\lambda)}\left(\frac{\alpha_\lambda}{\sigma_\lambda}\right) \qquad \text{при } \frac{\sigma_\lambda}{\alpha_\lambda} \to \infty$$

при $T_r(0) \neq T_w$

$$\varepsilon_\lambda{}^\circ \to \frac{4}{\sqrt{3(1-\Gamma_\lambda)}}\left(\frac{\alpha_\lambda}{\sigma_\lambda}\right)^{1/2} \qquad \text{при } \frac{\sigma_\lambda}{\alpha_\lambda} \to \infty$$

Из полученного решения также следует, что газовый слой при $\sigma_\lambda \to \infty$ не излучает (излучение не выходит из газа). Можно показать также, что в этом случае газ не пропускает падающее на него излучение, т. е. имеет место такое же обстоятельство, как и в тривиальном случае $\sigma_\lambda = 0$, $\alpha_\lambda = \infty$.

Поступило 17 IX 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Висканта. Перенос тепла теплопроводностью и излучением в поглощающих и рассеивающих средах. Теплопередача, М., «Мир», 1965, № 1.
2. Лав, Грош. Лучистая теплопередача в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде. Теплопередача, М., «Мир», 1965, № 2.
3. Ивенс, Чу, Черчилль. Влияние анизотропного рассеяния на перенос излучения. Теплопередача, М., «Мир», 1965, № 3.
4. Соболéв В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.