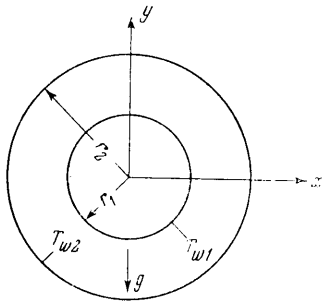


ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОБМЕНА ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ЗАМКНУТОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

С. И. АЛЬБЕР, Е. В. БЕКНЕВА, В. Р. КОГАН, Г. Б. ПЕТРАЖИЦКИЙ, Н. М. СТАНКЕВИЧ

(Горький)

Приводится численное решение полной системы двумерных нестационарных уравнений гидродинамики для вязкого теплопроводного сжимаемого газа с переменными физическими константами. Рассматривается ламинарное течение в кольцевой области под действием сил гравитационного поля. Внешняя и внутренняя границы области поддерживаются при постоянных, различных температурах; на границах выполняются условия прилипания.



Фиг. 1

Исходная система уравнений рассматривается без упрощающих предположений. При решении уравнений используется явная конечно-разностная схема с итерациями. Результаты решения соответствующей стационарной задачи получены методом установления.

Задача о свободном движении газа в замкнутой кольцевой области относится к классу задач, которые не могут быть решены путем применения приближенный пограничного слоя. Для ее решения должна быть рассмотрена полная система уравнений Навье—Стокса.

Одной из первых работ, в которой получены результаты численного решения такой системы для замкнутой прямоугольной области, была работа [1].

Течение и теплообмен вязкого теплопроводного сжимаемого газа описываются системой уравнений движения, неразрывности и энергии, которые для условий рассматриваемой задачи в прямоугольной системе координат (фиг. 1) имеют следующий безразмерный вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \sigma_x \Theta_m G^{1/3} + \\ &+ \frac{1}{G^{1/3}} \left[\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \sigma_y \Theta_m G^{1/3} + \frac{1}{G^{1/3}} \left[\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) &= \frac{1}{G^{1/3} P} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{k-1}{G^{1/3}} F M^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{G^{1/3}} \mu \Phi \right] \end{aligned}$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2$$

Они должны быть дополнены уравнением состояния и уравнениями, выражающими зависимость физических констант от температуры.

Численные расчеты, результаты которых приводятся в данной работе, были выполнены для совершенного газа с уравнением состояния $p = \rho R \Theta$.

Зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости от температуры $\mu = \mu(\Theta)$, $\lambda = \lambda(\Theta)$, $c_p = c_p(\Theta)$ при выполнении численных расчетов аппроксимировались полиномами пятой степени.

Для μ и λ эти зависимости соответствовали формуле Сетерленда.

В системе уравнений (1) приняты следующие обозначения безразмерных величин: τ — время; u, v — проекции вектора скорости на оси координат x, y ; p — давление; ρ — плотность; Θ — температура; μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; g_x, g_y — проекции вектора ускорения гравитационного поля на оси координат; R — газовая постоянная;

$$G = \frac{g' \delta'^3 \beta_m' \Delta T'}{\nu_m'^2}, \quad P = \frac{\mu_m' c_{pm}'}{\lambda_m'}, \quad k = \frac{c_p'}{c_v'}$$

$$T_m' = \frac{T_{w1}' + T_{w2}'}{2}, \quad \Delta T' = T_{w2}' - T_{w1}', \quad v' = \mu' / \rho', \quad \beta' = -\frac{1}{\rho'} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial T'} \right)_p$$

$$a_m' = \sqrt{k R' T_m'}, \quad \Theta_m = T_m' / \Delta T'$$

Размерные величины отмечены штрихом; $\delta' = r_2' - r_1'$, r_1' , r_2' — внутренний и внешний радиусы (фиг. 1) кольцевой области; R' — газовая постоянная; g' — ускорение гравитационного поля; T_{w1}' , T_{w2}' — температура внутренней и внешней границы области; β' — коэффициент объемного расширения (для совершенного газа $\beta' = 1 / T'$); индексом m отмечены физические константы при температуре T_m' .

Для приведения системы уравнений к безразмерному виду были приняты следующие собственные масштабы: δ' — масштаб длины; $U' = (\nu_m' g' \beta_m' \Delta T')^{1/3}$ — скорости; δ' / U' — времени; $\Delta T'$ — температуры; $\rho_m' U'^2$ — давления; ρ_m' — плотности¹; μ_m' — вязкости; λ_m' — теплопроводности; c_{pm}' — теплоемкости; g' — ускорения; $U'^2 / \Delta T'$ — газовой постоянной.

При принятой системе координат (фиг. 1) компоненты вектора g' будут $g_x' = 0$, $g_y' = g'$. Входящие в систему (1) безразмерные комплексы $\Theta_m G^{1/3}$ и $(k-1) F M^2 G^{-1/3}$ будут равны

$$\Theta_m G^{1/3} = \frac{1}{G^{2/3}} \frac{g' \delta'^3}{\nu_m'^2} = \frac{\delta' g'}{U'^2} = F$$

$$\frac{k-1}{G^{1/3}} F M^2 = \frac{U'^2}{c_{pm}' \Delta T'}, \quad M = \frac{U'^2}{a_m'^2}, \quad F M^2 = \frac{g' \delta'}{a_m'^2}$$

Здесь $F M^2$ — критерий весовой сжимаемости.

Газ заключен в пространстве $r_1 \leq r \leq r_2$ между двумя горизонтальными коаксиальными круговыми цилиндрами бесконечной протяженности. Здесь r — текущее значение радиуса.

На границах области выполняются условия:

$$u = v = 0, \quad \Theta = T_{w1}' / \Delta T' \quad \text{при } r = r_1 = r_1' / \delta'$$

$$u = v = 0, \quad \Theta = T_{w2}' / \Delta T' \quad \text{при } r = r_2 = r_2' / \delta' \quad (2)$$

В начальный момент времени $\tau = 0$ во всей области $u = v = 0$; распределение $\Theta_0(x, y, 0)$ определяется уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = 0$$

с граничными условиями (2).

Движение начинается из состояния равновесия при внезапно приложенной силе тяжести. Полагая

$$p = p_0 + \Delta p \quad (p_0 = \text{const}) \quad (3)$$

в уравнении состояния, получим

$$\Delta p = R(\Delta \rho \Theta + \rho_0 \Delta \Theta) \quad (\rho = p_0 / R \Theta) \quad (4)$$

Разностная схема для приближенного решения системы уравнений (1) получена методом баланса. Суть этого метода в следующем: каждое из уравнений интегрируется по элементарной ячейке Ω , и с помощью формулы Грина часть интегралов преобразуется в интеграл по границе Γ . Заменяя далее интегралы конечными суммами, получим систему разностных уравнений.

¹ $\rho_m' = \frac{p_0'}{R' T_m'}$, $p' = p_0'$ при $\tau' = 0$.

В интегральной форме система уравнений (1) с учетом (3) и (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} d\Omega &= - \int_{\Gamma} \left\{ \left[\Delta p + \rho u^2 - \frac{2}{3} \frac{\mu}{G^{1/3}} \alpha \right] x_v + \left[\rho u v - \frac{\mu}{G^{1/3}} \gamma \right] y_v \right\} ds \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial(\rho v)}{\partial \tau} d\Omega &= - \frac{1}{G^{2/3}} \left(\frac{\delta'^2 g'}{v m'^2} \right) \iint_{\Omega} \rho d\Omega - \int_{\Gamma} \left\{ \left[\rho u v - \frac{\mu}{G^{1/3}} \gamma \right] x_v + \right. \\ &\quad \left. + \left[\Delta p + \rho v^2 - \frac{2}{3} \frac{\mu}{G^{1/3}} \varepsilon \right] y_v \right\} ds \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\Omega &= - \int_{\Gamma} (\rho u x_v + \rho v y_v) ds \quad (5) \\ \iint_{\Omega} \left[c_p \frac{\partial(\rho \Theta)}{\partial \tau} - \frac{U'^2}{c_{pm}' \Delta T'} \rho R \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \right] d\Omega &= \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\lambda}{G^{1/3} p} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \rho u c_p \Theta \right) x_v + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\lambda}{G^{1/3} p} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \rho v c_p \Theta \right) y_v \right] ds + \frac{U'^2 R}{c_{pm}' \Delta T'} \iint_{\Omega} \left\{ \rho \left[\left(u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Theta (u_x + v_y) + \frac{\mu}{R G^{1/3}} \left[2(u_x^2 + v_y^2) + (u_x + u_y)^2 - \frac{2}{3}(u_x + v_y)^2 \right] \right\} d\Omega \\ \Delta p &= R(\Delta \rho \Theta + \rho \Theta \Delta \Theta) \end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon = 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

В уравнениях (5) удобно перейти к полярной системе координат. Вид элементарной ячейки Ω с границей Γ в этой системе показан на фиг. 2.

Переход от двойного интеграла к криволинейному выполняется в операторной форме (чем существенно облегчается работа по составлению программы).

В выбранной системе координат операторная форма перехода имеет вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} d\Omega &= \int_{\Gamma} W x_v ds = (W_{(2)} - W_{(4)}) 2r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \cos \Phi + \\ &+ (W_{(2)} + W_{(4)}) \Delta r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \cos \Phi + (W_{(1)} - W_{(3)}) \Delta r \sin \Phi \cos \frac{\Delta \Phi}{2} - \\ &- (W_{(1)} + W_{(3)}) \Delta r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \cos \Phi \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial y} d\Omega &= \int_{\Gamma} W y_v ds = (W_{(2)} - W_{(4)}) 2r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \sin \Phi + \\ &+ (W_{(2)} + W_{(4)}) \Delta r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \sin \Phi - (W_{(1)} - W_{(3)}) \Delta r \cos \frac{\Delta \Phi}{2} \cos \Phi - \\ &- (W_{(1)} + W_{(3)}) \Delta r \sin \frac{\Delta \Phi}{2} \sin \Phi \quad (7) \end{aligned}$$

Здесь $W_{(i)}$ — значение функции W на (i) -ой стороне ячейки Ω . При вычислении однократных интегралов в формулах (6), (7) величина W считалась постоянной на соответствующей стороне и вычислялась как среднее арифметическое в двух ближайших узлах; коэффициенты $\mu(\Theta)$, $\lambda(\Theta)$, $c_p(\Theta)$, $\rho(\Theta)$ тоже вычислялись как среднее арифметическое соответствующих значений в соседних узлах. Краевое условие для ρ получается по уравнению неразрывности из системы (5). При этом должны выполняться граничные условия для u , v . Обращаясь к операторам (6), (7), получаем значение ρ на границе:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{2}{\Delta r \Delta \Phi} \sin \frac{\Delta \Phi}{2} [(\rho u)_4 \cos \Phi + (\rho v)_4 \sin \Phi] \quad (r=r_2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - \frac{2}{\Delta r \Delta \Phi} \sin \frac{\Delta \Phi}{2} [(\rho u)_6 \cos \Phi + (\rho v)_6 \sin \Phi] \quad (r=r_1)$$

Производные на первой стороне ячейки Ω аппроксимировались по формуле

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_1 = \frac{Z_6 - Z_4 + Z_3 - Z_1}{4\Delta r} \cos\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) - \frac{Z_5 - Z_2}{r\Delta\varphi} \sin\left(\varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad (8)$$

Аналогично аппроксимировались $(\partial Z / \partial y)_1$, $(\partial Z / \partial x)_3$ и $(\partial Z / \partial y)_3$: Здесь Z_i — значения интегрируемых функций в узлах сетки в обозначениях (фиг. 2). Аппроксимации типа (8) используются при вычислении интегралов (6) и (7) на первой и третьей сторонах ячейки интегрирования. На второй стороне при вычислении этих интегралов применяются операторы вида

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial W}{\partial x} x_j ds &= \frac{Z_6 - Z_5}{\Delta r} \left(r_5 + \frac{\Delta r}{2}\right) \cos^2 \varphi \sin \Delta\varphi - \\ &- \frac{Z_9 + Z_8 - Z_3 - Z_2}{8} \sin 2\varphi \cos \Delta\varphi + \frac{Z_6 - Z_5}{\Delta r} \left(r_5 + \frac{\Delta r}{2}\right) \frac{\Delta\varphi - \sin \Delta\varphi}{2} - \\ &- \frac{Z_9 + Z_3 + Z_8 - Z_2 - 2(Z_6 + Z_5)}{8} \cos 2\varphi \sin \Delta\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

Операторы для вычисления интегралов на четвертой стороне получаются аналогично. Производные в центральной точке $(\partial Z / \partial x)_5$ вычислялись как среднее арифметическое производных на четырех сторонах.

Таким образом, заменяя интегралы по площади в уравнениях системы (5) по теореме о среднем и вычисляя контурные интегралы с помощью операторов (6), (7), (9), получаем систему уравнений, которая в векторном виде записывается

$$\partial \mathbf{Z} / \partial \tau = \mathbf{f}(\mathbf{Z}), \quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\rho u, \rho v, \rho, \Theta) \quad (10)$$

При численном решении системы (5) применялась явная схема с итерацией:

$$\mathbf{Z}^{n+1} = \mathbf{Z}^n + \mathbf{f}(\mathbf{Z}^n) \Delta\tau \quad (\tau = n\Delta\tau)$$

Здесь $\Delta\tau$ — шаг интегрирования по времени. Значение \mathbf{Z}^{n+1} уточнялось по формуле, согласно которой уточненное значение

$$\mathbf{Z}_*^{n+1} = \mathbf{Z}^n + \mathbf{f}(\mathbf{Z}^{n+1}) \Delta\tau \quad (11)$$

По формулам (10), (11) вычислялись

$$\rho^{n+1}, (\rho u)^{n+1}, (\rho v)^{n+1}, \Theta^{n+1}$$

Значения u^{n+1} и v^{n+1} получались из (11) делим на ρ^{n+1} .

Вычисления проводились на машине БЭСМ-3М. Стационарные решения системы конечно-разностных уравнений были получены методом установления при $\tau \rightarrow \infty$. Такой метод уже использовался в работах [1-4].

Градиенты температуры $(\partial\Theta / \partial r)$ на границах области для $-1/2\pi \leq \varphi \leq 1/2\pi$ аппроксимировались трехточечными формулами вида:

$$\frac{3\Theta_{i-1,j} - 4\Theta_{i,j} + \Theta_{i+1,j}}{2\Delta r}$$

где Δr — шаг сетки по координате r .

Средние значения $(d\Theta / dr)$ на границах вычислялись по распределению местных значений градиента

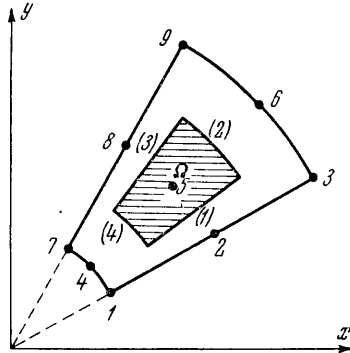
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)^+ = \frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) d\varphi$$

Интеграл аппроксимирования по формуле Симпсона.

За определение коэффициента конвекции ϵ_k принималось выражение

$$\epsilon_l = \frac{\lambda'_3}{\lambda'_m} = \lambda_1 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)_1^+ r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} = \lambda_2 \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)_2^+ r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

в котором λ'_3 — эквивалентный коэффициент теплопроводности [5]. Индексом 1 отмечены значения параметров на внутренней границе, индексом 2 — на внешней.



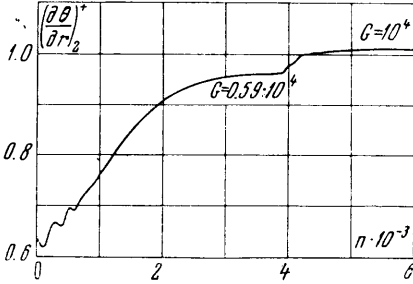
Фиг. 2

Таким образом, тепловой поток, проходящий через слой газа между цилиндрами, может быть вычислен следующим образом:

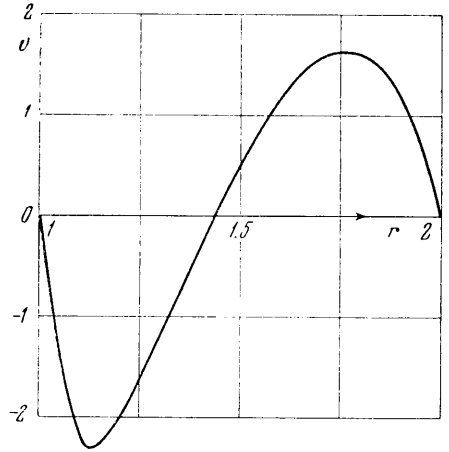
$$Q = \frac{2\pi \Delta T l \lambda_m'}{\ln r_2 / r_1} \epsilon_k$$

Здесь l — длина цилиндров.

На фиг. 3—8 приводятся результаты решения стационарной задачи, которое по-



Фиг. 3



Фиг. 4

лучено методом установления при следующих значениях определяющих критериев:

$$G = 10^4, \quad P = 0.70, \quad r_2 / r_1 = 2, \quad T_{w2} / T_{w1} = 1.27$$

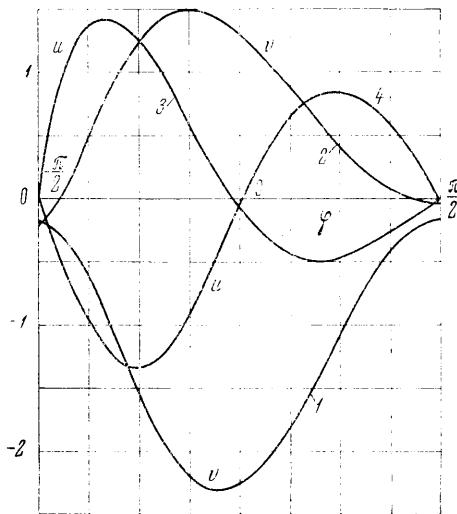
$$FM^2 = 0.05, \quad k = 1.40, \quad \theta_m = 4.16 \tag{12}$$

Здесь G , P , F и M — числа Грасгофа, Прандтля, Фруда и Маха соответственно.

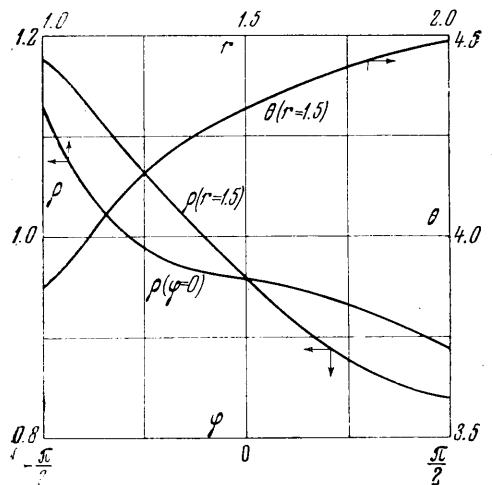
Предварительные расчеты, выполненные на крупных и мелких сетках, показали, что сетка с числом узлов 17×17 , приходящихся на половину кольцевой области, для условий (12) позволила получить достаточно точные результаты.

Ход процесса установления стационарного режима при расчете из положения гидростатического равновесия, при внезапном приложении сил гравитационного поля, представлен на фиг. 3.

Значение градиента температуры, осредненное по внешней границе области $(\partial\theta / \partial r)_{2^+}$, в начальный период процесса установления периодически падает и возрастает и, лишь начиная с $n \approx 700$ (n — число шагов по времени; $\Delta\tau = 0.94 \cdot 10^{-4}$), плавно приближается к стационарному значению, соответствующему $G = 0.59 \cdot 10^4$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Анализ изменения полей скорости, плотности, температуры и давления в начальный период показывает, что процесс установления гидродинамического равновесия в газе, при данных условиях, состоит из сложной последовательности процессов распространения температурных и гравитационных волн, взаимодействующих между собой, и границами области. Аналогичное явление наблюдалось при исследовании процесса установления в прямоугольной области [1].

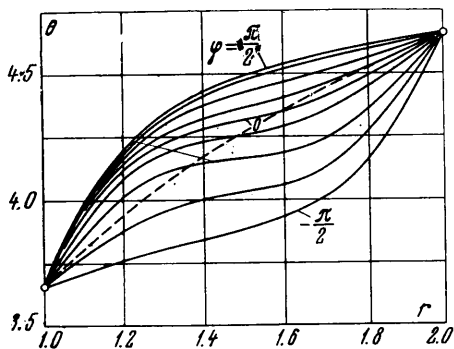
В отличие от работы [1] кривая установления, полученная в настоящей работе (фиг. 3) для кольцевой области и несколькими значениями G и T_{w2}/T_{w1} , не имела максимума непосредственно перед установлением гидродинамического равновесия.

Для расчета стационарных полей u , v , ρ , θ и величин $(\partial\theta/\partial r)_1$, $(\partial\theta/\partial r)_2$, (пропорциональных тепловым потокам на стенках цилиндров) при других числах G использовались поля, полученные в предыдущих расчетах. Последовательный переход от одного значения G к другому (большему или меньшему), при соответствующим образом подобранном шаге позволил существенно сократить время установления.

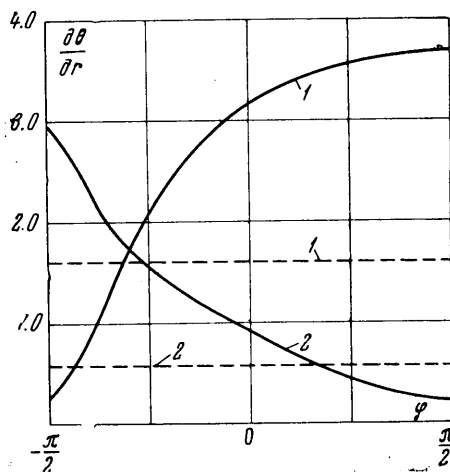
Кривая установления при переходе от $G = 0.59 \cdot 10^4$ к $G = 10^4$ приведена на фиг. 3. Сравнивая эту кривую с предыдущей можно судить об эффективности такого приема. В каждом варианте расчета на стационарном режиме проверялось выполнение интегральных балансов тепла и расхода.

Изменение вертикальной составляющей скорости v по горизонтальному радиусу ($\varphi = 0$) представлено на фиг. 4.

Изменение вертикальной v и горизон-



Фиг. 7



Фиг. 8

тальной u и составляющих скорости в зависимости от φ приведено на фиг. 5 для значений $r = 1.125$ (кривые 1 и 4) и $r = 1.875$ (кривые 2 и 3).

Температура θ и плотность ρ в средней части кольцевой области (при $r = 1.5$) существенно изменяются в зависимости от φ , как это показано на фиг. 6, где приведено также изменение плотности ρ по горизонтальному радиусу.

Движение газа возникает под действием сил гравитационного поля вследствие неравномерного распределения плотности в поле течения, которое в свою очередь вызывается неравномерным температурным полем.

Более нагретые и менее плотные слои газа вдоль нагретой внешней стенки перемещаются вверх в то время, как менее нагретые и более плотные слои у холодной внутренней стенки опускаются вниз.

Представленное на графиках распределение скоростей и более детальный анализ полей u и v показывает, что в верхней части кольцевой области не существует застойной зоны. Ранее предполагалось, что такая зона имеется [6].

Наибольший интерес представляет семейство кривых (фиг. 7), показывающих распределение температур θ по координате r при различных φ . Пунктир соответствует начальному полю температур при $u = v = 0$ (режим теплопроводности).

Частицы газа, перемещающиеся от внутренней холодной области к внешней нагретой стенке, уменьшают температуру в нижней части кольцевой области (фиг. 7). В верхней части области наблюдается обратная картина. Это приводит к переносу тепла вдоль кольцевого слоя. Температура в средней части кольцевого слоя повышается с ростом φ .

Характер кривых, приведенных на фиг. 7, показывает, что при значениях φ , близких к нулю, наиболее интенсивный перенос тепла поперек кольцевого слоя при $G = 10^4$ осуществляется вблизи границ области.

Видно, что для условий (12) в средней части кольцевого слоя не существует области течения с постоянной температурой.

Об изменении локальных значений тепловых потоков вдоль внутренней и внешней стенки кольцевого слоя можно судить по кривым, представленным на фиг. 8.

Профиль температур $\theta(r)$ вблизи внутренней стенки изменяется по φ таким образом, что градиенты $(\partial\theta/\partial r)_1$ (и следовательно тепловые потоки) при изменении φ от $1/2\pi$ до $-1/2\pi$ падают.

Аналогичная картина наблюдается и на внешней стенке, на которой градиенты $(\partial\theta/\partial r)_2$ понижаются в обратном направлении, достигая при $\varphi = 7/40\pi$ значений, имеющих место в условиях чистой теплопроводности.

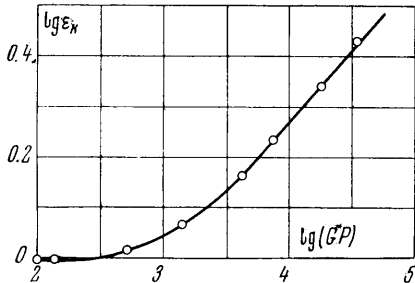
На фиг. 8 пунктиром показаны значения градиентов температуры на внутренней $(\partial\theta/\partial r)_1$, и внешней $(\partial\theta/\partial r)_2$ границе, которые имели бы место при $u = v = 0$.

Кривые, приведенные на фиг. 8, показывают, что перенос тепла от внешней стенки к газу при $\varphi > 7/40\pi$ и от газа к внутренней стенке при $\varphi < -5/16\pi$ протекает менее интенсивно по сравнению со случаем переноса тепла в неподвижном газе при разности температур стенок $(T_{w2} - T_{w1})$.

При условиях (12) расчетное значение коэффициента конвекции ε_K получилось равным 1.72. Невязка ε_K на внутренней и внешней границе области составляла 0.15%.

При более высоких значениях чисел G невязка ε_K на границах увеличивалась.

Так например, на сетке 17×17 при $G = 0.25 \cdot 10^5$ и $0.47 \cdot 10^5$ она составляла 5.2 и 8.5% соответственно. Для того, чтобы получить зависимость ε_K от числа G , была выполнена серия расчетов при $G = 10^2, 0.2 \cdot 10^3, 0.735 \cdot 10^3, 0.2 \cdot 10^4, 0.59 \cdot 10^4, 10^4, 0.25 \cdot 10^5, 0.47 \cdot 10^5$; остальные критерии при этом не изменялись и соответствовали данным основного варианта расчета (12).



Фиг. 9

Результаты расчетов представлены на фиг. 9.

В диапазоне $0.59 \cdot 10^4 \leq G \leq 0.47 \cdot 10^5$ полученная зависимость аппроксимируется формулой

$$\varepsilon_K = 0.13 (GP)^{0.291}$$

построенной по методу наименьших квадратов.

Так как при числах $G > 10^4$ невязка в значениях ε_K была ощутимой, при обработке данных принималось, что $\varepsilon_K = 1/2(\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{K2})$; здесь индексом 1 и 2 отмечены значения ε_K на границах.

Соответствующая экспериментальная формула для кольцевой области, построенная по опытным данным Бекмана и Гребера [5], имеет следующий вид:

$$\varepsilon_K = 0.11 (GP)^{0.29}$$

Она справедлива при $6 \cdot 10^3 \leq G \leq 10^6$.

В обеих формулах критерии подобия построены одинаковым образом.

Поступило 30 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2; см. также МЖГ, 1966, № 6.
2. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
3. Кускова Т. В. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. Вычислительные методы и программирование, Изд. Моск. ун-та, 1967, вып. 7.
4. Thomen H. Numerical Integration of the Navier — Stokes Equation Z. angew. Math. and Phys., 1966, Bd. 17, Fasc. 3.
5. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1956.