

## О ПАДЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ХОЛОДНОМ ЭЛЕКТРОДЕ

В. С. ЮФЕРЕВ

(Ленинград)

Рассматривается течение ионизованного газа в ламинарном пограничном слое на холодном электроде. Предполагая, что плотность тока достаточно велика, уравнение энергии удается преобразовать к виду, не зависящему от динамических характеристик пограничного слоя. Получены выражения для падения потенциала в слое и теплового потока на поверхности электрода. Результаты расчетов по этим формулам сравниваются с численными решениями задачи о течении газа в МГД-канале.

При течении ионизованного газа в МГД-канале на поверхности электрода образуется пограничный слой, электрическое сопротивление которого при некоторых условиях может достигать значительной величины и оказать существенное влияние на все течение в целом. Поэтому в общем случае, как было показано Любимовым [1], внешняя задача не отделяется от задачи течения в пограничном слое и их необходимо рассматривать совместно. Используя численные методы, указанное взаимодействие пограничного слоя с ядром потока исследовалось в работе [2] на примере сверхзвукового течения газа в плоском МГД-канале, расширяющемся по линейному закону. Полученные результаты, в частности, характер изменения падения потенциала в слое по длине электрода, позволяют предполагать, что в ряде случаев течение газа довольно быстро достигает состояния, в котором распределение температуры и проводимости поперек слоя определяется главным образом джоулевым тепловыделением, а влиянием конвективного переноса и вязкой диссипацией можно пренебречь.

В данной работе это явление легло в основу метода малых возмущений, который был использован для расчета тепловых и электрических характеристик пограничного слоя.

Пусть газ (или смесь газов, находящаяся в химическом равновесии) является слабоионизованным, электрод сплошным, а магнитное число Рейнольдса и параметр Холла — малыми. Кроме этого, как и в работе [2], предполагается, что продольным током, возникающим вследствие разделения зарядов в пограничном слое, можно пренебречь по сравнению с поперечным. При этих условиях уравнения пограничного слоя можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_{\infty} u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} \\ \rho u \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \frac{dh_{\infty}}{dx} \right) + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{j^2}{\sigma_{\infty}} \frac{\sigma_{\infty}}{\sigma} - \frac{u}{u_{\infty}} \right) \quad (1) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad p = \rho RT, \quad h = \int c_p dT \\ v = u = 0, \quad h = h_w &\quad \text{при } y = 0 \\ u = u_{\infty}, \quad h = h_{\infty} &\quad \text{при } y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Пусть далее теплопроводность и электропроводность задаются выражениями

$$\frac{\kappa}{\kappa_{\infty}} = \left( \frac{T}{T_{\infty}} \right)^n, \quad \frac{\sigma}{\sigma_1} = \left( \frac{p_1}{P} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{T_1} \right)^{3/4} \exp \left[ -\lambda \left( \frac{T_1}{T} - 1 \right) \right] \quad \lambda = \frac{V}{2kT_1} \quad (2)$$

где  $V$  — энергия ионизации, добавляемой в поток присадки. Как обычно, плотность тока  $j$  является функцией одной продольной координаты  $x$ .

Будем искать решение системы (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots \quad T = T_0(x, Y) + \varepsilon T_1(x, Y) + \dots \\ Y = y / \varepsilon, \quad \varepsilon = \sigma_1^{1/2} / j_1 \quad \sigma_1 / \sigma_{\infty} \ll 1 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, определяемый характерной величиной джоулевой диссипации в пограничном слое.

Отсутствие деформации поперечной координаты  $y$  в выражении (3) для скорости  $u$  объясняется тем, что электромагнитные силы не содержатся в уравнении им-

пульсов и поэтому толщина динамического пограничного слоя определяется главным образом числом Рейнольдса, а не величиной  $\epsilon$ .

Учитывая, что

$$\frac{j^2}{\sigma_\infty} = \frac{1}{\epsilon^2} \left( \frac{j}{i_1} \right)^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty}, \quad \frac{\sigma_\infty}{\sigma} \sim \frac{u}{u_\infty} \quad \text{при } Y \rightarrow \infty \quad (4)$$

и подставляя (3) в (4), нетрудно найти систему уравнений для первого приближения

$$\rho_0 \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \rho_0 \nu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho_\infty u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dY} \left( \kappa_0 \frac{dT_0}{dY} \right) + \left( \frac{j}{i_1} \right)^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} \left[ \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{u}{u_\infty} \right) \right] = 0 \quad (6)$$

Если толщина теплового пограничного слоя не слишком мала по сравнению с толщиной динамического слоя, то уравнение энергии (6) допускает дальнейшее упрощение. В этом случае вторым членом в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с первым, что становится понятным, если проинтегрировать (6) по  $Y$  от 0 до  $\infty$  и сравнить указанные члены, учитывая  $\sigma_1/\sigma_\infty \ll 1$ .

Возвращаясь теперь к прежней переменной  $y$  и опуская у температуры индекс 0, окончательно будем иметь

$$(\theta^n \theta')' = -a^2 \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma} - 1 \right) \quad \left( a^2 = \frac{j^2}{\sigma_\infty \kappa_\infty T_\infty} \right) \quad (7)$$

$$\theta = \theta_w \quad \text{при } y = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

$$\theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \frac{\sigma_\infty}{\sigma} = \frac{1}{\theta^{3/4}} \exp \left[ \lambda_\infty \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) \right], \quad \lambda_\infty = \frac{V}{2kT_\infty} \quad (8)$$

Таким образом, в первом приближении уравнение энергии полностью отделяется от уравнения импульсов. Тем не менее оно отличается от уравнения энергии для неподвижной среды наличием единицы в правой части (7), что позволяет удовлетворить краевому условию на бесконечности.

Так как теперь зависимость температуры от координаты  $x$  проявляется в основном через параметр  $a(x)$ , то можно ожидать, что удовлетворительные результаты будут получены при условии, если изменения этого параметра во внешнем потоке не слишком велики.

Из уравнения (7) следует, что тепловой поток на стенке  $q_w$  непосредственно связан с величиной сопротивления пограничного слоя, отнесенной к единице площади электрода. Действительно, интегрируя (7) по  $y$  от 0 до  $\infty$ , найдем

$$r_c = \frac{1}{\sigma_\infty} \int_0^\infty \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma} - 1 \right) dy = -\frac{q_w}{j^2} = \frac{1}{a^2 \sigma_\infty} \theta_w^n \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w \quad (9)$$

Соответственно падение потенциала в слое будет определяться выражением

$$U_c = -\frac{q_w}{j} = \frac{j}{a^2 \sigma_\infty} \theta_w^n \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w \quad (10)$$

Уравнение (7) можно привести к линейному виду

$$\frac{dz}{d\theta} + 2n\theta^{-1} z = -2\theta^{-n} \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma} - 1 \right) \quad \left( z = a^{-2} \left[ \frac{d\theta}{dy} \right]^2 \right). \quad (11)$$

Отсюда, удовлетворяя условию на бесконечности, получим

$$z = -2\theta^{-2n} \int_1^\theta t^n \left( \frac{\sigma_\infty}{\sigma} - 1 \right) dt \quad (12)$$

Подставляя сюда выражение для электропроводности и выполняя некоторые преобразования, будем иметь

$$z = -\frac{2}{n+1} (\theta^{-2n} - \theta^{1-n}) - 2e^{-\lambda_\infty \theta} \theta^{-2n} \int_1^\theta t^{n-3/4} \exp \frac{\lambda_\infty}{t} dt \quad (13)$$

Последний интеграл можно представить асимптотическим рядом. Тогда

$$z = -\frac{2}{n+1} (\theta^{-2n} - \theta^{1-n}) + \frac{2}{\lambda_\infty} \theta^{5/4-n} \exp \left[ \lambda_\infty \left( \frac{1}{\theta} - 1 \right) \right] \left[ 1 + \left( n + \frac{5}{4} \right) \frac{\theta}{\lambda_\infty} + \right. \\ \left. + \left( n + \frac{5}{4} \right) \left( n + \frac{9}{4} \right) \left( \frac{\theta}{\lambda_\infty} \right)^2 + \dots \right] - \frac{2}{\lambda_\infty} \theta^{-2n} \left[ 1 + \left( n + \frac{5}{4} \right) \lambda_\infty^{-1} + \dots \right] \quad (14)$$

Так как обычно величина  $\lambda$  достаточно велика (порядка 10), то при вычислении  $z$  на стенке первым и третьим слагаемым в (14) можно пренебречь, поскольку при использовании разложения (3) предполагалось, что температура электрода существенно ниже температуры внешнего потока.

Таким образом

$$z_w = \frac{2}{\lambda_{\infty w}} \theta_w^{5/4-n} \exp \left[ \lambda_\infty \left( \frac{1}{\theta_w} - 1 \right) \right] \left\{ 1 + \left( n + \frac{5}{4} \right) \frac{\theta_w}{\lambda_\infty} + \dots \right\} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10), получим выражение, связывающее падение потенциала в некотором сечении пограничного слоя с текущими характеристиками газа на стенке и в ядре потока

$$U_c = \left( \frac{2\kappa_\infty T_\infty}{\sigma_\infty \lambda_\infty} \right)^{1/2} \theta_w^{(5+n)/8} \exp \left[ \frac{\lambda_\infty}{2} \left( \frac{1}{\theta_w} - 1 \right) \right] \left\{ 1 + \left( n + \frac{5}{4} \right) \frac{\theta_w}{\lambda_\infty} + \dots \right\}^{1/2} \quad (16)$$

введем следующие безразмерные величины:

$$T_\infty^* = \frac{T_\infty}{T_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad \kappa^* = \frac{\kappa}{\kappa_0}, \quad \theta_w = \frac{T_w}{T_0} \\ \lambda_0 = \frac{V}{2kT_0}, \quad U_c^* = \frac{U_c}{2b_0 u_0 B}, \quad M_0^2 = \frac{u_0^2}{h_0(\gamma-1)} \\ H_0 = b_0 B \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^{1/2}, \quad P = \frac{c_p \mu_0}{\kappa_0} \\ S_x = \frac{\sigma_0 B^2 x}{\rho_0 u_0}, \quad S_0 = \frac{\sigma_0 B^2 b_0}{\rho_0 u_0} \quad (17)$$

Здесь  $H$  — число Гартмана,  $P$  — число Прандтля, индекс 0 относится к параметрам газа в некоторой фиксированной точке внешнего потока (например, во входном сечении МГД-канала), а  $2b_0$  есть расстояние между электродами в этом сечении.

Тогда

$$U_c^* = 1/2 [P(\gamma-1)M_0^2 H_0^2]^{-1/2} I(\theta_w, \lambda_0) (T^{*1-2n} p^*)^{1/4} \quad (18)$$

где

$$I(\theta_w, \lambda_0) = \left( \frac{2}{\lambda_0} \right)^{1/2} \theta_w^{(4n+5)/8} \exp \left[ \frac{\lambda_0}{2} \left( \frac{1}{\theta_w} - 1 \right) \right] \left\{ 1 + \left( n + \frac{5}{4} \right) \frac{\theta_w}{\lambda_0} + \dots \right\}^{1/2}$$

Таким образом, величина  $U_c^*$  тем меньше, чем больше числа  $H_0$ ,  $M_0$ ,  $\gamma$ ,  $P$ . С другой стороны, характер зависимости  $U_c^*$  от  $p^*$  и  $T^*$  показывает, что падение потенциала в слое слабо изменяется по длине электрода. Поэтому осевое электрическое поле, возникающее вследствие разделения зарядов в пограничном слое, будет невелико.

Для оценки области применения выражения (18), вообще говоря, необходимо найти следующее приближение в разложении (3). Однако это представляет значительные трудности. Поэтому результаты расчетов по формуле (18) сравнивались с численными решениями задачи о течи газа в плоском МГД-канале в предположении, что внешний поток является квазиодномерным и  $c_p = \text{const}$ .

При этом плотность тока определялась выражением

$$j = \sigma_{\infty} \left( u_{\infty} B - \frac{U + 2U_c}{2b} \right) \quad (19)$$

где  $U$  — падение напряжения между электродами. Общая постановка указанной задачи приведена в работе [2]. Рассматривался канал постоянного сечения и канал, расширяющийся по линейному закону

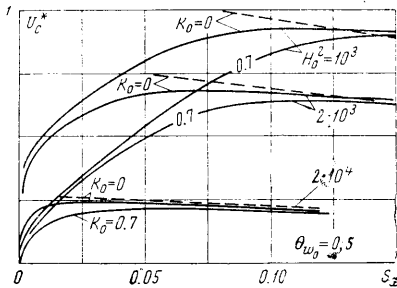
$$b = b_0 + cx$$

Вычисления были выполнены при различных значениях коэффициента нагрузки  $K_0$  в начальном сечении канала

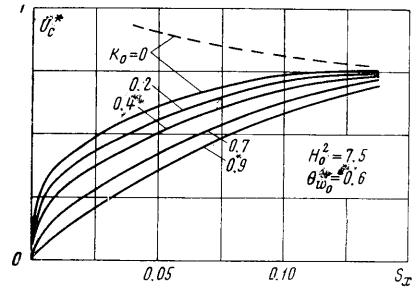
$$K_0 = U / 2b_0 u_0 B$$

Во всех случаях принималось число Прандтля  $P = 0.9$ ,  $\lambda_0 = 9.9$ ,  $n = 1/2$ .

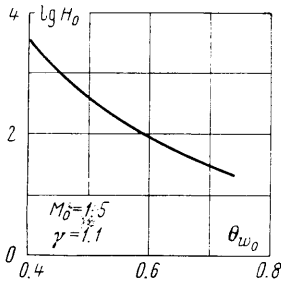
Для определения  $U_c^*$  по формуле (18) использовались распределения температуры и давления в ядре потока, полученные при численных расчетах.



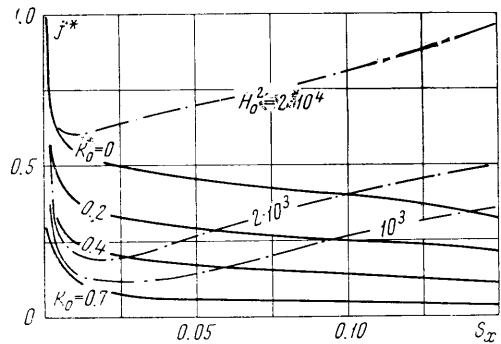
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1—2 показано изменение падения потенциала вдоль электрода в расширяющемся канале, когда

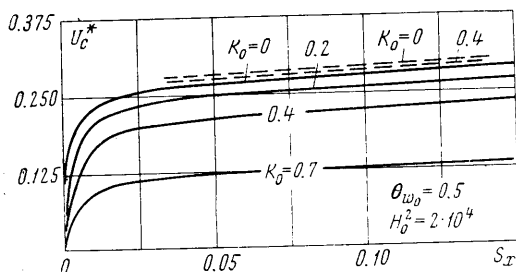
$$\gamma = 1.1, \quad M_0 = 1.5, \quad C / S_0 = 10.7$$

Сплошные кривые относятся к численным решениям, пунктирные — к результатам расчетов по формуле (18).

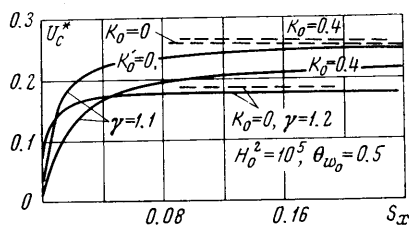
Из графиков видно, что по мере развития пограничного слоя падение потенциала в нем стремится к величине, определяемой выражением (18), что свидетельствует о постепенном разогреве газа в слое в результате выделения джоулева тепла. При этом совпадение наступает тем раньше, чем больше число Гартмана  $H_0$ , что является вполне естественным, так как увеличение  $H_0$  вызывает рост плотности тока (19) в канале, а следовательно — и увеличение джоулевой диссипации в пограничном слое.

Так как в рассматриваемом течении влияние  $K_0$  на  $U_c^*$  быстро исчезает с ростом продольной координаты  $S_x$ , то формула (18) остается справедливой в широком диапазоне изменения плотности тока.

Сравнение фиг. 1 и 2 показывает также, что температура электрода оказывает очень сильное влияние на падение потенциала в слое. Действительно, увеличение  $\theta_{w_0}$  от 0.5 до 0.6 вызывает уменьшение числа Гартмана  $H_0$  примерно в 4—5 раз при



Фиг. 5



Фиг. 6

сохранении того же значения  $U_c^*$  ( $H_0$  характеризует расстояние между электродами). Для лучшей иллюстрации этого факта на фиг. 3 представлена зависимость  $H_0$  от температуры электрода  $\theta_{w_0}$  при фиксированном  $U_c^*$ , равном 0.1 ( $p^* = 1$ ).

Небольшое различие, которое имеет место при больших значениях  $S_x$ , на фиг. 1 связано с сильным увеличением плотности тока в этой области канала (фиг. 4), так как полученные формулы через параметр  $a(x)$  учитывают только величину тока, а не скорость его изменения ( $\theta_w = 0.5$ ). На фиг. 4 показано также распределение плотности тока в канале постоянного сечения (сплошная кривая,  $M_0 = 1.5$ ,  $\gamma = 1.1$ , по-прежнему), для расширяющегося канала кривые — штрих-пунктир. В этом случае скорость в ядре потока уменьшается, что приводит, вследствие малого значения  $\gamma = 1.1$ , к соответствующему уменьшению плотности тока по длине канала. Поэтому пограничный слой разогревается гораздо меньше, и формула (18) оказывается справедливой только в режимах, близких к режиму короткого замыкания ( $k_0 = 0$ ), когда плотность тока максимальна (фиг. 5). Различие в результатах можно объяснить также и тем, что в рассматриваемой области течения пограничный слой еще не успел достигнуть достаточного разогретого состояния, поскольку протяженность области разогрева слоя увеличивается с уменьшением силы тока.

Зависимость величины падения потенциала в слое от продольной координаты при дозвуковом течении ( $M_0 = 0.7$ ) в канале постоянного сечения представлена на фиг. 6 для двух значений  $\gamma = 1.1, 1.2$ . Число Гартмана при этом было увеличено до  $H_0^2 = 10^5$ , чтобы компенсировать влияние уменьшения  $M_0$  на  $U_c^*$ . В согласии с формулой (18), возрастание  $\gamma$  приводит к уменьшению  $U_c^*$ , так как вызывает дополнительное выделение джоулева тепла в пограничном слое. Как и в предыдущем случае, хорошее совпадение имеет место только в режиме короткого замыкания, что можно опять объяснить характером изменения плотности тока по длине электрода (фиг. 7).

Необходимо отметить, что во всех рассмотренных задачах отношение падения потенциала в слое к электродвижущей силе в канале было достаточно велико (с учетом изменения скорости  $\sim 0.1-0.5$ ). Можно ожидать, что с уменьшением этого отношения (например, с ростом  $H_0$ ) выражение (18) будет применимо в более широком диапазоне плотностей тока.

В заключение укажем, что тепловой поток на поверхности электрода нетрудно вычислить, используя формулы (10) и (16).

Поступило 12 I 1968

## ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. О вязком пограничном слое на электроде при переменной электропроводности среды. ПММ, 1964, вып. 5, стр. 845.
2. Юферев В. С. Взаимодействие пограничного слоя на холодном электроде с основным потоком в МГД-генераторе. Магнитная гидродинамика, 1968, № 1.