

мерному виду, при котором роль ρ_{*0} и R^0 играют ρ_{e0} и R_{e0} , получим

$$\rho_{e0} = \rho_{e0} = T_{e0} = 1, \quad M_{e0} = M_0 \sqrt{1 + \rho_{e0}}, \quad w_{e0} = M_{e0} \sqrt{\chi_e}$$

Значения $\Delta E_x / E_x$ для $\rho_{e0} = 3$ и $x \geq 1$ показаны на фиг. 6 штрих-пунктиром. Хотя и в остальных случаях $\Delta E_x / E_x$ получилось примерно равным $\Delta \chi / \chi$, однако порядок $\Delta E_x / E_x$, по-видимому, в меньшей степени зависит от формы сопла и поэтому перенесение E_x , вычисленного по одномерной теории, на осесимметричный случай представляется более обоснованным. Еще меньше относительная погрешность $\Delta E_1 / E_1$, которая при $\rho_{e0} = 1$ и 3 для $x \leq 30$ не превышает 0.007 и 0.006, соответственно. Так как $I = I_0 + \chi$, то уменьшение $\Delta E_1 / E_1$ с ростом ρ_{e0} связано с быстрым ростом I_0 .

Поступило 30 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. ARS, Report, No. 1713—61, 1961.
2. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. Detonation and two-phase flow, edited by S. S. Penner and F. A. Williams, N. Y., Acad. Press, 1962, p. 173—194. (Рус. пер.: Сб. Детонация и двухфазное течение. М., Изд-во «Мир», 1966, стр. 183—201).
3. Kliegel J. R. Gas particle nozzle flows. In: «Ninth Symposium (International) on Combustion». N. Y., Acad. Press, 1963, p. 811—826. (Рус. пер.: Сб. Вопросы ракетной техники. М., Изд-во «Мир», 1965, № 10 (130), стр. 3—29).
4. Hoffman J. D., Lorenс S. A. A parametric study of gas — particle flows in conical nozzles. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1, p. 103—106.
5. Lorenс S. A., Hoffman J. D. Correlation of performance of conical and contoured nozzles for gas-particle flow. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1, p. 169—171.
6. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 418—429.
7. Bailly W. S., Nilson E. N., Serra R. A., Zupnik T. F. Gas — particle flow in an axisymmetric nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 6, p. 793—799.

О РАСЧЕТЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Б. М. ПАВЛОВ (Москва)

Излагается численный метод решения задачи стационарного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком газа низкой плотности. В рассматриваемом режиме течения существенны эффекты сжимаемости, вязкости и теплопроводности газа, омывающего затупленное тело. Исследование поля течения проводится с помощью двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа, которые интегрируются в конечной области около обтекаемого тела. Решение краевой задачи ищется методом установления. Для аппроксимации нестационарной системы Навье — Стокса применяется явная разностная схема [1]. Основная цель работы — опробование метода расчета. Выясняются характер установления к стационарному решению и особенности расчета по выбранной разностной схеме; анализируется влияние на численное решение граничных условий, заданных на некоторых поверхностях внутри потока; оценивается точность расчета.

Приведено поле течения при обтекании сферы потоком газа с числом Маха $M_\infty = 2.6$ и числом Рейнольдса $R = 90$.

Рассмотрим ограниченное затупленное тело, плоское симметричное или осесимметричное (например, поперечный эллиптический цилиндр или эллипсоид вращения), которое обтекается потоком вязкого газа, однородным и сверхзвуковым на бесконечности. Поле течения считаем симметричным относительно плоскости (оси) симметрии тела. Используем цилиндрическую полярную (для плоского потока) или сферическую полярную (для осесимметричного потока) систему координат r, θ (фиг. 1). Контур тела зададим уравнением $r = R_1(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Введем обозначения: u, v — радиальная и перпендикулярная к радиусу r составляющие скорости W потока, ρ — плотность, p — давление, h — энтальпия, μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, r_w° — радиус кривизны контура тела в передней критической точке, t — время, W_∞ и M_∞ — скорость и число Маха набегающего потока, $R = W_\infty \rho_\infty r_w^\circ / \mu_\infty$ — число Рейнольдса, $P = c_p \mu_\infty / \lambda_\infty$ — число Прандтля, $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты. Предполагается, что газ совершенный, числа γ и P постоянны, коэффициенты μ, λ пропорциональны h° .

В области, окружающей затупленное тело ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$), течение описывается полными двумерными уравнениями Навье — Стокса для сжимаемого газа, записанными в координатах r, θ [2].

Граничные условия в рассматриваемой задаче следующие:

а) в однородном набегающем потоке ($r \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= -W_\infty \cos \theta, & v(r, \theta) &= W_\infty \sin \theta \\ \rho(r, \theta) &= \rho_\infty, & h(r, \theta) &= h_\infty \end{aligned} \quad (1)$$

б) на поверхности обтекаемого тела ($r = R_1(\theta)$)

$$u = v = 0, \quad h = \text{const} \quad \text{или} \quad \partial h / \partial v = 0 \quad (2)$$

Здесь v — нормаль к контуру тела.

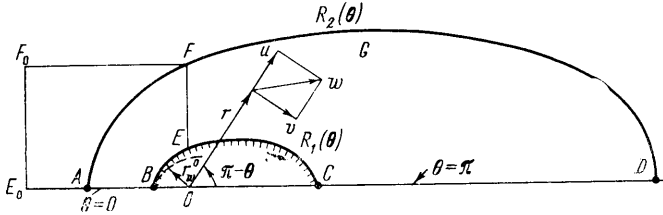
В силу симметрии течения на лучах $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ имеем

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

В задачах обтекания интегрирование полных двумерных уравнений Навье — Стокса осложняется тем, что область, в которой ищется решение, бесконечна. Поэтому приходится выделять границы внутри потока и задавать на них некоторые условия, требуемые в силу эллиптического характера системы Навье — Стокса. Во всех опубликованных работах по вязкому обтеканию затупленных тел (например, [2-6]) используются различные упрощения полной системы Навье — Стокса; рассматривалась область течения либо вблизи линии торможения ($\theta = 0^\circ$), либо около лобовой части тела.

В данной работе предлагается метод расчета поля течения около затупленных тел без упрощений исходной системы Навье — Стокса.

Метод решения задачи, сформулированной выше, основывается на следующем допущении. Предположим, что в рассматриваемом режиме течения возмущения от тела, наложенные на однородный набегающий поток, затухают на конечном, но может



Фиг. 1

быть достаточно большим расстоянии от обтекаемого тела. В полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$, в которой в силу симметрии течения ищется решение, выделим некоторую линию $r = R_2(\theta)$ так, чтобы при $r \geq R_2(\theta)$ поток можно было бы считать невозмущенным. Перенесем условия (1) из бесконечности на эту линию. Тем самым приходим к краевой задаче в конечной области $G\{R_1(\theta) \leq r \leq R_2(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}$, для полной системы Навье — Стокса с условиями (1), (2) и (3) на границе G .

Введем для удобства интегрирования новую независимую переменную

$$\xi = \frac{r - R_1(\theta)}{R_2(\theta) - R_1(\theta)} \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

и сгустим координатные линии $\xi = \text{const}$ около тела с помощью замены

$$z = \ln(\alpha + \beta\xi), \quad \alpha > 0, \quad \alpha + \beta > 0$$

В результате этих преобразований область G перейдет в прямоугольник

$$\Pi \{\ln \alpha \leq z \leq \ln(\alpha + \beta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Полученную краевую задачу будем решать установлением. Используем для этого полную нестационарную систему Навье — Стокса в параллелепипеде $\Omega = [\Pi \times t > 0]$. Задавая при $t = 0$ некоторое начальное поле течения, далее в ходе интегрирования нестационарной системы уравнений отыскиваем ее стационарное решение при $t \rightarrow \infty$. При этом предполагаем, что такое решение (как следует из физического смысла задачи) существует и единственно.

В переменных t, z, θ нестационарная система Навье — Стокса имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + d_1 \frac{\partial \rho u}{\partial z} + \frac{1}{d_2} [D(v\rho) + \rho u + j\rho(u + v \operatorname{ctg} \theta)] = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{d_2} \left(vDu + d_1 d_2 u \frac{\partial u}{\partial z} - v^2 \right) + \frac{d_1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \\ = 2 \left\{ d_1 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2}{3} \mu d_1 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\mu}{3d_2} (Dv + u + j(u + v \operatorname{ctg} \theta)) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2d_2} D \left[\mu d_1 \frac{\partial v}{\partial z} + \mu Du - D(\mu v) \right] \right\} + \frac{2\mu}{d_2} \left\{ d_1 \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{Dv - u}{d_2} + \right. \\ \left. + j \left[d_1 \frac{\partial u}{\partial z} - j \frac{u + v \operatorname{ctg} \theta}{d_2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2d_2} \left(d_1 d_2 \frac{\partial v}{\partial z} - v + Du \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{d_2} \left(vDv + d_1 d_2 u \frac{\partial v}{\partial z} + uv + \frac{Dp}{\rho} \right) \right] = \\ = \frac{2}{d_2} D \left\{ \frac{\mu}{d_2} (Dv + u) - \frac{\mu}{3d_2} \left[Dv + d_1 d_2 \frac{\partial u}{\partial z} + u + j(u + v \operatorname{ctg} \theta) \right] \right\} + \\ + \frac{1}{d_2} \left\{ (2 + j) \mu \left(d_1 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Du - v}{d_2} \right) + 2j \frac{\mu}{d_2} [Dv + u - j(u + v \operatorname{ctg} \theta)] \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ \left. + d_1 d_2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(d_1 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Du - v}{d_2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R\rho \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{d_2} \left(vDh + d_1 d_2 u \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{vDp}{d_2} + d_1 u \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] = \\ = \Phi + \frac{1}{Pd_2} \left\{ (1 + j) \mu d_1 \frac{dh}{\partial z} + d_1 d_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu d_1 \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{D(\mu Dh)}{d_2} + j \frac{\mu \operatorname{ctg} \theta}{d_2} Dh \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$p = (\gamma - 1)\rho h / \gamma, \quad (8)$$

$$\mu = (h / h_\infty)^\omega \quad (9)$$

В уравнениях (4) — (7) обозначено:

$$\begin{aligned} \Phi = \mu \left[2 \left(d_1 \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{Dv + u}{d_2} \right)^2 + 2j \left(\frac{u + v \operatorname{ctg} \theta}{d_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(d_1 \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{Du - v}{d_2} \right)^2 \right] - \frac{2\mu}{3} \left[d_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{Dv + u + j(u + v \operatorname{ctg} \theta)}{d_2} \right]^2 \end{aligned}$$

— диссипативная функция;

$$d_1 = \frac{\beta e^{-z}}{R_2(\theta) - R_1(\theta)}, \quad d_2 = R_1(\theta) + \frac{[R_2(\theta) - R_1(\theta)](e^{-z} - \alpha)}{\beta}$$

$$d_3 = R_1'(\theta) + \frac{[R_2'(\theta) - R_1'(\theta)](e^{-z} - \alpha)}{\beta}, \quad D = \frac{\partial}{\partial \theta} - d_1 d_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

$j_1 = 0$ — для плоского потока, $j = 1$ — для осесимметричного, штрих означает дифференцирование по θ .

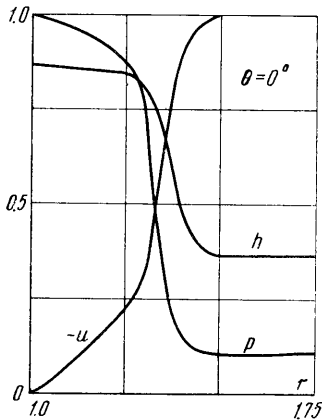
При записи системы (4) — (9) используются безразмерные величины: линейные размеры отнесены к r_w° , скорости — к W_∞ , плотность — к ρ_∞ , энтальпия — к W_∞^2 , давление — к $\rho_\infty W_\infty^2$, коэффициент вязкости — к μ_∞ , время — к W_∞ / r_w° .

Численное решение задачи основано на конечно-разностной аппроксимации уравнений (4) — (9) с помощью явной разностной схемы [1]. В параллелепипеде Ω вводится разностная сетка Ω^* с узлами $t = k\Delta t$, $z = \ln \alpha + i\Delta z$, $\theta = l\Delta \theta$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $i = 0, 1, \dots, n$; $l = 0, 1, \dots, m$). На установившемся решении эта схема дает второй порядок точности по пространственным шагам $\Delta z, \Delta \theta$.

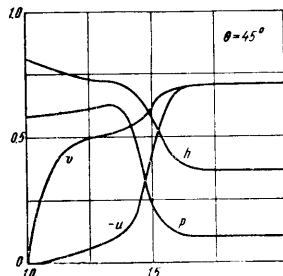
Из-за громоздкости аппроксимирующая конечно-разностная система уравнений здесь не приводится. Заметим лишь, что плотность ρ на теле определяется из уравнения неразрывности (4) с учетом условий прилипания. При разностной записи

уравнения (4) и последних условий в (2) и (3) также используется аппроксимация второго порядка точности по пространственным шагам.

Составленная для ЭВМ программа позволяет рассчитывать поля течения около поперечного эллиптического цилиндра ($j = 0$) и эллипсоида вращения ($j = 1$), расположенных под нулевым углом атаки к набегающему потоку.



Фиг. 2



Фиг. 3

Контур тела $R_1(\theta)$ и внешняя граница области интегрирования $R_2(\theta)$ задавались в виде эллипсов

$$R_i(\theta) = b_i^2 / [a_i - c_i \cos(\pi - \theta)], \quad (i = 1, 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi)$$

где a_i, b_i — большая и малая полуоси, $2c_i$ — расстояние между фокусами. Левые фокусы эллипсов совмещены с полюсом O полярной системы координат (фиг. 1).

В качестве примера приводим некоторые результаты расчета обтекания теплоизолированной сферы ($j = 1, a_1 = b_1 = 1, c_1 = 0, \partial h / \partial r = 0$ при $r = R_1(\theta)$) сверхзвуковым потоком газа с параметрами $M_\infty = 2.6, R = 90, \gamma = 1.4, P = 0.72, \omega = 3/4$.

Была проведена серия расчетов обтекания некоторых затупленных тел для ряда значительных чисел Маха и Рейнольдса, характеризующих режимы течений газа с низкой плотностью ($2 \leq M_\infty \leq 20, 20 \leq R \leq 200$).

Как показали пробные расчеты, при интегрировании системы (4) — (9) от начальных полей (при $t = 0$), сильно отличающихся от установившегося решения, требуется сглаживание плотности на каждом временном слое k , так как без этого численное решение постепенно искажалось медленно растущими колебаниями. После введения сглаживания всегда наблюдалось установление к стационарному решению. Процедура сглаживания описана в нашей работе [6], где рассматривалась упрощенная задача течения вязкого газа в окрестности линии торможения затупленного тела.

Для выяснения влияния положения границы $R_2(\theta)$ и числа узловых гонок разностной сетки в прямоугольнике Π на характер получаемого решения проводился расчет для следующих комбинаций значений параметров:

	m	n	a_2	b_2	c_2
(а)	21	21	29.446	10	21.696
(б)	21	21	16.75	7.454	15
(в)	31	31	16.75	7.454	15

(m — число лучей $\theta = \text{const}$, n — число точек на луче).

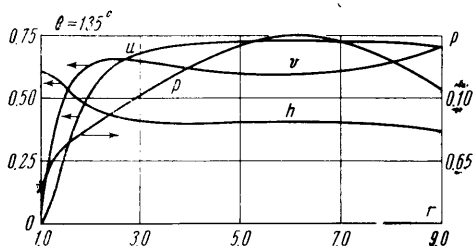
Здесь установившиеся решения вариантов (б) и (в) отличаются не более, чем на 5%.

Точность расчета была также проверена сопоставлением величин расхода газа через сечения EF ($\theta = 90^\circ$) и E_0F_0 , расположенное целиком в невозмущенном потоке.

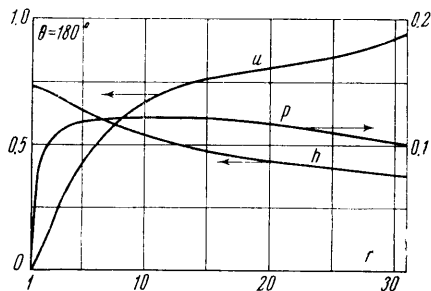
Разница величин расхода составляет порядка 0.7% для варианта (б) и 0.4% для варианта (в).

В точке D следа за телом (фиг. 1) использовались два типа условий:

- 1) полагали $\rho_D = \rho_\infty$, $u_D = u_\infty$, $h_D = h_\infty$, $v_D = 0$;
- 2) величины u_D и h_D находились экстраполяцией соответствующих величин на луче $\theta = \pi$, плотность ρ_D досчитывалась из уравнения неразрывности.



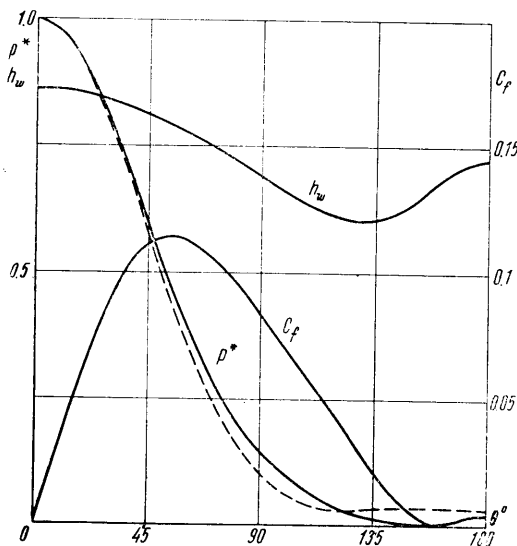
Фиг. 5



Фиг. 6

Оказалось, что выбор условий 1) или 2) влияет на решение лишь в небольшой окрестности точки D (например, совсем не сказывается на решении в области $0 \leq \theta \leq 120^\circ$).

На фиг. 2—6 результаты расчета представлены графиками функций u , v , h и p на лучах $\theta = 0, 45, 90, 135$ и 180° . На лучах $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ видны зоны расплывающейся с ростом θ головной ударной волны и заметен четкий выход параметров течения на постоянные значения в невозмущенном потоке. При $\theta > 117^\circ$ такой выход несколько



Фиг. 7

ухудшается, особенно при $117^\circ \leq \theta \leq 144^\circ$. Последнее можно объяснить прохождением значительно размазанной и ослабленной головной ударной волны через границу $R_2(\theta)$. Отсюда можно сделать вывод, что граница R_2 при $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ находится на достаточном удалении от тела и поток около нее, действительно, не возмущен; при $\theta > 90^\circ$ эту границу следовало бы отодвинуть дальше или использовать на ней иные, чем (1), условия. Однако, анализ решений вариантов (а) и (б) (с различным удалением границы $R_2(\theta)$ от тела) показал, что условия (1), предписанные на R_2 также и при $\theta > 90^\circ$, оказывают слабое влияние на течение вблизи тела.

На фиг. 7 приведены распределения энтальпии $h_w(\theta)$, коэффициента трения $C_f = R^{-1}(\mu \partial v / \partial r)_w$ и давления $p^* = p_w(0) / p_w(0)$ вдоль контура тела. Там же для сравнения штриховой линией нанесен график функции p^* , полученной из экспери-

мента [7, гл. 8], ($M_\infty = 2.6$, $R = \infty$, воздух). Качественное поведение расчетного p^* следует признать верным, если учесть [7, гл. 8], что при уменьшении числа Рейнольдса R (M_∞ — фиксировано) величина p^* на лобовой части ($0 < \theta \leq 90^\circ$) несколько повышается.

Установление к стационарному решению имеет следующий характер: параметры течения довольно быстро ($k \sim 600-800$) устанавливаются впереди сферы (до $\theta \sim 100^\circ$) и более медленно ($k \sim 2000$) в остальной области. Это указывает на слабую зависимость течения около лобовой части от течения позади сферы.

В связи с этим обстоятельством был выполнен расчет течения в области $0 \leq \theta \leq 99^\circ$, при этом на последнем луче ($\theta = 99^\circ$) для u , v , h задавались условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0$$

а плотность вычислялась из уравнения неразрывности. Получено стационарное решение, которое с точностью порядка 1–3% совпало с результатами расчета полной области ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$) на лучах $0 \leq \theta \leq 99^\circ$, причем наибольшее отличие наблюдалось при $\theta = 90, 99^\circ$. На фиг. 4 штриховыми линиями с кружочками показано решение, полученное из расчета области $0 \leq \theta \leq 99^\circ$. Таким образом, в рассматриваемом режиме обтекания, действительно, наблюдается слабое влияние течения позади сферы на течение перед ней, что позволяет проводить расчеты лишь около лобовой части тела, причем с достаточно высокой точностью.

При расчете полной области ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$), по-видимому, целесообразно применить альтернирующий метод Шварца для попеременного расчета передней и задней областей течения (возможно с разной структурой разностных сеток в каждой из областей).

Поступило 22 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
2. Пробштейн Р. Ф., Кемп Н. Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа. Период. сб. перев. иностр. статей «Механика», 1964, № 2.
3. Cheng H. K. Viscous blunt-body problems and the Newtonian theory. Fundament. phenomena hypersonic flow, Ithaca, New York, Cornell Univ. Press, 1966.
4. Толстых А. И. О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
5. Davis R. T., Chyu W. J. Laminar flow past a sphere at high Mach. number. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, No. 3.
6. Павлов Б. М. О расчете сверхзвукового вязкого течения вблизи линии торможения затупленного тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
7. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа (под ред. О. М. Белоцерковского). Тр. ВЦ АН СССР, М., 1966.

О ВЛИЯНИИ ПРОДОЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ИОНИЗУЮЩИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ГАЗЕ

А. А. БАРМИН, А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Как известно [1–3], впереди ионизирующих ударных волн может распространяться электромагнитная волна, которая изменяет поперечные (к направлению распространения волны) составляющие электрического и магнитного полей, причем за электромагнитной волной электрическое поле по порядку величины равно Hv/c , где v и H — некоторые характерные значения скорости и магнитного поля. Поэтому при подсчете потока импульса влиянием поперечной составляющей электрического поля можно пренебречь. Однако продольная составляющая электрического поля в электромагнитной волне не меняется и перед ударной волной равна своему невозмущенному значению E_{x0} . Если E_{x0} достаточно велико $E_{x0} \gg Hv/c$, то при вычислении потока импульса перед ионизирующей ударной волной необходимо учитывать также электрическую часть тензора максвелловских напряжений, связанную с продольной составляющей электрического поля. Поток энергии не изменяется.

Таким образом будем учитывать только вклад, равный $\epsilon E_{x0}^2/8\pi$ в поток x -й составляющей импульса перед волной (ϵ — диэлектрическая проницаемость непрозрачного газа). Вдали за ударной волной

$$E_x = - \left(\frac{v}{c} \times H \right)_x \ll E_{x0}$$