

Постоянные C_1, C_2, K_1, K_2 в зависимости от знаков дискриминантов λ^2 и μ^2 могут принимать действительные или комплексные значения, так, однако, чтобы выражения для χ, y, z оставались действительными.

Поступило 10 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Тр. ЦАГИ, 1941, № 543.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавала. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Рыжов О. С. О газовых течениях в соплах Лавала. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
5. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Фидрус В. И., Шифрин Э. Г. Осесимметричное вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
7. Munk M., Prim R. C. On the multiplicity of steady gas flows having the some streamline pattern. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1947, vol. 33, p. 37—141.
8. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1964.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ И СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Л. П. ВЕРЕЩАКА, Н. С. ГАЛЮН, А. Н. КРАЙКО, Л. Е. СТЕРНИН

(Москва)

Большинство опубликованных работ по расчету течений газа с инородными (твердыми или жидкими) частицами в соплах основано на использовании одномерного приближения. Исключения представляют расчеты течения в осесимметричных соплах, выполненные методом характеристик Кглигелем и Никерсоном [1-3] и Хоффманом и Лоренцом [4, 5]. Основные результаты предлагаемой работы также получены методом характеристик. При этом рассмотрены более широкого диапазона изменения степеней расширения сопла и относительных расходов частиц позволило выявить новые, неизвестные ранее особенности течения. Проведено сравнение результатов, полученных методом характеристик, с аналогичными результатами одномерного приближения, которые показали, что ошибки одномерного приближения весьма велики, особенно при больших относительных расходах частиц.

1. Движение смеси газа с инородными частицами при выполнении ряда условий, оговоренных, например, в [6], можно достаточно точно описать при помощи модели двухскоростной (или многоскоростной) сплошной среды. При этом реальное явление заменяется взаимопроницающим течением двух (или более) сплошных сред: собственно газа и «газа» (или «газов») частиц, лишенного собственного давления. Взаимодействие между этими средами вызвано вязкостью и теплопроводностью газа и осуществляется посредством силы \mathbf{f} , с которой газ действует на частицы, и теплового потока q от частиц к газу, причем под \mathbf{f} и q будем понимать величины, получающиеся отнесением силы и потока тепла, приходящихся на одну частицу, к ее массе. Будем считать, что \mathbf{f} и q — известные функции параметров течения, имеющие вид

$$\mathbf{f} = \varphi^{(1)} |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|^\alpha (\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \quad q = \varphi^{(2)} |T - T_s|^\gamma (T - T_s) \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{V} , T и p — скорость, температура и давление газа; \mathbf{V}_s , T_s и ρ_s — скорость, температура и плотность частиц (ниже используется двухскоростная модель, т. е. рассматривается один сорт частиц); $\varphi^{(1)}$ — известные знакопостоянные функции p , T , T_s , $|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|$ и ρ_s ; α и γ — константы, превышающие минус единицу. Все параметры течения представляют величины, получающиеся осреднением по малому объему, содержащему большое количество инородных частиц.

Будем пренебрегать объемом, который занимают частицы, и ограничимся случаем термодинамического равновесия в каждой сплошной среде в отдельности. Тогда

$$\rho = \rho(p, T), \quad h = h(p, T), \quad e_s = e_s(T_s) \quad (1.2)$$

где ρ и h — плотность и удельная энтальпия газа, а e_s — удельная внутренняя энергия частиц; функции, стоящие справа, считаются известными.

Осесимметричное стационарное течение двухскоростной сплошной среды при пренебрежении объемом инородных частиц описывается уравнениями

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} f_x = 0, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} f_y = 0 \\ \frac{\partial u v}{\partial x} + \frac{\partial v v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} [(V_s - V) \mathbf{f} + q] = 0 \\ u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = f_x, \quad u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial y} = 0, \quad u_s \frac{\partial e_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial e_s}{\partial y} = q \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь x и y — прямоугольные координаты в меридиональной плоскости, причем ось x направлена по оси симметрии, а u, v, u_s, v_s, f_x и f_y — компоненты векторов \mathbf{V} и \mathbf{f} на ось x и y .

Все величины в (1.1)–(1.3) удобно считать безразмерными. Пусть l°, u_*° и ρ_*° — характерные величины с размерностями длины, скорости и плотности (размерным величинам будем приписывать верхний индекс градус), а R° — газовая постоянная некоторого компонента газа. Тогда приведение к безразмерному виду осуществляется отнесением переменных к размерности длины, в частности, координат к l° , скоростей — к u_*° , плотностей — к ρ_*° , давление — $\rho_*^\circ (u_*^\circ)^2$, энтальпии и внутренней энергии — к $(u_*^\circ)^2$, температур — к $(u_*^\circ)^2 / R^\circ$, силы f° — к $(u_*^\circ)^2 / l^\circ$ и теплового потока q° — к $(u_*^\circ)^3 / l^\circ$.

Уравнения (1.1)–(1.3) образуют замкнутую систему, которая при $w \equiv |\mathbf{V}| > a$, где

$$a = \left[\rho_p + \frac{\rho_T}{h_T} \left(\frac{1}{\rho} - h_p \right) \right]^{-1/2} \quad \left(\zeta_p = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial p} \right)_T, \quad \zeta_T = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial T} \right)_p \right)$$

— скорость звука в чистом газе, является гиперболической и может быть решена методом характеристик. Ее характеристиками служат линии тока газа, два семейства линий Маха — характеристик первого и второго семейства, которые располагаются относительно линий тока газа так же, как в обычной газовой динамике, и траектории частиц.

Следует отметить, что несмотря на определенное сходство со случаем односкоростного течения, метод характеристик для расчета двухскоростного (или многоскоростного) течения не является тривиальным обобщением метода характеристик обычной газовой динамики. Поэтому соответствующие разностные схемы, особенности их построения, порядок расчета и другие детали, изложение которых выходит за рамки статьи, представляют большой самостоятельный интерес.

2. Рассмотрим в приближении описанной выше двухскоростной модели течение смеси совершенного газа с газовой постоянной R° и показателем адиабаты κ и частиц в сверхзвуковой части осесимметричного сопла, имеющего гиперболическую образующую

$$y_w = \sqrt{1 + (x/2)^2} \quad (2.1)$$

где y_w — ордината стенки сопла. Контур такого сопла имеет нулевой наклон в начальном сечении ($x = 0$) и быстро приближается к прямолинейной образующей конического сопла с углом полураствора $\theta = \arctg 0.5 \approx 26^\circ 34'$. Как следует из (2.1), в качестве характерного линейного размера l° взята ордината начального сечения.

Пусть внутренняя энергия частиц пропорциональна их температуре, а законы сопротивления и теплообмена соответствуют Стоксовскому режиму обтекания частицы. Пусть кроме того поток при $x = 0$ параллелен оси x и однороден, его скорость превосходит скорость звука, а отставания частиц по скорости и температуре отсутствуют. При этом однородное течение сохраняется в треугольнике, образованном осями координат и прямолинейной характеристикой второго семейства, которая выходит из точки $x = 0, y = 1$.

Если в качестве ρ_*° и u_*° взять ρ_0° и $(R^\circ T_0^\circ)^{1/2}$, где индекс нуль приписан параметрам в начальном сечении, то сформулированные выше предположения о свойствах

вах течения и начальных условиях записываются в виде равенств

$$\rho = \frac{P}{T}, \quad h = \frac{\kappa}{\kappa - 1} T, \quad e_s = \delta T_s, \quad \alpha = \gamma = 0$$

$$\varphi^{(i)} = \text{const}, \quad \rho_0 = p_0 = T_0 = T_{s0} = 1, \quad \rho_{s0} = \text{const} \quad (2.2)$$

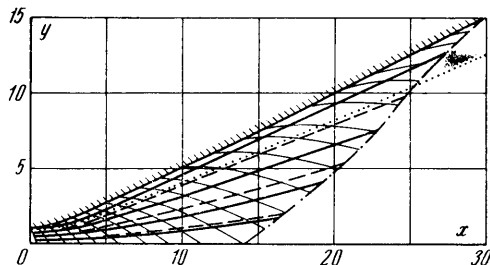
$$v_0 = v_{s0} = 0, \quad u_0 = u_{s0} = M_0 \sqrt{\kappa}, \quad M_0 = \text{const} > 1$$

где δ — константа, $M = w/a$ — число Маха.

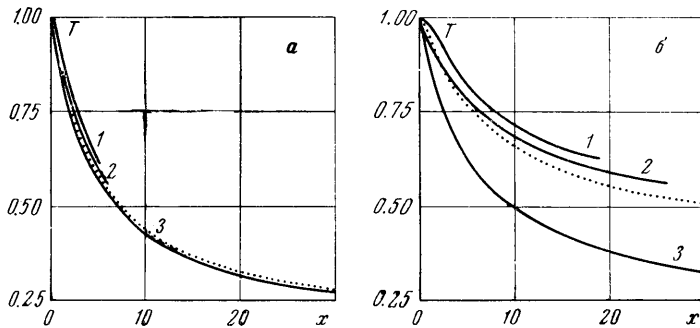
Расчеты проводились для четырех значений $\rho_{s0} = 0, 1/3, 1$ и 3 , что соответствует относительным расходам частиц, т. е. отношениям расходов частиц к полным расходам смеси, равным $0.00, 0.25, 0.50$ и 0.75 . Для прочих констант в (2.2) были взяты следующие численные значения: $\kappa = \delta = 1.2, \varphi^{(1)} = 2, \varphi^{(2)} = 8$ и $M_0 = 1.05$.

Результаты расчета течения методом характеристик, а также сравнение с результатами одномерной теории представлены на фиг. 1—6.

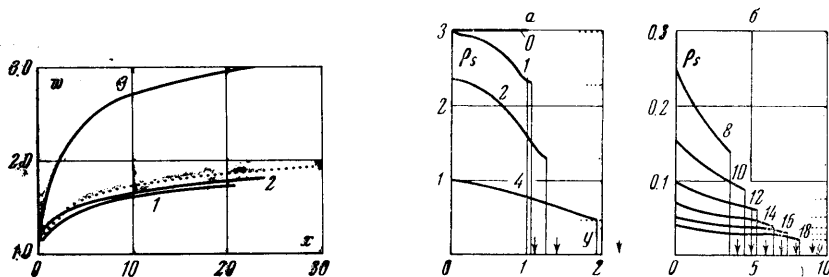
На фиг. 1 для $\rho_{s0} = 3$ дана картина течения в меридиональной плоскости сопла. Здесь сплошная заштрихованная кривая — образующая стенки сопла; тонкие сплошные кривые, идущие от стенки, — характеристики второго семейства; штриховые кривые — линии тока газа; сплошные жирные кривые — линии тока частиц; штрихпунктирная кривая — замыкающая характеристика первого семейства. Верхняя линия тока частиц является граничной линией, выше которой располагается область чистого газа. На той же фигуре пунктиром дана граничная линия для случая



Фиг. 1



Фиг. 2



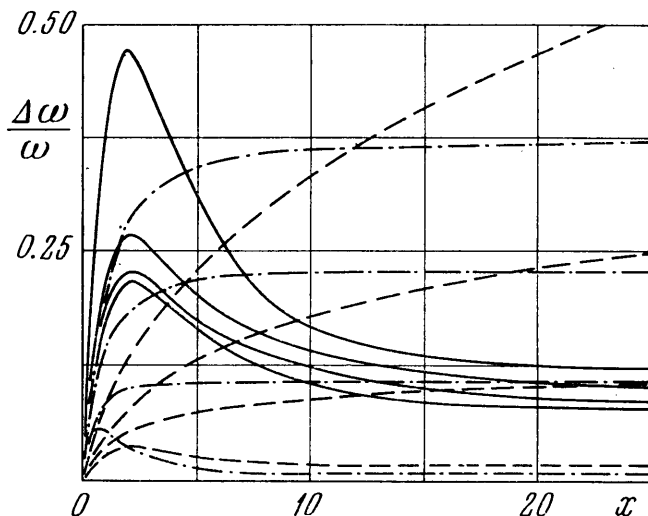
Фиг. 3

Фиг. 4

$\rho_{s0} = 1/3$. Видно, что рассмотренные значения относительных расходов частиц достаточно велики с точки зрения воздействия частиц на их собственное движение (через изменение параметров газа). При этом, чем больше расход частиц, тем медленнее разгон газа, меньше отставание и, как следствие, — тоньше слой чистого газа. Данное

обстоятельство следует иметь в виду при весьма распространенном приближенном способе расчета, когда при построении траекторий частиц не учитывается их воздействие на газ [7].

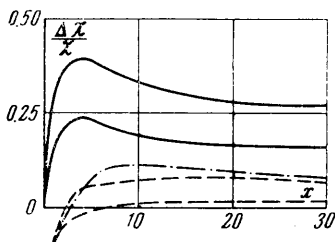
Для сопла рассмотренной формы линии тока газа и частиц на большом расстоянии от начального сечения, как и в [1-3], приближаются к прямым. При этом, как показывают расчеты, большая часть газа втекает в свободную от частиц область на начальном участке сопла ($x \leq 6$). Для больших x протекание газа через границу



Фиг. 5

раздела практически прекращается. Это означает, что границная линия тока частиц становится и линией тока газа.

Кривые распределения температуры на оси сопла, на границе раздела (или для $\rho_{s0} = 0$ — на прямой $y \equiv 1$) и на стенке для течения чистого газа ($\rho_{s0} = 0$) и для относительного расхода частиц, равного 0.75, показаны на фиг. 2, а и 2, б соответственно (указанным кривым приписаны цифры 1, 2 и 3 в порядке перечисления). Там же для сравнения пунктиром даны результаты одномерного приближения, причем предполагалось, что одномерное течение описывается формулами [6]



Фиг. 6

$$\begin{aligned} \rho w y_w^2 &= m, & \rho_s w_s y_w^2 &= m_s, & w_s w_s' &= f, & w_s e_s' &= q \\ \rho w w' + \rho_s w_s w_s' + p' &= 0, \\ m(w^2 + 2h) + m_s(w_s^2 + 2e_s) &= \text{const} \end{aligned}$$

Здесь m и m_s — константы; штрихом обозначена полная производная по x ; модули скорости w и w_s предполагаются совпадающими с u и u_s ; функции h , e_s и q определяются так же, как и ранее, а f получается из \dot{f} , если в \dot{f} опустить знак вектора и заменить \mathbf{V} и \mathbf{V}_s на w и w_s соответственно.

Различие между кривыми фиг. 2, будучи небольшим для случая чистого газа, с увеличением расхода частиц становится весьма значительным (фиг. 2, б), причем особенно сильно от результатов одномерной теории отличаются значения параметров на стенке. Аналогичная ситуация при $\rho_{s0} = 3$ имеет место и для модуля скорости газа (фиг. 3). Столь большое различие параметров на стенке и в области течения, занятой частицами, объясняется тем, что газ у стенки расширяется изэнтропически, не совершая работы над частицами и не получая от них тепла. В результате газ, текущий в области, свободной от частиц, образует низкоэнтропийный холодный высокоскоростной слой с большими поперечными градиентами T и w .

Отличие результатов точной и одномерной теории вызвано как присутствием вертикальных составляющих скорости и расслоением потока на две области, так и неравномерностью распределения частиц по y в области, занятой частицами. Последнее можно проследить по фиг. 4, а и б, где для $\rho_{s0} = 3$ дана последовательность профи-

лей ρ_s для x от 0 до 18 (цифры над кривыми — значения x , тонкие вертикальные линии определяют положение границы раздела, а стрелки у оси абсцисс — положение стенки для тех же x). Значения плотности, найденные для тех же сечений по одномерному приближению (отрезки пунктирных прямых справа), оказываются меньше точных, что есть следствие пренебрежения вертикальными составляющими скорости и отсутствием в одномерном приближении слоя чистого газа. Заметим, что во всех рассматривавшихся случаях отношения w_s / w и T_s / T , найденные методом характеристик и по одномерной теории, оказываются довольно близкими. При этом, в соответствии с известными результатами, максимальное отставание наблюдается вблизи начального сечения в области наиболее быстрого разгона газа (при $x = 0$ отставание отсутствует в силу выбора начальных условий).

Так как наибольшее различие результатов одномерного и двумерного приближения достигается на стенке сопла, то разницу соответствующих параметров можно принять за меру погрешности одномерной теории. Пусть для точки с фиксированными координатами $\Delta\omega$ — разность значений величины ω , определенных, соответственно, по одномерному приближению и методом характеристик. Деля $\Delta\omega$ на точное значение ω , получим относительную ошибку $\Delta\omega / \omega$. Относительные ошибки p , T и w на стенке сопла в зависимости от x и ρ_{s0} приведены на фиг. 5. Здесь $\Delta p / p$ даны сплошными кривыми, $\Delta T / T$ — штриховыми и $(-\Delta w / w)$ — штрих-пунктирными. В каждом случае четырем значениям начальной плотности частиц (0, $1/3$, 1 и 3) отвечает четыре кривых, причем большим ρ_{s0} соответствуют большие ошибки. Точность одномерной теории быстро падает с увеличением относительного расхода частиц, сужая область ее применимости.

Для приложений наибольший интерес представляет величина горизонтальной составляющей интеграла сил давления, действующих на стенку сопла, которую обозначим через χ . С точностью до несущественного постоянного множителя

$$\chi = \int_1^y p y dy$$

где интегрирование ведется вдоль контура сопла от начального сечения до текущей точки с ординатой $y = y_w(x)$. Можно показать, что $\chi = (I - I_0) / 2$, где I — полный импульс, в одномерном приближении равный

$$I = y_w^2(p + \rho w^2 + \rho_s w_s^2)$$

Так как $\Delta p / p > 0$, то $\Delta \chi / \chi$ также положительно, т. е. одномерное приближение завышает тягу сопла. Величина погрешности для двух относительных расходов частиц 0.5 и 0.75 показана на фиг. 6 как функция x сплошными кривыми (большему ρ_{s0} на фигуре соответствует кривая, дающая большие ошибки).

При течении чистого газа в выражение для I , полученное из одномерного приближения, обычно вносится поправка, учитывающая непараллельность потока на выходе. В рассматриваемом осесимметричном случае внесение этой поправки дает скорректированное значение импульса $I^c = I \cos^2(\theta / 2)$, где θ — полуугол раскрытия сопла в данном сечении (для течения от источника эта формула приводит к точному значению импульса). Значения $\Delta \chi^c / \chi$, полученные с использованием пересчитанного импульса I^c , даны на фиг. 6 для тех же случаев штриховыми кривыми. Хотя ошибка заметно уменьшается, ее величина особенно для $\rho_{s0} = 3$ остается большой, причем как видно из поведения кривых при $x < 5$, где форма сопла отлична от конической, при более сложных конфигурациях следует ожидать снижения эффективности пересчета и как следствия — увеличения $|\Delta \chi^c / \chi|$.

В случаях, рассмотренных выше, когда при $x = 0$ отсутствует отставание частиц и по скорости и по температуре, возможен другой способ использования результатов одномерного приближения, который заключается в перенесении на осесимметричный случай значения некоторой величины, характеризующей потери на отставание и найденной из одномерного приближения.

Пусть $E_\omega = \omega / \omega_e$, где ω_e — равновесное значение параметра ω , соответствующее течению без отставания частиц. Как известно, равновесное течение газа с частицами описывается теми же уравнениями, что и течение чистого газа, в частности, в случаях, рассмотренных выше, — уравнениями течения совершенного газа с газовой постоянной R_e° и показателем адиабаты κ_e , равными

$$R_e^\circ = \frac{R^\circ}{1 + \rho_{s0}}, \quad \kappa_e = \frac{A}{A - 1} \quad \left(A = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \rho_{s0} \delta \right)$$

Параметры равновесного течения при $x = 0$ находятся из условий совпадения размерных значений давления, температуры и скорости в равновесном и в действительном случаях и равенства $\rho_{e0}^\circ = \rho_0^\circ + \rho_{s0}^\circ$. Отсюда после приведения к безраз-

мерному виду, при котором роль ρ_{*0} и R^0 играют ρ_{e0} и R_{e0} , получим

$$\rho_{e0} = \rho_{e0} = T_{e0} = 1, \quad M_{e0} = M_0 \sqrt{1 + \rho_{e0}}, \quad w_{e0} = M_{e0} \sqrt{\chi_e}$$

Значения $\Delta E_x / E_x$ для $\rho_{e0} = 3$ и $x \geq 1$ показаны на фиг. 6 штрих-пунктиром. Хотя и в остальных случаях $\Delta E_x / E_x$ получилось примерно равным $\Delta \chi / \chi$, однако порядок $\Delta E_x / E_x$, по-видимому, в меньшей степени зависит от формы сопла и поэтому перенесение E_x , вычисленного по одномерной теории, на осесимметричный случай представляется более обоснованным. Еще меньше относительная погрешность $\Delta E_1 / E_1$, которая при $\rho_{e0} = 1$ и 3 для $x \leq 30$ не превышает 0.007 и 0.006, соответственно. Так как $I = I_0 + \chi$, то уменьшение $\Delta E_1 / E_1$ с ростом ρ_{e0} связано с быстрым ростом I_0 .

Поступило 30 X 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. ARS, Report, No. 1713—61, 1961.
2. Kliegel J. R., Nickerson G. R. Flow of gas-particle mixtures in axially symmetric nozzles. Detonation and two-phase flow, edited by S. S. Penner and F. A. Williams, N. Y., Acad. Press, 1962, p. 173—194. (Рус. пер.: Сб. Детонация и двухфазное течение. М., Изд-во «Мир», 1966, стр. 183—201).
3. Kliegel J. R. Gas particle nozzle flows. In: «Ninth Symposium (International) on Combustion». N. Y., Acad. Press, 1963, p. 811—826. (Рус. пер.: Сб. Вопросы ракетной техники. М., Изд-во «Мир», 1965, № 10 (130), стр. 3—29).
4. Hoffman J. D., Lorenс S. A. A parametric study of gas — particle flows in conical nozzles. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1, p. 103—106.
5. Lorenс S. A., Hoffman J. D. Correlation of performance of conical and contoured nozzles for gas-particle flow. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1, p. 169—171.
6. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, стр. 418—429.
7. Bailly W. S., Nilson E. N., Serra R. A., Zupnik T. F. Gas — particle flow in an axisymmetric nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 6, p. 793—799.

О РАСЧЕТЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Б. М. ПАВЛОВ (Москва)

Излагается численный метод решения задачи стационарного обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком газа низкой плотности. В рассматриваемом режиме течения существенны эффекты сжимаемости, вязкости и теплопроводности газа, омывающего затупленное тело. Исследование поля течения проводится с помощью двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа, которые интегрируются в конечной области около обтекаемого тела. Решение краевой задачи ищется методом установления. Для аппроксимации нестационарной системы Навье — Стокса применяется явная разностная схема [1]. Основная цель работы — опробование метода расчета. Выясняются характер установления к стационарному решению и особенности расчета по выбранной разностной схеме; анализируется влияние на численное решение граничных условий, заданных на некоторых поверхностях внутри потока; оценивается точность расчета.

Приведено поле течения при обтекании сферы потоком газа с числом Маха $M_\infty = 2.6$ и числом Рейнольдса $R = 90$.

Рассмотрим ограниченное затупленное тело, плоское симметричное или осесимметричное (например, поперечный эллиптический цилиндр или эллипсоид вращения), которое обтекается потоком вязкого газа, однородным и сверхзвуковым на бесконечности. Поле течения считаем симметричным относительно плоскости (оси) симметрии тела. Используем цилиндрическую полярную (для плоского потока) или сферическую полярную (для осесимметричного потока) систему координат r, θ (фиг. 1). Контур тела зададим уравнением $r = R_1(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Введем обозначения: u, v — радиальная и перпендикулярная к радиусу r составляющие скорости W потока, ρ — плотность, p — давление, h — энтальпия, μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, r_w° — радиус кривизны контура тела в передней критической точке, t — время, W_∞ и M_∞ — скорость и число Маха набегающего потока, $R = W_\infty \rho_\infty r_w^\circ / \mu_\infty$ — число Рейнольдса, $P = c_p \mu_\infty / \lambda_\infty$ — число Прандтля, $\gamma = c_p / c_v$ — показатель адиабаты. Предполагается, что газ совершенный, числа γ и P постоянны, коэффициенты μ, λ пропорциональны h° .