ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ЗВУКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЕКТОРУ СКОРОСТИ

В. И. ФИДРУС, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Известно, что течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии (или поверхности) вектору скорости обладает некоторыми особыми свойствами [1]. В работах [2–4] изучалось потенциальное течение (плоское, осесимметричное и пространственное) этого типа, когда ускорение не обращается в нуль и бесконечность. Эти результаты обобщались на вихревое плоское и осесимметричное течения в [5, 6]. В настоящей работе аналогичным методом исследуется общий случай вихревого пространственного течения, которое, например, может иметь место при пространственном обтекании тел с ударной волной.

В соответствии с «принципом замещения» [7] (см. также [8], стр. 478, 560) достаточно ограничиться рассмотрением течений с постоянной температурой торможения, так как распределение ее в потоке не влияет на расположение линий тока и поверхностей $\lambda = \mathrm{const}$ (λ — коэффициент скорости).

Уравнения газовой динамики в форме Крокко в декартовой системе координат x, y, z имеют вид

$$w(u_z - w_x) + v(u_y - v_x) = \frac{a^2}{kR} s_x \qquad u(v_x - u_y) + w(v_z - w_y) = \frac{a^2}{kR} s_y$$

$$u(w_x - u_z) + v(w_y - v_z) = \frac{a^2}{kR} s_z \tag{1}$$

$$u^2 u_x + v^2 v_y + w^2 w_z + uv(v_x + u_y) + uw(w_x + u_z) + vw(v_z + w_y) = a^2(u_x + v_y + w_z)$$

$$a^2 = {}^1/_2\,[k + 1 - (k-1)(u^2 + v^2 + w^2)]$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости, отнесенные к критическому значению, s — энтропия, k — показатель адиабаты, R — газовая постоянная.

Поместим начало координат в точку K ортогональности звуковой поверхности вектору скорости, совместив ось абсцисс с направлением вектора скорости в этой точке.

Положим в окрестности точки K

$$x = O(\varepsilon^2), \quad y, z = O(\varepsilon), \quad u = 1 + \varepsilon^2 U, \quad s = \varepsilon s^{(1)} + \varepsilon^2 S$$

$$v = \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \varepsilon^3 V, \quad w = \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \varepsilon^3 W, \quad U, S, V, W = O(1) \tag{2}$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий размер окрестности точки K; многочлены $s^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)} = O(1)$. Подставляя (2) в (1) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$v_y^{(1)} + w_z^{(1)} = 0, \quad kRv_x^{(2)} = s_y^{(1)}, \quad kRw_x^{(2)} = s_z^{(1)}$$

$$v_x^{(2)} v^{(1)} + w_x^{(2)} w^{(1)} = w_z^{(2)} + v_y^{(2)}, \qquad S_x = 0 \tag{3}$$

$$V_x - U_y = (kR)^{-1} S_y + w^{(1)}(w_y^{(1)} - v_z^{(1)}), \qquad W_x - U_z = (kR)^{-1} S_z + v^{(1)}(v_z^{(1)} - w_y^{(1)})$$

$$(k+1)UU_x - V_y - W_z + \frac{k-1}{2}(v^{(1)2} + w^{(1)2})U_x + v^{(1)}(U_y + V_x) + w^{(1)}(U_z + W_x) +$$

$$+ v^{(1)} w^{(1)}(v_z^{(1)} + w_y^{(1)}) + v^{(1)2} v_y^{(1)} + w^{(1)2} w_z^{(1)} + v_x^{(2)} v^{(2)} + w_x^{(2)} w^{(2)} = 0$$

Из инвариантности первого уравнения этой системы относительно поворотов вокруг оси Kx следует, что

$$v^{(1)} = \alpha y + \beta z, \qquad w^{(1)} = \beta y - \alpha z$$

и, значит, шестое и седьмое уравнения системы (3) принимают вид

$$V_x - U_y = \frac{1}{kR} S_y, \qquad W_x - U_z = \frac{1}{kR} S_z$$

Система (3) является неопределенной (коэффициенты многочленов $s^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$ определяются неоднозначно). Это означает, что из локального рассмотрения, без исследования задачи «в целом», может быть установлен только характер течения с точностью до некоторых параметров. Часть этих параметров в потенциальном течении обращается в нуль; другие, например α, β, остаются неопределенными и в этом случае.

Система (3) имеет точное решение, аналогичное [2]

$$
\begin{aligned}
&U = a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4yz, \qquad S = b_1y^2 + b_2z^2 + b_3yz \\
&V = c_1xy + c_2xz + c_3y^2z + c_4yz^2 + c_5y^3 + c_6z^3 \\
&W = d_1xy + d_2xz + d_3y^2z + d_4yz^2 + d_5y^3 + d_6z^3
\end{aligned} \tag{4}
$$

Коэффициент a_1 здесь пропорционален ускорению потока в точке K; можно считать, что $a_1 > 0$.

Подставляя (4) в (3), получим неопределенную систему относительно коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i.

Поверхности $\lambda = \mathrm{const}$ (в частности, звуковая поверхность) представляют в окрестности точки K семейства гиперболических или эллиптических параболоидов. В последнем случае в отличие от потенциального течения звуковая поверхность может быть обращена выпуклостью в сторону дозвуковой области.

Рассмотрим теперь поведение характеристических поверхностей в окрестности точки K. Характеристическая поверхность является огибающей элементарных конусов, построенных в каждой точке сверхзвуковой области. Если обозначить через $\mathbf{N}$ единичный вектор нормали к характеристической поверхности $x = X(y, z)$, то уравнение последней может быть записано в виде

$$
\frac{|\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}|}{|\mathbf{V}|} = \frac{1}{M}, \qquad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{i} - X_y\mathbf{j} - X_z\mathbf{k}}{(1 + X_y^2 + X_z^2)^{1/2}}
$$

Отсюда получим

$$
\frac{|u - X_yv - X_zw|}{(1 + X_y^2 + X_z^2)^{1/2}(u^2 + v^2 + w^2)^{1/2}} = \frac{1}{M} \tag{5}
$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вектор скорости, M — число Маха.

Подставляя (2) в (5), получим при $\varepsilon \to 0$:

$$
(X_y + v^{(1)})^2 + (X_z + w^{(1)})^2 = (k+1)\left(U + \frac{v^{(1)2} + w^{(1)2}}{2}\right)
$$

Обозначив $\chi = X + {}^1\!/_2\alpha y^2 + \beta yz - {}^1\!/_2\alpha z^2$ и использовав первое выражение (4), получим, повернув систему координат вокруг оси Kx, так чтобы коэффициент a_4 обратился в нуль

$$
\chi_y^2 + \chi_z^2 + a\chi + by^2 + cz^2 = 0 \tag{6}
$$

Здесь a, b, c — некоторые постоянные.

Уравнение (6) может быть проинтегрировано методом характеристик. (Характеристики (6) являются бихарактеристиками системы (3).) В соответствии с [9] имеем

$$
\frac{d\chi}{ds} = 2(p^2 + q^2), \quad \frac{dy}{ds} = 2p, \quad \frac{dz}{ds} = 2q, \quad \frac{dp}{ds} = -ap - 2by, \quad \frac{dq}{ds} = -aq - 2cz \tag{7}
$$

Здесь s — параметр вдоль бихарактеристики.

Из второго и четвертого, третьего и пятого уравнений системы (7) можно получить

$$
y'' + ay' + 4by = 0, \qquad z'' + az' + 4cz = 0
$$

Решение этих уравнений записывается в виде

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 \exp\left(\frac{\lambda - a}{2}s\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\lambda + a}{2}s\right), \qquad \lambda^2 = a^2 - 16b \\
z &= K_1 \exp\left(\frac{\mu - a}{2}s\right) + K_2 \exp\left(-\frac{\mu + a}{2}s\right), \qquad \mu^2 = a^2 - 16c
\end{aligned}
$$

Интегрируя первое уравнение системы (7), получим

$$
\begin{aligned}
\chi = {} & \frac{C_1^2}{8}(\lambda - a)\exp[(\lambda - a)s] + \frac{C_1C_2}{4a}(\lambda^2 - a^2)\exp(-as) - \frac{C_2^2}{8}(\lambda + a)\exp[-(\lambda + a)s] + \\
& + \frac{K_1^2}{8}(\mu - a)\exp[(\mu - a)s] + \frac{K_1K_2}{4a}(\mu^2 - a^2)\exp(-as) - \frac{K_2^2}{8}(\mu + a)\exp[-(\mu + a)s]
\end{aligned}
$$

Постоянные C_1, C_2, K_1, K_2 в зависимости от знаков дискриминантов λ^2 и μ^2 могут принимать действительные или комплексные значения, так, однако, чтобы выражения для χ, y, z оставались действительными.

Поступило 10 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Христианович С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Тр. ЦАГИ, 1941, № 543.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Рыжов О. С. О газовых течениях в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
5. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
6. Фидрус В. И., Шифрин Э. Г. Осесимметричное вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
7. Munk M., Prim R. C. On the multiplicity of steady gas flows having the some streamline pattern. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1947, vol. 33, p. 37—141.
8. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ЧАСТИЦАМИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ И СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Л. П. ВЕРЕЩАКА, Н. С. ГАЛЮН, А. Н. КРАЙКО, Л. Е. СТЕРНИН

(Москва)

Большинство опубликованных работ по расчету течений газа с инородными (твердыми или жидкими) частицами в соплах основано на использовании одномерного приближения. Исключение представляют расчеты течения в осесимметричных соплах, выполненные методом характеристик Клигелем и Никерсоном [1–3] и Хоффманом и Лоренцом [4, 5]. Основные результаты предлагаемой работы также получены методом характеристик. При этом рассмотрение более широкого диапазона изменения степеней расширения сопла и относительных расходов частиц позволило выявить новые, неизвестные ранее особенности течения. Проведено сравнение результатов, полученных методом характеристик, с аналогичными результатами одномерного приближения, которые показали, что ошибки одномерного приближения весьма велики, особенно при больших относительных расходах частиц.

1. Движение смеси газа с инородными частицами при выполнении ряда условий, оговоренных, например, в [6], можно достаточно точно описать при помощи модели двухскоростной (или многоскоростной) сплошной среды. При этом реальное явление заменяется взаимопроникающим течением двух (или более) сплошных сред: собственно газа и «газа» (или «газов») частиц, лишенного собственного давления. Взаимодействие между этими средами вызвано вязкостью и теплопроводностью газа и осуществляется посредством силы $\mathbf{f}$, с которой газ действует на частицы, и теплового потока q от частиц к газу, причем под $\mathbf{f}$ и q будем понимать величины, получающиеся отнесением силы и потока тепла, приходящихся на одну частицу, к ее массе. Будем считать, что $\mathbf{f}$ и q — известные функции параметров течения, имеющие вид

$$\mathbf{f} = \varphi^{(1)}|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|^{\alpha}(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s), \qquad q = \varphi^{(2)}|T - T_s|^{\gamma}(T - T_s) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{V}$, T и p — скорость, температура и давление газа; $\mathbf{V}_s$, T_s и ρ_s — скорость, температура и плотность частиц (ниже используется двухскоростная модель, т. е. рассматривается один сорт частиц); $\varphi^{(i)}$ — известные знакопостоянные функции p, T, T_s, $|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|$ и ρ_s; α и γ — константы, превышающие минус единицу. Все параметры течения представляют величины, получающиеся осреднением по малому объему, содержащему большое количество инородных частиц.