ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Г. И. НАЗАРОВ

(Киев)

Строится два класса новых точных решений для пары функций уравнений газовой динамики в виде рядов (сходимость доказана). Один из них вырождается в одночлен в точке торможения, второй — в звуковой точке. Эти решения сопрягаются на некоторой линии, что позволяет рассматривать течение во всей области, начиная от точки торможения и кончая звуковой линией.

Приведен один пример — обтекание клина струей газа со звуковой скоростью.

Предложенные решения могут быть использованы для изучения трансзвуковых и гиперзвуковых течений газа.

Метод С. Бергмана [1, 2] и его модификация [3] позволяют находить точные решения для линейных уравнений в частных производных сжимаемой жидкости, зависящие от произвольной аналитической функции комплексного переменного. Однако эти решения имеют некоторые недостатки. Во-первых, по методу Бергмана решения строятся для одного уравнения в частных производных второго порядка, например, для функций тока ψ, а затем при помощи квадратуры находится потенциал скорости φ из соответствующей системы уравнений в частных производных первого порядка. Эта квадратура, как правило, не может быть выражена явно и вычисляется численно, что снижает достоинство аналитического построения решения для ψ. Во-вторых, решение в форме Бергмана непригодно для изучения течений в окрестности звуковой линии, так как при $K = 0$ (K-функция Чаплыгина) функции Бергмана, а вместе с ними и функция ψ неограниченно возрастают. Поэтому решения Бергмана используются только при изучении чисто дозвуковых или чисто сверхзвуковых течений.

Ниже используются идеи Эйлера, примененные Г. А. Домбровским для построения новых аппроксимаций [4], сконструированы два общих точных решения в виде рядов для пары функции φ и ψ соответствующей системы уравнений газовой динамики, зависящие от произвольного комплексного потенциала.

1. Линейный оператор первого рода. Плоское установившееся движение идеальной сжимаемой жидкости, происходящее при адиабатическом процессе, характеризуется в переменных годографа скорости следующей системой уравнений типа Чаплыгина [5]:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\,\frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{1.1}$$

$$K = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{1}{\rho^{\gamma+1}}, \qquad s = \frac{1}{2}\left(h\ln\frac{h+r}{h-r} - \ln\frac{1+r}{1-r}\right) \tag{1.2}$$

$$h^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad r^2 = h^2 - \frac{2}{\gamma-1}\,\rho^{1-\gamma} \tag{1.3}$$

Здесь φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, K — функция Чаплыгина, зависящая неявно через плотность ρ от одной переменной s; γ — коэффициент Пауссона (для воздуха $\gamma = 1.4$); s, θ — псевдологарифмические переменные плоскости годографа скорости.

В точке торможения

$$\rho = 1, \quad r = 1, \quad s = -\infty, \quad K = 1 \qquad (v = 0)$$

в критической точке

$$\rho = \rho_* = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad K = 0 \quad (v = a_*)$$

Здесь v — скорость газа, a — скорость звука. Величины плотности ρ и скорости v отнесены к плотности и скорости звука в точке торможения.

При $K > 0$ течение дозвуковое и система уравнений (1.1) эллиптического типа. В этом случае будем искать интегралы системы (1.1) в виде линейных дифференциальных операторов

$$\varphi = \Omega(s) + \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(s)\,\frac{d^k w}{dz^k}, \qquad \psi = A + B\theta + \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(s)\,\frac{d^k w}{dz^k}$$

$$(z = s + i\theta) \tag{1.4}$$

Здесь $w(z)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $z = s + i\theta$;

$$\Omega(s), \quad \alpha_k(s), \quad \beta_k(s) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

искомые функции одного аргумента; A, B — произвольные постоянные.

Вносим (1.4) в (1.1)

$$\begin{gathered}\Omega' + \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k' w^{(k)} + \alpha_k w^{(k+1)}) = -K^{1/2}\left(B + \operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty} i\beta_k w^{(k+1)}\right)\\ \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} i\alpha_k w^{(k+1)} = K^{1/2}\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta_k' w^{(k)} + \beta_k w^{(k+1)})\end{gathered} \tag{1.5}$$

Эта система уравнений удовлетворится, если

$$\alpha_0' = 0, \qquad \beta_0' = 0, \qquad \Omega = -B\int K^{1/2}\,ds + C \tag{1.6}$$

$$\alpha_n' + \alpha_{n-1} = -\beta_{n-1}K^{1/2}, \qquad \alpha_{n-1} = -(\beta_{n-1} + \beta_n')K^{1/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, α_0, β_0 могут быть только произвольными постоянными $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$. Функции α_n и β_n $(n = 1, 2 \ldots)$ определяются через комбинацию от предыдущих функций α_{n-1}, β_{n-1} и, в конечном счете, все они выражаются только через $K(s)$ и постоянные α, β. Эти функции не зависят от краевых условий и могут быть найдены и затабулированы раз и навсегда по формулам

$$\alpha_n = -\int_{s_0}^{s}(\beta_{n-1}K^{1/2} + \alpha_{n-1})\,ds, \qquad \beta_n = -\int_{s_0}^{s}(\alpha_{n-1}K^{-1/2} + \beta_{n-1})\,ds \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

Здесь для унификации этих функций и не нарушая общности рассуждений потребуем, чтобы в какой-нибудь точке s_0 выполнялись равенства $\alpha_n(s_0) = 0$, $\beta_n(s_0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

В дальнейшем, в качестве s_0 возьмем критическую точку ($s_0 = 0$, $r = 0$), в которой местная скорость потока совпадает с местной скоростью звука. Тем самым на звуковой линии ($s = 0$) ряды в решении (1.4) вырождаются.

Практическое вычисление функций (1.7) значительно облегчается, если перейти от s к переменной r (1.3) и учесть, что из (1.2) будем иметь при $\gamma = 1.4$

$$K = r^2\left[\frac{1}{5}(6 - r^2)\right]^5, \qquad \frac{ds}{dr} = \frac{(h-1)\,r\,(r^2 + h)}{(6 - r^2)(1 - r^2)} \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1) \tag{1.8}$$

Последовательным интегрированием по частям формулы (1.7) приводятся к виду

$$\begin{gathered}\alpha_1 = -(\alpha s + \beta I_1), \qquad \beta_1 = -(\beta s + \alpha I_2)\\ \alpha_2 = \alpha\left(\frac{s^2}{2!} + I_3\right) + \beta s I_1, \qquad \beta_2 = \beta\left(\frac{s^2}{2!} + I_4\right) + \alpha s I_2\\ \alpha_3 = -\left[\alpha\left(\frac{s^3}{3!} + sI_3\right) + \beta\left(\frac{s^2}{2!}I_1 + I_5\right)\right], \quad \beta_3 = -\left[\beta\left(\frac{s^3}{3!} + sI_4\right) + \alpha\left(\frac{s^2}{2!}I_2 + I_6\right)\right]\\ \alpha_4 = \alpha\left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^2}{2!}I_3 + I_7\right) + \beta\left(\frac{s^3}{3!}I_1 + sI_5\right)\\ \beta_4 = \beta\left(\frac{s^4}{4!} + \frac{s^2}{2!}I_4 + I_8\right) + \alpha\left(\frac{s^3}{3!}I_2 + sI_6\right) \quad \text{и т. д.}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь

$$I_1 = \int_0^s K^{1/2}\,ds = \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} - I\operatorname{dem}(x_*)$$

$$I_2 = \int_0^s K^{-1/2}\,ds = -x^5 + \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} - I\operatorname{dem}(x_*),$$

$$I_3 = \int_0^s I_2 K^{1/2}\,ds, \qquad I_5 = \int_0^s I_4 K^{1/2}\,ds$$

$$I_7=\int_0^s I_6K^{1/2}\,ds,\ldots,\quad I_4=\int_0^s I_1K^{-1/2}\,ds,\ I_6=\int_0^s I_3K^{-1/2}\,ds,\ I_8=\int_0^s I_5K^{-1/2}\,ds,\ldots \tag{1.10}$$

$$x^2={}^1/_5(6-r^2)=\rho^{1-\nu},\quad x_*=\sqrt{{}^1/_2(\gamma+1)}=1.0954,\quad \rho_*=0.6334\quad (\gamma=1.4)$$

Из этих формул видно, что решение (1.4) непригодно для изучения течения в окрестности точки торможения, так как интегралы в (1.10) при $x=1$ ($r=1$) равны бесконечности.

В отличие от (1.7) формулы (1.9) позволяют вычислять α_n и β_n ($n=1, 2, \ldots$) только через одноименные функции и переходить по цепочке от предыдущей к последующей функции по простому правилу. Например, α_n может быть получена из α_{n-1} так: считая I_n ($n=1, 2, \ldots$) параметрами, взять от α_{n-1} интеграл по s, а затем прибавить выражение αI_{2n-1} (1.9), если n — четное и выражение βI_{2n-1}, если n — нечетное. Затем результат взять с обратным знаком. Этому правилу подчиняется и закономерность образования β_n, но только с той разницей, что если n — четное, то к результату прибавляется член αI_{2n} (1.9), а при n — нечетном член βI_{2n} ($n=1, 2, \ldots$). При этом α_n содержит интегралы I_{2n-1} (1.9) только с нечетными индексами, а β_n — с четными индексами ($n=1, 2, \ldots$).

Отметим еще, что функции (1.9) и ряды (1.4) знакопеременные. Численным счетом на ЦВМ функции α_n, β_n для $n=1, 2, \ldots, 20$ тубулировались. Эти функции монотонно и медленно изменяются от нуля при $s=0$ ($r=0$) до бесконечности при $r=1$ ($s=-\infty$). Их поведение близко к закономерности степенной функции, которая имеет место для формул несжимаемой жидкости (см. ниже (1.11)), но они ближе прилегают к оси os. Отметим здесь, что если в (1.1) положить $K=1$, то придем к уравнениям Коши — Римана для несжимаемой жидкости с комплексным потенциалом $w(-s+i\theta)$. Решение (1.4) в этом случае представляет собой ни что иное, как разложение комплексного потенциала $w(-s+i\theta)$ в ряд в точке $z=s+i\theta$, т. е. расположенной симметрично относительно мнимой оси. Действительно, полагая в (1.7) $K=1$ и $\alpha_0=\beta_0=\alpha$, придем к рекуррентным формулам

$$\alpha_k=\beta_k=\alpha(-1)^k\frac{s^k}{k!}\qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

Тогда, учитывая формулу Коши

$$w^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}\qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

можно записать

$$w(-s+i\theta)=\sum_{k-0}^{\infty}\alpha_k w^{(k)}(z)=\frac{\alpha}{2\pi i}\int_C\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2s}{\zeta-z}\right)^k d\zeta \tag{1.13}$$

Здесь C — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку z; порядок операций суммирования и интегрирования изменен, это можно сделать, если

$$\left|\frac{2s}{\zeta-z}\right|<1 \tag{1.14}$$

Учитывая, что ряд, входящий в (1.13), представляет геометрическую прогрессию и используя формулу Коши, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k w^{(k)}(z)=\frac{\alpha}{2\pi i}\int_C\frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-(-s+i\theta)}=\alpha w(-s+i\theta)$$

Здесь α несущественная постоянная и можно положить $\alpha=1$. Из (1.14) имеем

$$(\sigma-s)^2+(\vartheta-\theta)^2>4s^2\qquad (\zeta=\sigma+i\vartheta) \tag{1.15}$$

Неравенство (1.15) накладывает ограничение на произвол контура C. Охватывая точку z, он не должен пересекать круг радиуса $|2s|$ с центром в точке z. Это ограничение тем слабее, чем ближе s к нулю. Отсюда, сходимость ряда (1.13) с ростом $|s|$ ухудшается.

Формулы (1.11) и (1.13) дают

$$w(-s+i\theta)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2s)^k}{k!}\frac{d^kw}{dz^k} \tag{1.16}$$

При сверхзвуковом течении газа ($K<0$) система (1.1) гиперболического типа. Если положить $\chi=-K>0$, $s=it$ и перейти к характеристическим переменным $\xi=t-\theta$, $\eta=t+\theta$, то уравнения (1.1) примут вид [5]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-\sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}=\sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \tag{1.17}$$

Если решение системы (1.17) искать в виде

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)\,(f_2^{(k)}(\eta)-f_1^{(k)}(\xi)),\qquad \psi=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t)\,(f_1^{(k)}(\xi)+f_2^{(k)}(\eta)) \tag{1.18}$$

придем к тем же формулам (1.7), в которых K и s нужно заменить на χ и t; в этом можно убедиться, непосредственной проверкой.

Здесь $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ — произвольные функции, а верхние индексы есть производные от функций по их аргументам.

2. Линейный оператор второго рода. Построим решение для системы (1.1) в виде линейных интегральных операторов

$$\varphi=\omega(s)+\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(s)\int_{z_k^\circ}^{z}w(\zeta)\,d\zeta^k,\quad \psi=A+B\theta+\operatorname{Im}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(s)\int_{z_k^\circ}^{z}w(\zeta)\,d\zeta^k \tag{2.1}$$

Здесь $w(z)$ — произвольный комплексный потенциал от $z=s+i\theta$, а функции $\omega(s)$, $a_k(s)$, $b_k(s)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) подлежат определению. Под суммой в (2.1) понимается условная запись кратных интегралов, кратность которых определяется числом k. При $k=0$ интеграл отсутствует, т. е. вырождается в функцию $w(z)$.

Не нарушая общности, положим фиксированные постоянные $z_k^\circ=z^\circ=0$ $w(z_k^\circ)=0$ ($k=0, 1, 2, \ldots$).

Тогда, внося (2.1) в (1.1), легко убедиться, что система (1.1) будет удовлетворена, если наложить следующие условия:

$$\begin{gathered} a_0=-b_0K^{1/2},\qquad \omega'=-BK^{1/2} \\ a'_{n-1}+a_n=-b_nK^{1/2},\qquad a_n=-K^{1/2}(b'_{n-1}+b_n)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь каждая последующая функция $a_n(s)$, $b_n(s)$ ($i=1, 2,\ldots$) определяется через комбинацию от предыдущих функций a_{n-1}, b_{n-1} и, в конечном счете, все эти функции могут быть выражены только через $a_0(s)$, $b_0(s)$, $K(s)$ и тем или иным путем затабулированы раз и навсегда. Они не зависят от краевых условий.

Из второй группы уравнений (2.2) следует равенство

$$a'_{n-1}=K^{1/2}b'_{n-1}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.3}$$

При $n=1$ из (2.3) с учетом первой формулы (2.2) приходим к формулам

$$a_0=cK^{1/4},\qquad b_0=cK^{-1/4}\qquad (c=\text{const}) \tag{2.4}$$

Из (2.2) и (2.3) легко получить общие зависимости

$$b_n'+\frac{1}{4}K^{-1}K'b_n=-\frac{1}{2}K^{-1/2}a_{n-1}'',\qquad a_n=-(K^{1/2}b_n+a_{n-1}')\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.5}$$

Здесь функции a_0, b_0 определены формулами (2.4).

В (2.5) положим $n=1$ и потребуем, чтобы в некоторой точке s_1 выполнялось условие $b_1(s_1)=0$, тогда получим

$$b_1=-IK^{-1/4},\quad a_1=K^{1/4}(I-{}^1\!/_4K^{-1}K') \tag{2.6}$$

Здесь

$$I=\frac{1}{8}\int_{s_1}^{s}\left(K^{-1}K''-\frac{3}{4}K^{-2}K'^2\right)ds \tag{2.7}$$

Численный расчет показывает, что в качестве s_1 удобно взять $s_1 = -\infty$ (точка торможения). При таком выборе s_1 из (2.6) и (2.7) следует, что в точке торможения $a_1(-\infty) = 0$. Из формул (1.2) можно записать

$$K^{-1}K'' - \frac{3}{4}K^{-2}K'^2 = \frac{(\gamma+1)M^4}{4(1-M^2)}[(3\gamma-1)M^4 + 4(3-2\gamma)M^2 - 16] \tag{2.8}$$

Формулу (2.7) при помощи (2.8) приводим к виду [7].

$$I = \int_1^y \left(\alpha y^2 + \beta + \frac{\delta}{y^2} + \frac{\varepsilon}{y^4}\right)\frac{dy}{h^2 - y^2} \qquad (y^2 = 1 - M^2) \tag{2.9}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{(3\gamma-1)h^2}{16}, \quad \beta = -\frac{(\gamma+1)h^2}{16}, \quad \delta = -\frac{(7\gamma-5)h^2}{16}, \quad \varepsilon = \frac{5(\gamma+1)h^2}{16}, \quad h^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

Вычисление интеграла (2.9) дает [7]

$$I = -\alpha y - \frac{1}{h^2}\left(\delta + \frac{\varepsilon}{h^2}\right)\frac{1}{y} + \frac{\varepsilon}{3h^2y^3} + \frac{1}{2h}\left(h^2\alpha + \beta + \frac{\delta}{h^2} + \frac{\varepsilon}{h^4}\right)\ln\frac{h+y}{h-y} - Idem(1)$$

Эти формулы показывают, что решения (2.1) при условиях (2.2) непригодны для изучения течения в окрестности звуковой линии, так как при $K = 0$ функции b_0, a_1, b_1, в силу формул (2.4), (2.6) и (2.10), неограниченно возрастают.

Функции (1.4) и (2.1) могут быть использованы для построения течения во всей области, начиная от точки торможения и кончая звуковой точкой, если применить метод склеивания этих решений путем аналитического продолжения через общую границу областей, одна из которых содержит точку остановки, а вторая — критическую точку.

Отметим, что формулы (2.1) могут быть соответствующим образом перестроены и приспособлены для изучения сверхзвуковых течений газа аналогично тому, как делалось выше (см. формулу (1.17)). При этом зависимости (2.5) не изменятся.

3. О сходимости рядов. Рассмотрим кратко вопрос о сходимости рядов, входящих в (1.4). Воспользуемся гипотетическим течением Зауэра — Христиановича, которое характеризуется функцией сравнения вида (см., например, [4])

$$K^{*1/2} = a\sigma^2 \qquad (\sigma = s - s_0, \ a, \ s_0 - \text{const}) \tag{3.1}$$

Известно, что имеет место неравенство (см. фиг. 2 в [4])

$$K < K^*, \qquad \left|\frac{d^nK}{d\sigma^n}\right| < \left|\frac{d^nK^*}{d\sigma^n}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

Здесь K — точное значение функций Чаплыгина, а K^* — гипотетическое, определенное формулой (3.1). Функцию K^* выбираем за мажоранту.

Внося (3.1) в (1.7) и отмечая звездочкой все функции, относящиеся к мажорантной функции, получим

$$\alpha_n^* = -\int_0^\sigma (a\sigma^2\beta^*_{n-1} + \alpha^*_{n-1})\,d\sigma, \qquad \beta^* = -\int_0^\sigma\left(\frac{\alpha^*_{n-1}}{a\sigma^2} + \beta^*_{n-1}\right)d\sigma \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

Зависимости (3.3) легко представить в виде простых рекуррентных формул ($\alpha = \alpha_0^* = \text{const}$, $\beta = \beta_0^* = \text{const}$):

$$\alpha_1^* = -\left(\alpha\sigma + a\beta\frac{\sigma^3}{3}\right), \qquad \beta_1^* = \frac{\alpha}{a\sigma} - \beta\sigma$$

$$\alpha_n^* = a\beta\frac{(-1)^n 2^n n}{(n+2)!}\sigma^{n+2}, \qquad \beta_n^* = \beta\frac{(-1)^n 2^n\sigma^n}{(n+1)!} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{3.4}$$

Используем формулу (1.12) и вносим (3.4) в (1.4), затем группируем члены и меняем местами знаки суммирования и интегрирования.

При этом предполагается, что ряд (1.4) абсолютно и равномерно сходится, а область сходимости подлежит определению. Тогда получим

$$\varphi=\Omega+\operatorname{Re}\left[\alpha\left(w-\sigma\frac{dw}{dz}\right)+a\beta\frac{\sigma^2}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\sum_{n=1}^{\infty}nC_nt^n\,d\zeta\right] \tag{3.5}$$

$$\psi=A+B\theta+\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha}{a\sigma}\frac{dw}{dz}+\frac{\beta}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\sum_{k=0}^{\infty}D_kt^k\,d\zeta\right]$$

Здесь

$$C_n=\frac{n!}{(n+2)!},\quad D_k=\frac{k!}{(k+1)!},\quad t=-\frac{2\sigma}{\zeta-z}\quad\begin{pmatrix}n=1,2,\ldots\\k=0,1,\ldots\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Замечаем, что эти коэффициенты изменяются так же, как в гипергеометрическом ряде

$$C_{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+3)}C_n,\qquad D_{k+1}=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+1)}D_k$$

Поэтому (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi&=\Omega+\operatorname{Re}\left[\alpha\left(w-\sigma\frac{dw}{dz}\right)+a\beta\frac{\sigma^2}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\frac{d}{dt}F(1,1,3,t)\,d\zeta\right]\\ \psi&=A+B\theta+\operatorname{Im}\left[\frac{\alpha}{a\sigma}\frac{dw}{dz}+\frac{\beta}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}F(1,1,2,t)\,d\zeta\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

Если в (3.7) положить $\beta=0$, то пара функций

$$\varphi=\Omega+\alpha\operatorname{Re}\left(w-\sigma\frac{dw}{dz}\right),\quad \psi=A+B\theta+\frac{\alpha}{a\sigma}\operatorname{Im}\frac{dw}{dz}\quad\left(\Omega=-Ba\frac{\sigma^3}{3}+c\right) \tag{3.8}$$

представляет собой решение системы (1.1) (3.1).

Вводя обозначение $dw/dz=\Phi(z)$, придем к формулам, указанным Зауэром (см., например, [4]). Эти формулы непригодны для изучения течения в окрестности точки $\sigma=0$ $(s=s_0)$ и, следовательно, в окрестности звуковой линии, если $s_0=0$ так как при $\sigma=0$ функция ψ (3.8) обращается в бесконечность.

Если же в (3.7) положить $\alpha=0$, то пара функций для (3.1)

$$\begin{aligned}\varphi&=\Omega+a\beta\sigma^2\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\frac{d}{dt}F(1,1,3,t)\,d\zeta\\ \psi&=A+B\theta+\beta\operatorname{Im}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}F(1,1,2,t)\,d\zeta\end{aligned} \tag{3.9}$$

также является решением системы (1.1), (3.1), которое в отличие от (3.8) ограничено в точке $\sigma=0$ $(s_0=0)$ и, следовательно, пригодно для изучения трансзвуковых течений.

Формулы (3.9) могут быть записаны в элементарных функциях, если учесть [8, 9], но это не входит в нашу задачу.

Решение (3.9), по-видимому, в литературе не встречается. Область сходимости рядов (3.5) при $\alpha=0$, $s_0=0$ та же (1.14), что и для ряда (1.4) при $K=1$, т. е. и для (1.16). Легко показать, что область сходимости соответствующих рядов не изменяется, если вместо (3.1) взять степенную функцию $K=a\sigma^p$ (p — целое положительное или отрицательное число) (см., например, [9]).

В заключение отметим только, что, исходя из формул (3.1), (2.5), нетрудно доказать, что ряды, входящие в (2.1), абсолютно и равномерно сходятся в области

$$\left|\frac{\zeta-z}{2s}\right|\leqslant a<1$$

т. е. текущая координата $\zeta=\sigma+i\vartheta$ не должна выходить за пределы круга радиуса $|2s|$ с центром в точке z. Положение точки ζ тем стесненнее, чем меньше $|s|$. Сходимость рядов (2.1) улучшается с ростом $|s|$.

4. Об одном классе точных частных решений системы (1.1). Если в (1.4) и (2.1) вместо рядов рассматривать конечные суммы ($k = 0, 1, 2, \ldots, \nu$), то, как легко видеть из (1.5), к системе уравнений 2ν-уравнений (1.6) ($n = 1, 2 \ldots, \nu$) прибавится еще только одно уравнение вида

$$\alpha_\nu = -K^{1/2}\beta_\nu \tag{4.1}$$

Полученная таким образом система $(2\nu+1)$-уравнений будет замкнута, если, наряду с α_n, β_n ($n = 1, 2, \ldots, \nu$), считать и функцию K искомой функцией. Таким путем будем приходить к тому или иному гипотетическому газу. Например, при $\nu = 0$ придем к аппроксимации и решениям Зауэра — Христиановича, а при $\nu = 1$ — к аппроксимации и решениям Г. А. Домбровского [4]. Однако конечные суммы в (1.4), (2.1) с точным значением функции Чаплыгина (1.2) также можно рассматривать в качестве приближенных решений для системы (1.1).

Из формул (1.4) следует класс точных частных решений системы (1.1), аналогичный виду, рассмотренному в иных переменных и иным путем [10].

Легко непосредственной подстановкой убедиться, что если в (1.4) в качестве комплексного потенциала w взять конечный многочлен или степенную функцию, то дополнительного уравнения (4.1) не появится, и формулы (1.4) дадут решения при точном значении функции Чаплыгина. Например, полагая $w = z^2$ в (1.4) и используя формулы и обозначения (1.6), (1.9), (1.10), получим

$$\varphi = c - BI_1 + \alpha(2I_3 - \theta^2), \qquad \psi = A + (B - 2\alpha I_2)\theta \tag{4.2}$$

Частное течение, которое характеризует решение (4.2) и ему аналогичные, с физической точки зрения могут оказаться не интересными [10]. Но эти решения несомненно могут быть использованы для апробации численных методов и аналитических приближенных методов решения системы уравнений (1.1).

5. Симметричное обтекание клина со звуковой скоростью. Допустим, что плоская газовая струя, имеющая в бесконечности скорость, равную скорости звука и заданную ширину, симметрично обтекает клин со стороной l и углом λ, образованным с осью симметрии (фиг. 2 работы [3]).

С концов клина срываются свободные струи. На этих струйных линиях и на линиях, ограничивающих газовую струю, скорость постоянна и равна скорости звука. Носик клина будет точкой торможения. В силу симметрии, нулевая линия тока, подходящая из бесконечности к носику профиля, будет прямой. Тогда на линиях, ограничивающих газовую струю сверху $\psi = Q$ и снизу $\psi = -Q$, где Q — полурасход газа. Обозначим через μ угол между направлением сбегающей с верхней кромки клина струи с осью ox на бесконечности. Начало координат поместим на оси симметрии.

Выпишем граничные условия для функции тока ψ только для нижней половины течения

$$\begin{aligned} &\psi = 0, \quad \theta = 0, \quad -\infty < s < 0; && \psi = 0, \quad \theta = \lambda, \quad -\infty < s < 0 \\ &\psi = 0, \quad \mu < \theta < \lambda, \quad s = 0; && \psi = -Q, \quad 0 < \theta < \mu, \quad s = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Эти условия в плоскости годографа $s\theta$ приводят к внутренней задаче Дирихле. Разобьем эту область на две части при помощи линии, проходящей из некоторой фиксированной точки $s_1 > -\infty$. Пусть первая область содержит точку торможения ($s = -\infty$), а вторая — звуковую точку ($s = 0$) (фиг. 4 работы [3]).

В качестве функции w в (1.4) и (2.1), которая позволит удовлетворить все граничные условия (5.1), возьмем функцию вида

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{n\omega z} + B_n e^{-n\omega z}) \qquad \left(\omega = \frac{\pi}{\lambda}\right) \tag{5.2}$$

Здесь A_n, B_n — произвольные постоянные.

В первой области используем решение (2.1) а во второй — (1.4). Тогда, внося (5.2) в эти решения и выделяя мнимые части, запишем по областям для функции тока следующие выражения (знаки суммирования меняем местами):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Delta_n(s) \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\lambda}\right) \qquad (-\infty < s < s_1) \\ \psi_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \delta_n(s) + C_n \gamma_n(s)] \sin\frac{n\pi\theta}{\lambda} \qquad (0 < s < s_1) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k(s)}{(n\omega)^k} e^{n\omega s}, \quad \delta_n = \sum_{k=0}^{\infty} (n\omega)^k \beta_k(s) e^{n\omega s}, \quad \gamma_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (n\omega)^k \beta_k(s) e^{-n\omega s} \tag{5.4}$$

Функции (5.3) удовлетворяют первым условиям (3.1). Удовлетворим и другие условия, если потребуем

$$\psi_2(0, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \delta_n(0) + C_n \gamma_n(0)) \sin \frac{n\pi\theta}{\lambda} = \begin{cases} -Q & (0 < \theta < \mu) \\ 0 & (\mu < \theta < \lambda) \end{cases} \tag{5.5}$$

Применяя к (5.5) теорию рядов Фурье, получим

$$B_n \delta_0 + C_n \gamma_0 = \frac{2Q}{\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi\mu}{\lambda}\right) \tag{5.6}$$

Условия аналитического продолжения [6]

$$\psi_1(s_1, \theta) = \psi_2(s_1, \theta), \quad \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial s}\right|_{s=s_1} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial s}\right|_{s=s_1}$$

приводят к формулам

$$A_n \Delta_1 - B_n \delta_1 - C_n \gamma_1 = 0, \qquad A_n \Delta_1' - B_n \delta_1' - C_n \gamma_1' = 0 \tag{5.7}$$

Решая $3n$ — уравнений (5.6) (5.7), найдем $3n$-постоянных

$$A_n = D(\gamma_1 \delta_1' - \delta_1 \gamma_1'), \quad B_n = D(\gamma_1 \Delta_1' - \Delta_1 \gamma_1'), \quad C_n = D(\Delta_1 \delta_1' - \delta_1 \Delta_1'), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$D = \frac{2Q}{n\pi} [(\gamma_1 - \delta_1) \Delta_1' - (\delta_1' - \gamma_1') \Delta_1]^{-1} \left(1 - \cos \frac{n\pi\mu}{\lambda}\right), \quad \Delta_1 = \Delta_n(s_1), \ldots, \gamma_1' = \left.\frac{d\gamma_n}{ds}\right|_{s=s_1}$$

Здесь учтено, что, в силу формул (1.8) и (5.4), имеем

$$\delta_0 = \delta_n(0) = \beta, \qquad \gamma_0 = \gamma_n(0) = \beta \qquad (\beta = 1)$$

Итак, функции ψ_1, ψ_2 (4.3) известны. Давление на клин и форму свободных струй теперь найти нетрудно [3]. На этом останавливаться не будем.

Автор признателен Г. А. Домбровскому за полезные беседы по затронутым здесь вопросам.

Поступило 24 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Бергман С. Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М., Изд-во «Мир», 1964.
2. Мизе Р., Шиффер М. О методе Бергмана интегрирования уравнений плоского движения сжимаемой жидкости. Сб. «Проблемы механики», Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 489—518.
3. Назаров Г. И. Давление газовой струи на разнобокий клин. ПМТФ, 1962, № 1, стр. 25—33.
4. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. М., Изд-во «Наука», стр. 38—45.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Изд-во «Наука», 1966, стр. 372—381.
6. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
7. Назаров Г. И. Функции Бергмана в теории течений сжимаемой жидкости. Уч. зап. Томского ун-та, 1964, № 49, стр. 3—13.
8. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1948.
9. Назаров Г. И., Пучков А. А. Аналитическое решение системы уравнений при осесимметрическом течении несжимаемой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
10. Томилов Е. Д. Об одном виде точных частных решений уравнений плоского безвихревого движения газа. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.