Итак, количественные характеристики потери устойчивости, полученные в данной работе для существенно двумерного основного течения, достаточно хорошо совпадают с известными результатами Линя и других авторов для течения в пограничном слое на плоской пластинке, которое считалось параллельным. Это дает основание при определении критических характеристик устойчивости в пограничном слое не учитывать зависимость профиля скорости стационарного движения жидкости от координаты x.

Поступило 1 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Комаров А. М. О развитии возмущений течения вязкой жидкости в плоском канале. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
3. Комаров А. М. Применение метода типа Галеркина для исследования развития возмущений течения вязкой жидкости в плоском канале. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем. механ. астроном., 1959, № 2.
4. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, нов. серия, 1940, т. 4, вып. 3.
5. Tollmien W. Über die Enstehung der Turbulenz, Ges. Wiss. Cöttingen, Math. Phys,. 1929, klasse Nachr., pp. 21—44.
6. Shen S. F. Calculated ampified oscillations in the plane poisenille and blassius flow. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 1, pp. 62—64.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В. Н. ГУСЕВ, А. В. ЖБАКОВА

(Москва)

Одномерные стационарные течения вязкого, теплопроводного газа рассматривались ранее в ряде работ. В случае стока, например, этим исследованиям посвящены работы [1, 2]. В работе [1] задача решалась в предположении, что коэффициенты вязкости μ и теплопроводности k постоянны, а число Прандтля имеет некоторое фиксированное значение. В работе [2] решение для плоского стока строится в двух случаях. В первом предполагается, что газ вязкий, но нетеплопроводный ($\mu = \text{const}$, $k = 0$), а во втором — невязкий, но теплопроводный ($\mu = 0$, $k = \text{const}$). В данной работе исследуется течение от сферического стока при конечном значении давления на бесконечности в предположении, что коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры по степенному закону, число Прандтля постоянно.

1. Система одномерных уравнений Навье — Стокса для вязкого теплопроводного газа в случае сферической симметрии имеет вид

$$\rho u r^2 = \text{const}$$

$$\rho u \frac{du}{dr} + \frac{dp}{dr} = \frac{4}{3}\mu\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2}\right] + \frac{4}{3}\frac{d\mu}{dr}\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right]. \tag{1.1}$$

$$r^2\left[\rho u\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}RT + \frac{u^2}{2}\right) - \mu\frac{d}{dr}\left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{RT}{\sigma} + u^2\right) + \frac{2}{3}\frac{\mu u}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u)\right] = \text{const}$$

Здесь u — скорость газа, ρ, p, T — соответственно, плотность, давление и температура, r — расстояние от центра симметрии, μ — коэффициент вязкости, R — газовая постоянная, $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей, σ — число Прандтля.

Система (1.1) замыкается заданием уравнения состояния и зависимостью коэффициента вязкости от температуры. В нашем случае

$$p = \rho RT, \qquad \mu \sim T^n \tag{1.2}$$

Приведем систему (1.1) и (1.2) к безразмерному виду. Введем следующие размерные константы: $Q = 4\pi\rho u r^2$ — расход газа, p_∞, ρ_∞, T_∞, μ_∞ — значения давления, плотности, температуры и коэффициента вязкости при $r = \infty$. Безразмерные величины определим следующим образом

$$w = \frac{u}{\sqrt{\varkappa RT_\infty}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{RT_\infty}{p_\infty}\rho, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}$$
$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty} = \theta^n, \quad y = \frac{l}{r} = \left[\frac{|Q|\sqrt{\varkappa RT_\infty}}{4\pi\varkappa p_\infty}\right]^{1/2}\frac{1}{r} \tag{1.3}$$

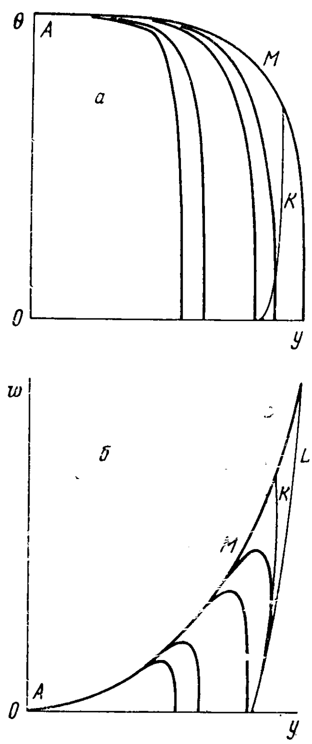
После исключения давления и плотности при помощи уравнений неразрывности и состояния система (1.1) и (1.2) с учетом (1.3) может быть аналогично [3] приведена к следующему безразмерному виду:

$$(\varkappa w^2 - \theta)w' + w\theta' + \frac{2w\theta}{y} =$$

$$= -\frac{\varkappa w^2\theta^n}{C}\left(w'' - \frac{2w}{y}\right) - \frac{n\varkappa w^2\theta^{n-1}\theta'}{C}\left(w' + \frac{w}{y}\right) \tag{1.4}$$

$$\theta + \frac{\varkappa-1}{2}\left(1 + \frac{2\theta^n}{Cy}\right)w^2 + \frac{\theta^n}{C}\left[\frac{3\theta'}{4\sigma} + (\varkappa-1)ww'\right] = \alpha \qquad \left(C = \frac{3Q}{16\pi\mu_\infty l}\right)$$

Здесь α — некоторая безразмерная константа, смысл которой будет установлен позже, штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной y. При $C > 0$ газ движется от центра симметрии (источника), а при $C < 0$ — к центру (сток).



Фиг. 1

Решение системы (1.4) в окрестности точки $y = 0$, для которого давление стремится к конечному значению, имеет следующий вид:

$$w = y^2(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \ldots)$$

$$\theta = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \ldots \tag{1.5}$$

Из уравнения неразрывности $Q = 4\pi\rho ur^2$ и граничного условия для температуры $T = T_\infty$ при $y = 0$ следует $a_0 = b_0 = 1$. Последующие коэффициенты этих рядов определяются однозначно через параметры α, C, $\varkappa$, n и σ, например,

$$a_1 = b_1 = {}^4/_3\sigma C(\alpha - 1),$$

$$a_2 = b_2 = -{}^8/_9\sigma^2C^2(\alpha - 1)[1 + n(\alpha - 1)]$$

Выясним теперь смысл входящей в систему (1.4) константы α. Для этого выпишем выражение для количества тепла, проходящего через сферическую поверхность в единицу времени

$$q = -\frac{4\pi\mu c_p}{4\sigma C}r^2\frac{dT}{dr} = \frac{3c_pT_\infty Q}{\sigma}\theta^n\theta' \tag{1.6}$$

Здесь c_p — коэффициент теплоемкости газа при постоянном давлении. С учетом разложения (1.5) величина q_0 при $y = 0$ может быть представлена в виде

$$q_0 = c_pT_\infty Q(\alpha - 1)$$

Отсюда следует, что константа α определяет поток тепла в бесконечно удаленной точке $r = \infty$ ($y = 0$). При $\alpha = 1$, $q_0 = 0$, и для разложения (1.5) справедливы следующие соотношения:

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = 0$$

$$a_4 = {}^1/_2[\varkappa - 2\sigma(\varkappa - 1)], \qquad b_4 = -\sigma(\varkappa - 1) \text{ и т. д.}$$

2. Рассмотрим течение от сферического стока ($C < 0$) при $\alpha = 1$. Исследуем основные свойства системы (1.4). Общая картина поля интегральных кривых в зависимости от параметра C при $n = 1$, $\varkappa = {}^7/_5$ и $\sigma = {}^3/_4$ представлена на фиг. 1: в переменных θ, y — на фиг. 1, *а*, в переменных w, y — на фиг. 1, *б*. Все интегральные кривые на фигуре выходят из точки A, соответствующей бесконечно удаленной точке $r = \infty$ ($y = 0$). При приближении к центру симметрии $r \to 0$ ($y \to \infty$) температура θ монотонно убывает, обращаясь в нуль при конечном значении $y = y_*$ (фиг. 1, *а*). В плоскости (wy) условие $\theta = 0$ выполняется на предельной линии, состоящей из отрезка оси y и кривой L (фиг. 1, *б*). В окрестности этой линии функции w и θ при $n = 1$ имеют следующее разложение:

$$w = w_* + c_1(y_* - y)^{1/2} + \ldots, \qquad \theta = d_1(y_* - y)^{1/2} + \ldots \tag{2.1}$$

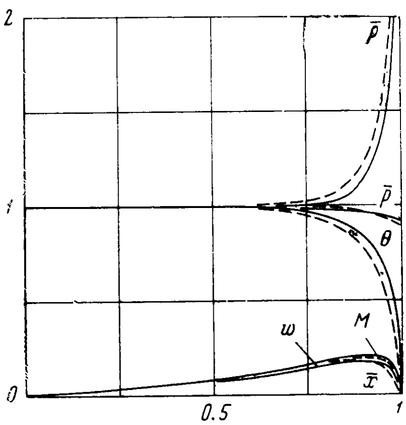
Для входящих в эти выражения коэффициентов справедливо соотношение

$$\frac{\varkappa-1}{2}\cdot w_*^2-\frac{3}{8\sigma C}d_1^2-\frac{\varkappa-1}{2C}w_*c_1d_1=\alpha$$

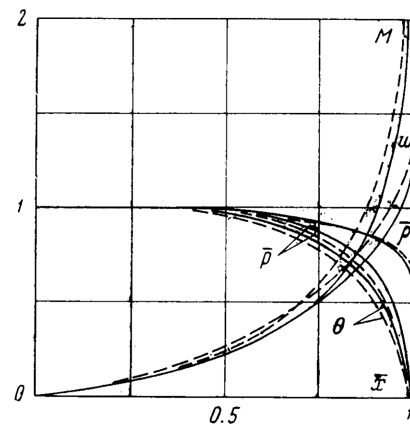
Область определения решения ограничена предельной линией и огибающей M (фиг. 1), соответствующей решению системы (1.4) при $C=0$. С ростом параметра C ордината предельной линии y_* уменьшается, обращаясь в нуль при стремлении $C\to\infty$.

Система уравнений (1.4) решалась численно на ЭВМ. В окрестности точки $y=0$ решение представлялось рядом (1.5), коэффициенты которого вычислялись методом [4]. В дальнейшем, начиная с некоторого конечного y, интегрирование проводилось методом Рунге — Кутта. В окрестности точки $y=y_*$ численное решение склеивалось с асимптотическим (2.1), в результате чего определялись коэффициенты w_*, c_1, d_1.

Как показали расчеты, в зависимости от параметра C течение в окрестности предельной линии было либо дозвуковым, либо сверхзвуковым. В первом случае $w_*=0$,



Фиг. 2



Фиг. 3

и в плоскости (wy') предельная линия для этого класса интегральных кривых представляла собой отрезок оси y (фиг. 1, *б*). Во всем поле течения скорость газа была дозвуковой. Во втором случае $w_*\neq 0$, и предельная линия для этого класса интегральных кривых была кривая L (фиг. 1, *б*). Течение в этом случае состояло из двух областей: дозвуковой и сверхзвуковой. Переход через скорость звука происходил на кривой K (фиг. 1).

Введем понятие длины свободного пробега молекул при $r=\infty$:

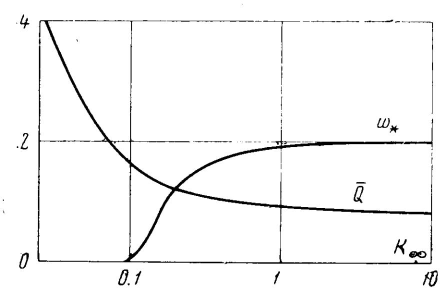
$$\lambda_\infty=\frac{16}{5\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\mu_\infty\sqrt{RT_\infty}}{p_\infty}$$

В качестве характерного размера течения примем радиус предельной линии $r_*=$ $=y_*l$. Тогда параметр C однозначно определит число Кнудсена

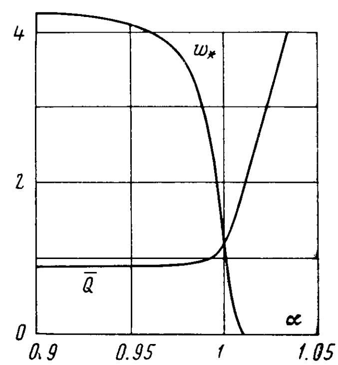
$$K_\infty=\frac{\lambda_\infty}{r_*}=\frac{12\sqrt{\varkappa}\,y_*}{5\sqrt{2\pi}\,|C|}$$

При двух значениях этого числа $K_\infty=0.0286$ и 0.208 результаты численных расчетов представлены на фиг. 2, 3 (сплошные кривые). На них приведены зависимости скорости w, температуры θ, давление $\bar p$, плотности $\bar\rho$ и числа Маха M потока от координаты $\bar x=r_*/r$ при $n=1$, $\varkappa={}^7/_5$, $\sigma={}^3/_4$. При $K_\infty=0.0286$ (фиг. 2) течение относится к случаю, когда в окрестности предельной линии и скорость, и температура потока обращается в нуль. В этом случае при $\bar x\to 1$ давление остается конечным, а плотность — неограниченно возрастает. При другом значении числа $K_\infty=0.208$ (фиг. 3) скорость и плотность потока в окрестности предельной линии остаются конечными, а давление и температура стремятся к нулю. При приближении к центру симметрии число Маха неограниченно возрастает. В отличие от идеального стока здесь оказывается возможным непрерывный переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой.

Физический смысл полученного здесь решения можно мыслить себе как установившееся течение вязкого теплопроводного газа, возникающее при помещении в неограниченное пространство сферического тела радиуса r_*, температура поверхности которого равна нулю. Суммарная интенсивность стока $\bar Q=Q/4\pi r_*^2\rho_\infty\sqrt{\varkappa RT_\infty}$ в зависимости от числа, K_∞ приведена на фиг. 4. Там же даны значения скорости w_* при $r = r_*$. При $K_\infty \lessgtr 0.1$ $w_* = 0$, и в этой области интенсивность $\bar{Q}$ увеличивается по мере уменьшения числа K_∞. При $K_\infty \gtrless 0.1$ скорость w_* остается конечной. Ее величина за счет диссипативных процессов оказывается меньше соответствующей максимальной скорости для невязкого потока при температуре торможения T_∞.



Фиг. 4



Фиг. 5

Представленные выше результаты получены в предположении, что справедливы уравнения Навье — Стокса. Очевидно, что с ростом числа K_∞ область, в которой эти уравнения справедливы, ограничена. Для того чтобы определить границу применимости уравнений Навье — Стокса, найдем ту область, в которой отношение дополнительных членов в уравнениях Барнета к членам в уравнениях Навье — Стокса, обусловленных наличием вязкости, становится величиной порядка единицы [3]. Согласно [5], указанное отношение при $n = 1$ будет

$$\beta = \frac{\mu}{p}\frac{du}{dr} \sim \frac{1}{C} w w' \sim \frac{K_\infty w w'}{y_*} \tag{2.2}$$

Из (2.2) с учетом (2.1) следует, что отношение β в окрестности предельной линии остается постоянным при $w_* = 0$ и неограниченно возрастает при $w_* \neq 0$. Однако, как показывают численные расчеты, в обоих случаях можно найти такое $\bar{x}_0$, начиная с которого при $\bar{x} < \bar{x}_0$ величина $\beta < 0.1$. Иными словами, в рассматриваемом течении всегда можно указать область, в которой полученное решение уравнений Навье — Стокса соответствует истине.

3. Аналогичные рассмотрения можно провести при других значениях параметров.

Влияние показателя степени n проиллюстрировано на фиг. 2, 3, где при двух значениях числа $K_\infty = 0.0297$ (фиг. 2) и 0.220 (фиг. 3) приведены зависимости параметров потока от координаты $\bar{x}$ при $n = {}^1/_2$, $\varkappa = {}^7/_5$, $\sigma = {}^3/_4$ (пунктирные кривые). Как показывает сравнение, изменение закона вязкости не приводит к существенным изменениям в поле течения.

Интересные свойства течения обнаруживаются при $\alpha \neq 1$, т. е. при подводе ($\alpha > 1$) или отводе ($\alpha < 1$) тепла в бесконечно удаленной точке $r = \infty$ ($y = 0$). Интенсивность стока $\bar{Q}$ и значение скорости w_* при $r = r_*$ в зависимости от α при $C = -5$, $n = 1$, $\varkappa = {}^7/_5$, $\sigma = {}^3/_4$ приведены на фиг. 5. При $\alpha < 1$ отвод тепла приводит к существенному росту скорости w_*. В этом случае энергия стока переходит в энергию упорядоченного движения молекул. При $\alpha > 1$ скорость $\bar{w}_*$ быстро обращается в нуль.

В заключение авторы благодарят В. С. Галкина, М. Н. Когана и В. С. Николаева за полезные обсуждения.

Поступило 22 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu T. Two dimensional sink flow of a viscous, compressible fluid; heat-conducting cylindrical shock waves. Quart. of Applied Wath., 1956, vol. 13, No. 4.
2. Проснак В. Ударная волна в двумерном радиальном газовом потоке. Сб. пер. «Механика». Изд. иностр. лит., 1957, № 6.
3. Ладыженский М. Д. Об истечении вязкого газа в пустоту. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
4. Николаев В. С. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом разложения в степенные ряды на быстродействующих вычислительных машинах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965.
5. Tsien H. S. Superaerodinamics Mechanics of Rarefield Gases. J. Aeronaut Sci., 1946, vol. 13, No. 12.