

Из рассмотрения фиг. 7 видно, что полученные в настоящей работе амплитудные значения поперечной силы, определенные интегрированием пульсаций давления до точки отрыва турбулентного пограничного слоя, вызванных периодическим срывом вихрей, частота которых удовлетворяет постоянству числа Струхала $S \approx 0.2$, хорошо согласуются со значениями, полученными Фангом на закризисных режимах и Дрешером [6] на докризисных (светлые точки).

Поступило 9 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. и Штейнберг Р. И. Исследование потока за плохообтекаемыми телами. Тр. ЦАГИ, 1940, № 482.
2. Блюмина Л. Х., Захаров Ю. Г. Колебания цилиндрических тел в воздушном потоке. Сб. «Исследование по динамике сооружений», Госстройиздат, 1957.
3. Барштейн М. Ф. Динамический расчет высотных сооружений цилиндрической формы. Сб. «Исследование по динамике сооружений», Госстройиздат, 1957.
4. Fung Y. C. Fluctuating Lift and Drag Acting on a Cylinder in a Flow and Supercritical Reynolds Number. J. Aerospace Sci., 1960, vol. 27, Num. 11.
5. Roshko A. Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Very High Reynolds Number. J. Fluid Mechanics., 1961, vol. 10, pt. 3.
6. Drescher H. Messung der auf quezangestomte Zylinder ausgeübten zeitlich verändernden Drücke. Z. Flugwiss, 1956, B. 4, H. 1/2, S. 17—21.

ОБ УЧЕТЕ ДВУМЕРНОСТИ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

А. М. КОМАРОВ (Москва)

Рассматривается развитие малых возмущений в начальном участке плоского канала. Профиль скорости основного стационарного движения жидкости существенно зависит от продольной координаты вдоль твердой стенки и задается приближенно. Задача решается в линейной постановке методом типа Галеркина.

В работе приводятся распределение энергии поля возмущений, картина линий тока и определены критические характеристики потери устойчивости. Проводится сравнение с классическими результатами Линя для течения в пограничном слое на плоской пластинке, которое считалось параллельным.

В работах по исследованию устойчивости ламинарного течения в пограничном слое на плоской пластинке основное стационарное течение предполагается существенно параллельным (см., например [1]). На самом же деле это течение не является строго параллельным. Поэтому необходимо рассмотреть течение в пограничном слое на плоской пластинке как двумерное и выяснить, как влияет на характеристики потери устойчивости зависимость течения в пограничном слое от координаты x . Самостоятельный интерес представляет также и характер развития малых возмущений не только во времени, но и по координатам в двумерном случае.

Для некоторого выяснения этих вопросов была поставлена задача об изучении развития возмущений в начальном участке плоского канала шириной $2h$, образованного двумя полубесконечными параллельными стенками. Начало оси x выбрано в середине расстояния между стенками во входном сечении. Пусть при $x = 0$ скорость по всей ширине канала одинакова и равна U_0 . На стенках должно выполняться условие прилипания $u = v = 0$ при $y = \pm h$, $x > 0$.

Пусть на это основное течение наложено двумерное нестационарное возмущающее движение, определяемое функцией тока $\psi(x, y, t)$ и давлением $p'(x, y, t)$. Как основное, так и результирующее движения жидкости считаются удовлетворяющими уравнениям Навье — Стокса. Наложенное возмущение считается малым в том смысле, что слагаемые в уравнениях Навье — Стокса для результирующего движения, содержащие произведения возмущающих величин, пренебрежимо малы по сравнению с остальными слагаемыми.

Для искомой функции $\psi(x, y, t)$ получаем в линейной постановке уравнение в безразмерной форме

$$L(\psi) \equiv \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi + u \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + F_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} - F_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = f(x, y, t) \quad (1)$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — скорости основного течения

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad F_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad R = \frac{\Gamma U_0 h}{\nu}$$

при следующих граничных условиях:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \quad \psi \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad \psi = 0 \text{ при } t = 0 \quad (2)$$

Γ — граница области Ω ($x \geq 0, |y| \leq 1$).

В уравнении (1) функция $f(x, y, t)$ будет известной; она появляется в результате сведения граничных условий для $\psi(x, y, t)$ к нулевым. (Более подробно о постановке задачи и о выводе уравнения (1) см. работу [2]).

Безразмерный профиль скорости для u в начальном участке плоского канала был выбран приближенно в виде

$$u(x, y) = \frac{3}{2}(1 - y^2) - \frac{15}{32} \left(1 - \frac{16}{5}y^2 + \frac{11}{5}y^{32} \right) \exp \left(-\frac{100x}{R} \right) \quad (3)$$

поперечная компонента скорости $v(x, y)$ определялась из уравнения неразрывности для основного течения.

Здесь вместо одной пластинки взят плоский канал лишь для упрощения граничных условий по координате y . Характер течения вблизи одной из рассматриваемых стенок в начале переходного участка канала будет таким же, как и в пограничном слое на плоской пластинке при небольших x .

Для решения этой задачи был применен метод типа Галеркина¹. Возможность применения этого метода и единственность решения поставленной задачи доказаны в работе [3].

Применимость метода Бубнова — Галеркина к решению задач гидродинамической устойчивости была показана Г. И. Петровым [4].

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n a_i(t) \chi_i(x, y) \left(\chi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \text{ и при } x \rightarrow \infty \right) \quad (4)$$

Здесь $\{\chi_i\}$ — полная система функций, удовлетворяющая условиям, указанным в скобках; Γ — граница, области Ω .

Систему $\{\chi_i\}$ выберем в виде произведений функций двух систем

$$\{(1 - y^2)^2 y^{k-1}\} \quad (k = 1, 3, 5, \dots), \quad \{x^2 e^{-mx}\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

каждая из которых полна в своем измерении в классе функций, удовлетворяющих указанным граничным условиям; по переменной y рассматриваются возмущения только с четной функцией тока.

Применение метода Бубнова — Галеркина приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\sum_{i=1}^n \frac{da_i}{dt} \int_{\Omega} \Delta \chi_i \chi_m d\Omega + \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} L_1(\chi_i) \chi_m d\Omega = \int_{\Omega} f \chi_m d\Omega \quad (m = 1, \dots, n) \quad (5)$$

$$a_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Здесь

$$L_1 \equiv -\frac{1}{R} \Delta \Delta + u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta}{\partial y} + F_1 \frac{\partial}{\partial y} - F_2 \frac{\partial}{\partial x}$$

Правая часть $f(x, y, t)$ в уравнении (1) существенно определяется теми возмущениями на входе в канал (при $x = 0$), которые приносятся свободным потоком. Эти возмущения f_1 и f_2 были получены из решения уравнения, соответствующего уравнению (1) для свободного потока ($u = 1, v = 0$ при $x \leq 0$), которое находилось в виде

$$\Psi(x, y, t) = \exp \left[i\gamma \left(x + \frac{\lambda}{\gamma} ix + \frac{\alpha}{\gamma} t \right) \right] \cos \beta y \quad (6)$$

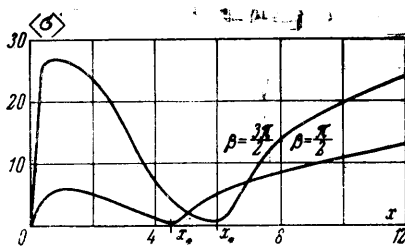
¹ В литературе иногда этот метод называют методом Канторовича или просто методом сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Здесь γ — волновое число, α/γ — фазовая скорость распространения возмущений по x и, следовательно, α — круговая частота, λ/γ — коэффициент нарастания возмущений вдоль x и, наконец, коэффициент β определяет длину волны по y для приносимых в канал возмущений. Для того чтобы (6) было решением соответствующего уравнения, необходимо существование определенных зависимостей $\lambda = \lambda(R, \alpha, \beta)$ и $\gamma = \gamma(R, \alpha, \beta)$, которые были получены и приняты для расчета. Окончательные выражения для f_1 и f_2 будут следующими:

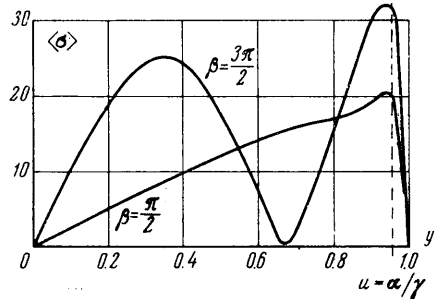
$$f_1(y, t) = \operatorname{Re}[\Psi |_{x=0}] = \cos \alpha t \cos \beta y$$

$$f_2(y, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} \right] = -(\lambda \cos \alpha t + \gamma \sin \alpha t) \cos \beta y \quad (7)$$

Параметры R , α и β — независимые и могут задаваться произвольно. Для определенности выберем такие значения круговой частоты α , при которых возмущения



Фиг. 1



Фиг. 2

по теории Линя [1] для пограничного слоя на плоской пластинке являются наиболее опасными для заданного числа Рейнольдса R . Тогда α , естественно, будет функцией числа R

$$\alpha = \frac{\beta_r h}{U_0} = \frac{\beta_r v h U_0}{U_0^2 v} = \beta_{r*} R \quad \left(\beta_{r*} = \frac{\beta_r v}{U_0^2} = 3 \cdot 10^{-4} \right) \quad (8)$$

Здесь β_r — размерная круговая частота, и β_{r*} — наиболее опасная частота по Линю.

Численный расчет задачи был проведен на ЭВЦМ «Стрела» в Вычислительном центре МГУ для шестнадцати «приближающихся» функций системы $\{\chi_i\}$ в выражении (4). Кроме компонент скорости

$$u'(x, y, t) = \partial \psi / \partial y, \quad v'(x, y, t) = -\partial \psi / \partial x$$

возмущающего движения, вычислялась также функция

$$\sigma(x, y, t) = \left(\frac{u'^2 + v'^2}{[\max_{y,t} |u'(0, y, t)|]^2 + [\max_{y,t} |v'(0, y, t)|]^2} \right)^{1/2} \quad (9)$$

Поведение этой функции $\sigma(x, y, t)$ дает возможность следить за изменением энергии поля возмущений.

В работе [2] описывается поведение σ в зависимости от x вблизи стенки (при $y = 0.9$) в различные моменты времени t . Непосредственно у входа (примерно до $x = 2.5$), согласно приведенным в [2] результатам, наблюдаются нерегулярные выбросы σ с последовательно уменьшающейся амплитудой; затем, начиная с некоторого критического значения $x = x_*$, функция σ резко возрастает. Это значение x_* , постоянное для всех моментов времени t , следует считать точкой потери устойчивости.

В данной работе на фиг. 1 приведена более общая зависимость $\langle \sigma \rangle$ от x при $y = 0.9$ для $R = 10^4$, $\beta = 1/2\pi$ и $\beta = 3/2\pi$. Здесь $\langle \sigma \rangle$ — среднее за достаточно большой интервал времени t (от 0 до 18) значение функции σ . Такой же характер зависимости $\langle \sigma \rangle$ от x получен и при других y для различных значений параметра β . Обнаружено, что независимо от β наибольшее возрастание σ происходит в окрестности $y = 0.9$. Это значит, что с увеличением x энергия поля возмущений концентрируется вблизи стенок, на некотором расстоянии от них. На фиг. 2 приведено распределение функции поперек канала уже после потери устойчивости ($x = 18 > x_*$, $R = 10^4$, $\beta = 1/2\pi$ и $\beta = 3/2\pi$). Концентрация энергии поля возмущений происходит при $y = 0.94$, т. е. на расстоянии $0.06 h$ от стенки.

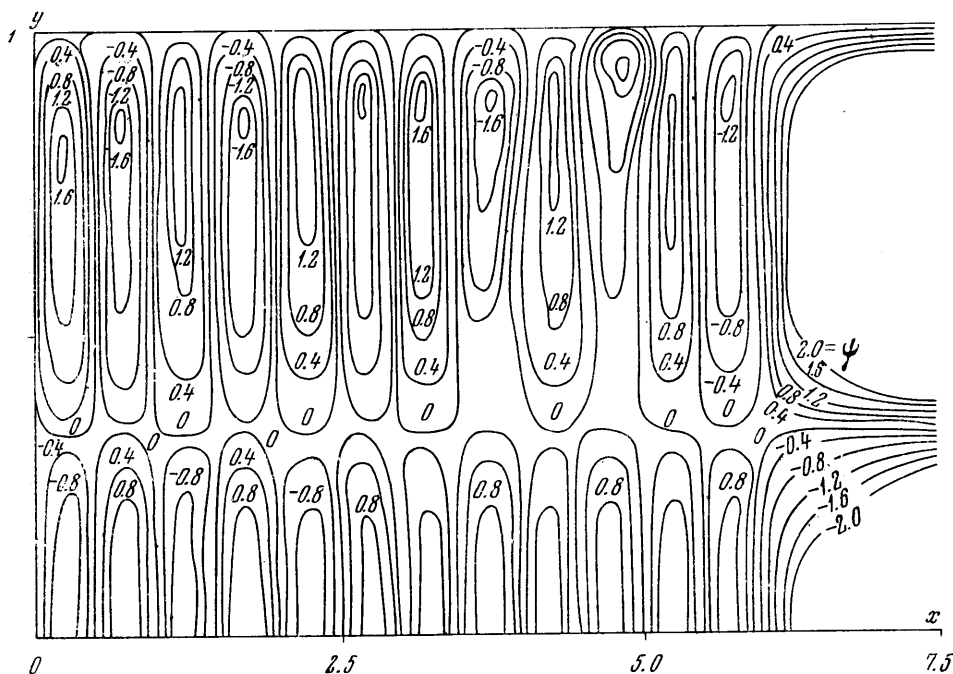
Для сравнения полученных количественных характеристик потери устойчивости с классическим результатом Линя [1] для плоской пластинки, подтвержденным опытами Шубаэара и Скэрмстеда, воспользуемся следующей формулой пересчета числа Рейнольдса

$$R' = \frac{U\delta^*}{\nu} = \frac{0.28673 U}{\nu} 6 \left(\frac{\nu x}{h} \right)^{1/2} = 0.28673 \cdot 6 \sqrt{R} \left(\frac{x}{h} \right)^{1/2} \quad (10)$$

Как видно из фиг. 1, $x_* = 4.5 h$ и $x_* = 6 h$ для $\beta = 1/2\pi$ и $\beta = 3/2\pi$, соответственно. Критические числа Рейнольдса, вычисленные по толщине вытеснения δ^* , согласно (10), соответственно, будут

$$R_{*'} = 365 \text{ и } R_{*'} = 420$$

По Линю для пограничного слоя на плоской пластинке $R_{*'} = 420$, т. е. результаты хорошо согласуются с результатами Линя.



Фиг. 3

Наибольшие амплитуды колебаний в пограничном слое на плоской пластинке у Линя достигаются на расстоянии $y/\delta = 0.245$ от стенки. Необходимый для сравнения пересчет можно провести по формуле

$$\frac{y}{\delta} = \frac{y}{6 \sqrt{\nu x/U}} = \frac{y}{6 \sqrt{\nu/Uh} \sqrt{x/h}} = \frac{(y/h) \sqrt{R}}{6 \sqrt{x/h}} \quad (11)$$

Результат пересчета дает

$$\frac{y}{\delta} = \frac{0.06 \cdot 10^2}{6 \sqrt{18}} = 0.236$$

Таким образом, и здесь получаем хорошее совпадение с результатами Линя для плоской пластинки.

Количественные сравнения абсолютных значений компонент скорости u' и v' дают основание утверждать, что значительный вклад в распределение энергии поля возмущений, характеризуемой функцией $\sigma(x, y, t)$, дает продольная компонента скорости возмущающего движения. После потери устойчивости при $x > x_*$ абсолютная величина u' резко возрастает для всех $t > 0$ так же, как и $\sigma(x)$, в то время как v' по абсолютной величине убывает. Знание функции $\psi(x, y, t)$ в виде формулы (4) позволяет построить картину линий тока возмущающего движения жидкости для различных моментов времени t .

На фиг. 3 в качестве иллюстрации изображена такая картина линий тока по всей ширине канала (от оси симметрии $y = 0$ до стенки канала $y = 1$) для $\beta = 3/2\pi$ при $t = 6$. Здесь в соответствии с выбором β для заданных на входе возмущений, образуется три ряда вихрей, которыми представляется возмущающее движение жидкости, примерно до x_* . После потери устойчивости вихревой характер возмущающего движения нарушается, энергия поля возмущений резко возрастает, здесь линейная постановка задачи, по-видимому, неприменима. Представленная на фиг. 3 картина линий тока характерна для всех моментов времени t .

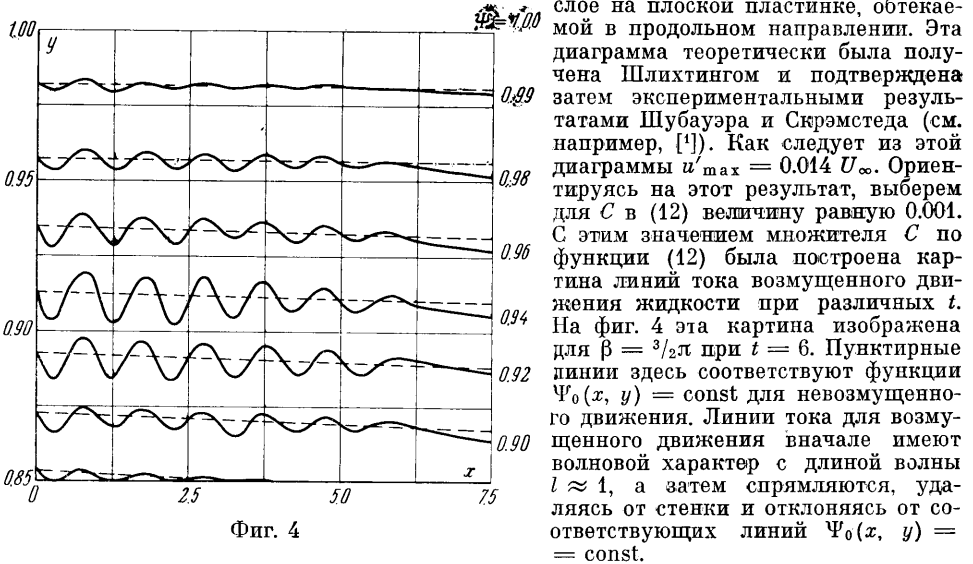
Для построения картины линий тока суммарного возмущенного движения жидкости необходимо из каких-либо соображений задать величину произвольного множителя C , с точностью до которого в рамках линейной постановки определяем функцию тока $\psi(x, y, t)$ поля возмущений. Тогда функция тока Ψ общего возмущенного движения жидкости будет равна

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, y) + C\psi(x, y, t) \quad (12)$$

Здесь $\Psi_0(x, y)$ — функция тока основного, стационарного течения, которая в рассматриваемом случае, согласно выражению (3) для $u(x, y)$, имеет вид

$$\Psi_0(x, y) = \frac{1}{2}y(3 - y^2) - \frac{15}{32}y \left(1 - \frac{16}{15}y^2 + \frac{1}{15}y^{32} \right) \exp\left(-\frac{100x}{R}\right)$$

Для определения множителя C воспользуемся диаграммой распределения амплитуды пульсации u' для нейтральных возмущений в ламинарном пограничном слое на плоской пластинке, обтекаемой в продольном направлении. Эта диаграмма теоретически была получена Шлихтингом и подтверждена



Фиг. 4

Пользуясь полученным из фиг. 4, значением l , можно определить α/γ — фазовую скорость распределения возмущений по x . Предполагая, что по крайней мере, в начале рассматриваемого интервала по x частота возмущений α (а следовательно, и период T) не изменяется и остается такой же как в набегающем потоке (это предположение всегда делается в теории гидродинамической устойчивости параллельных течений), получаем

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi/\gamma}{\alpha/\gamma} = \frac{l}{\alpha/\gamma}$$

Отсюда скорость распространения возмущений

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{l}{T} \approx 0.47$$

В соответствии с этим значением на фиг. 2 пунктиром отмечен критический слой, где $u = \alpha/\gamma$.

Следует заметить, что полученная здесь величина скорости распространения возмущений α/γ , как и картина линий тока на фиг. 4, зависит от произвола выбора множителя C в формуле (12). По результатам Толмина [5] скорость распространения нейтральных возмущений с наиболее опасной частотой в пограничном слое на плоской пластинке равна $0.43 U_{\infty}$, а по Шэню [6] — $0,37 U_{\infty}$.

Итак, количественные характеристики потери устойчивости, полученные в данной работе для существенно двумерного основного течения, достаточно хорошо совпадают с известными результатами Линя и других авторов для течения в пограничном слое на плоской пластинке, которое считалось параллельным. Это дает основание при определении критических характеристик устойчивости в пограничном слое не учитывать зависимость профиля скорости стационарного движения жидкости от координаты x .

Поступило 1 XII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Комаров А. М. О развитии возмущений течения вязкой жидкости в плоском канале. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
3. Комаров А. М. Применение метода типа Галеркина для исследования развития возмущений течения вязкой жидкости в плоском канале. Вестн. Моск. ун-та, сер. матем. механ. астроном., 1959, № 2.
4. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, нов. серия, 1940, т. 4, вып. 3.
5. Tollmien W. Über die Entstehung der Turbulenz, Ges. Wiss. Cöttingen, Math. Phys., 1929, klasse Nachr., pp. 21—44.
6. Shen S. F. Calculated amplified oscillations in the plane poisenille and blassius flow. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 1, pp. 62—64.

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

В. Н. ГУСЕВ, А. В. ЖБАКОВА

(Москва)

Одномерные стационарные течения вязкого, теплопроводного газа рассматривались ранее в ряде работ. В случае стока, например, этим исследованиям посвящены работы [1, 2]. В работе [1] задача решалась в предположении, что коэффициенты вязкости μ и теплопроводности k постоянны, а число Прандтля имеет некоторое фиксированное значение. В работе [2] решение для плоского стока строится в двух случаях. В первом предполагается, что газ вязкий, но нетеплопроводный ($\mu = \text{const}$, $k = 0$), а во втором — невязкий, но теплопроводный ($\mu = 0$, $k = \text{const}$). В данной работе исследуется течение от сферического стока при конечном значении давления на бесконечности в предположении, что коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры по степенному закону, число Прандтля постоянно.

1. Система одномерных уравнений Навье — Стокса для вязкого теплопроводного газа в случае сферической симметрии имеет вид

$$\rho ur^2 = \text{const}$$

$$\rho u \frac{du}{dr} + \frac{dp}{dr} = \frac{4}{3} \mu \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} \right] + \frac{4}{3} \frac{d\mu}{dr} \left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right]. \quad (1.1)$$

$$r^2 \left[\rho u \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} RT + \frac{u^2}{2} \right) - \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{RT}{\sigma} + u^2 \right) + \frac{2}{3} \frac{\mu u}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right] = \text{const}$$

Здесь u — скорость газа, ρ , p , T — соответственно, плотность, давление и температура, r — расстояние от центра симметрии, μ — коэффициент вязкости, R — газовая постоянная, κ — отношение удельных теплоемкостей, σ — число Прандтля.

Система (1.1) замыкается заданием уравнения состояния и зависимостью коэффициента вязкости от температуры. В нашем случае

$$p = \rho RT, \quad \mu \sim T^n \quad (1.2)$$

Приведем систему (1.1) и (1.2) к безразмерному виду. Введем следующие размерные константы: $Q = 4\pi \rho_0 r_0^2$ — расход газа, p_∞ , ρ_∞ , T_∞ , μ_∞ — значения давления, плотности, температуры и коэффициента вязкости при $r = \infty$. Безразмерные величины определим следующим образом

$$w = \frac{u}{\sqrt{\kappa RT_\infty}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{RT_\infty}{p_\infty} \rho, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty} \quad (1.3)$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty} = \theta^n, \quad y = \frac{l}{r} = \left[\frac{|Q| \sqrt{\kappa RT_\infty}}{4\pi \kappa p_\infty} \right]^{1/2} \frac{1}{r}$$