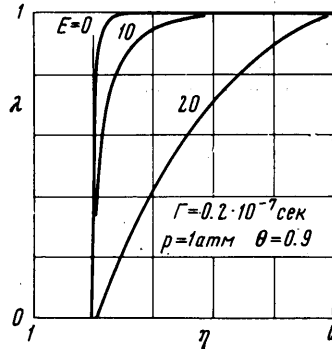


быть значительно больше предельного, а ударная волна располагается недалеко от тела.

Фиг. 9 иллюстрирует влияние величины энергии активации E на распределение концентрации λ вдоль луча $\theta = 0.9$ для условий $p_1 = 1 \text{ атм}$, $q = 1.2$, $\Gamma = 0.2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$. Количественно на всю картину течения влияние роста E эквивалентно увеличению Γ .

Отметим, что при скоростях набегающего потока, когда происходит воспламенение смеси, в адиабатических течениях имеет место приближенный закон подобия. Форма тела при больших сверхзвуковых скоростях мало влияет на течение в окрестности оси симметрии. Очевидно, аналогичным свойством будут обладать течения горючей смеси. Поэтому полученные численные результаты можно использовать в окрестности оси симметрии для случая обтекания горючей смесью затупленного тела произвольной формы. Нужно лишь выбрать эффективный размер сферы, эквивалентной заданному телу (см. [6]). Для несильно затупленных тел, таких как эллипсоиды с отношением вертикальной полуоси к горизонтальной $\delta \leq 2$, в качестве эффективного размера может быть взят радиус кривизны тела в критической точке.

В заключение автор благодарит Г. Г. Черного, под руководством которого выполнена настоящая работа.



Фиг. 9

НИИ механики МГУ

Поступило 4 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание сферы горючей смесью газов с учетом времени задержки воспламенения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
2. Fichett W., Wood W. W. Flow calculation for pulsating one-dimensional detonations. Phys., Fluids, 1966, vol. 9, No. 5.
3. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
4. Белоцерковский О. М., Душин В. К. Влияние неравновесной диссоциации на обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, № 5.
5. Запрянов З. Д., Миносцев В. Б. Метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
6. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 5.

ОБ ОДНОМЕРНОМ НЕРАВНОВЕСНОМ ТЕЧЕНИИ ВОЗДУХА

В. П. СТУЛОВ, В. П. ШКАДОВА

(Москва)

Решена задача о стационарном квазиодномерном течении воздуха в трубке тока при наличии неравновесных химических реакций, реакций ионизации и неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы молекулярных компонент. Рассматривается обратная задача: по заданному распределению давления находятся распределения всех других газотермодинамических величин и сечения трубки тока. Применение неявной схемы аппроксимации уравнений позволило провести расчеты во всем диапазоне изменения степени неравновесности — от замороженного состояния до равновесного. Обсуждается характер изменения температуры, колебательных энергий и концентраций компонент вдоль трубки тока. Проведен численный анализ перехода к равновесному течению.

1. Исходные уравнения и метод решения. При идеальном неравновесном обтекании затупленных тел сверхзвуковым потоком состояние газа в критической точке и на поверхности тела в некоторых условиях может сильно отличаться от состояния

газа в ударном слое [1]. Это вызвано наличием особенности в уравнениях, и потому точный расчет параметров на поверхности тела при решении двумерной задачи связан с большими трудностями. В данной работе расчет условий на поверхности проводится при помощи квазиодномерной модели течения в трубке тока, исходящей из критической точки. Давление на поверхности тела слабо зависит от неравновесных процессов, поэтому решалась обратная задача: по заданному распределению давления определяются распределения других параметров и сечение трубки тока.

Стационарное неравновесное течение в трубке тока описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \rho u F = \text{const}, \quad \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \quad u^2 + \frac{h}{h_0} = 1 \\ p = \frac{\rho T}{2h_0 m}, \quad u \frac{d\gamma_i}{dx} = \sigma_i, \quad u \frac{de_{vi}}{dx} = \omega_{vi}, \quad h = h(T, \gamma_i, e_{vi}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} u = \frac{u'}{V_{\max}}, \quad T = \frac{T'}{T_\infty}, \quad \rho = \frac{\rho'}{\rho_\infty}, \quad p = \frac{p'}{\rho_\infty V_{\max}^2}, \quad m = \frac{m'}{m_\infty} \\ h = \frac{h' m_\infty}{RT_\infty}, \quad \gamma_i = \gamma_i' m_\infty, \quad e_{vi} = \frac{e_{vi}'}{RT_\infty}, \quad x = \frac{x'}{R_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Индекс ∞ относится к условиям перед отошедшей ударной волной, индекс o — к критической точке $x = 0$, R_0 — радиус кривизны обтекаемого тела при $x = 0$, F — площадь поперечного сечения трубки тока.

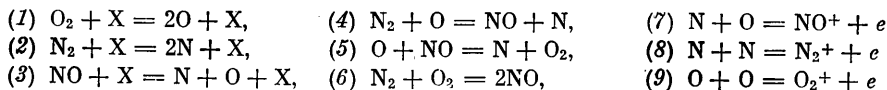
Распределение давления, необходимое для решения системы (1.1), задается из решения задачи обтекания [1] в виде полинома

$$p = \sum_i p_i^o x^{2i} \quad (1.3)$$

Начало трубки тока $x=0$ совпадает с критической точкой. Известно [1], что в этой точке газ находится в полном термодинамическом равновесии. Состояние газа определяется заданной энтальпией торможения h_0 и давлением P_0 , которое находится из (1.3). Начальная скорость $u_0 = 0$.

В такой постановке сечение трубки тока F можно найти после решения задачи из первого уравнения (1.1).

Модель неравновесного воздуха полностью взята из работы [1]. Учитывались следующие химические реакции и реакции ионизации:



Кроме того, считается, что молекулярные колебания N_2 и O_2 возбуждаются неравновесно. Напомним, что скорости образования компонент $\sigma_i = \sum_j v_{ij} \omega_j$, здесь ω_j —

скорости химических реакций. В свою очередь, ω_j представим в виде произведения $\omega_j = \varphi_j \omega_j^*$, где φ_j — константа скорости реакции, а ω_j^* включает константу равновесия и зависит от концентраций компонент. В равновесии $\omega_j^* = 0$. Аналогичные выражения можно записать для скоростей возбуждения ω_{vi} .

Степень неравновесности течения зависит от параметра

$$a_j = \frac{R_0}{V_{\max}} \frac{\rho_\infty}{m_\infty} \varphi_j^*$$

где φ_j^* — некоторое характерное значение константы скорости j -й реакции; a_j входят множителями в коэффициенты φ_j . Для данного газа φ_j^* фиксированы; $a_j = 0$ соответствует замороженному течению, при $a_j \rightarrow \infty$ течение становится равновесным. Расчеты проводились при различных R_0 , так что параметры a_j менялись во всем диапазоне.

Комбинируя второе, третье, четвертое и седьмое уравнения (1.1), получим уравнение для определения T :

$$h_0^{-1} dh / dx - \rho^{-1} dp / dx = 0 \quad (1.4)$$

Тогда пятое и шестое уравнения (1.1) и (1.4) образуют замкнутую систему относительно неизвестных T, γ_i, e_{vi} .

Известно [2, 3], что при численном интегрировании релаксационных уравнений при помощи явных разностных схем решение может стать неустойчивым. Приближенное условие устойчивости решения можно записать так:

$$\Delta x \max(a_j) < 1 \tag{1.5}$$

Для околоравновесных течений a_j достаточно велики, так что (1.5) приводит к необходимости сильного уменьшения шага интегрирования.

Как было показано в [2, 3], применение неявных схем полностью снимает эту трудность. В данной работе использовалась трехточечная разностная схема

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_0} \frac{h_{m+1} - h_{m-1}}{2\Delta x} &= (1-s) \frac{1}{\rho_{m-1}} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{m-1} + \frac{s}{\rho_{m+1}} \left(\frac{dp}{dx} \right)_{m+1} \tag{1.6} \\ u_m \frac{\gamma_{i,m+1} - \gamma_{i,m-1}}{2\Delta x} &= \sum_j v_{ij} \varphi_{j,m} [(1-s)\omega_{j,m-1}^* + s\omega_{j,m+1}^*] \\ u_m \frac{e_{vi,m+1} - e_{vi,m-1}}{2\Delta x} &= \varphi_{vi,m} [(1-s)\omega_{vi,m-1}^* + s\omega_{vi,m+1}^*] \end{aligned}$$

Порядок аппроксимации (1.6) при $s \neq 1/2$ соответствует $o(\Delta x)$. При $s = 1/2$ точность повышается $o(\Delta x^2)$. При $s = 0$ имеем явную схему.

Уравнения (1.6) представляют собой систему трансцендентных уравнений относительно параметров в $m + 1$ -й точке. Эта система решалась методом Ньютона.

Состояние газа в нулевой (критической) точке определялось из условий равновесия $\omega_j^* = 0, \omega_{vi}^* = 0$ при заданных p_0 и h_0 . Уравнения для расчета первой точки (двухточечная схема) получаются из (1.6) в результате подстановки: $m - 1 \rightarrow m, 2\Delta x \rightarrow \Delta x, s = 1$ ($m = 0$). Таким образом, предполагается, что в сечении $x = \Delta x$ имеет место полное равновесие, но при другой температуре, нежели в сечении $x = 0$.

2. Свойства неравновесного течения в трубке тока. Рассмотрим прежде всего положение сечения, в котором скорость газа равна скорости звука, при неравновесном расширении. Комбинируя уравнения (1.1), можно записать уравнение энергии в следующих двух (эквивалентных) формах:

$$\frac{dp}{dx} - a_j^2 \frac{d\rho}{dx} + \frac{\rho}{m} a_j^2 \frac{dm}{dx} + \rho(\gamma_f - 1) \sum_i \left(h_i \frac{d\gamma_i}{dx} + \gamma_i \frac{de_{vi}}{dx} \right) = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} - a_c^2 \frac{d\rho}{dx} + \frac{\rho a_e^2}{m} \frac{d(m - m_e)}{dx} + \rho(\gamma_e - 1) \sum_i \left[h_i \frac{d(\gamma_i - \gamma_{ie})}{dx} + \right. \\ \left. + \gamma_i \frac{d(e_{vi} - e_{vie})}{dx} \right] = 0 \tag{2.2} \end{aligned}$$

Здесь a_j, γ_f и a_e, γ_e — замороженные (f) и равновесные (e) скорости звука и отношения теплоемкостей, γ_{ie}, e_{vie} и m_e — локально равновесные значения концентраций, колебательных энергий и молекулярного веса. Далее, исключая производные p и ρ из первых двух уравнений и любого из уравнений (2.1), (2.2), получим уравнение обращения воздействия в двух формах (производные заменены дифференциалами)

$$\frac{du}{u} (1 - M_j^2) + \frac{dF}{F} + \frac{dm}{m} + \frac{\gamma_f - 1}{a_j^2} \sum_i (h_i d\gamma_i + \gamma_i de_{vi}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{du}{u} (1 - M_e^2) + \frac{dF}{F} + \frac{d(m - m_e)}{m} + \frac{\gamma_e - 1}{a_e^2} \sum_i [h_i d(\gamma_i - \gamma_{ie}) + \gamma_i d(e_{vi} - e_{vie})] = 0 \tag{2.4}$$

Для выяснения роли химических реакций концентрации γ_i удобно заменить степенями развития химических реакций ξ_j . Определим ξ_j при помощи уравнений

$$u \frac{d\xi_i}{dx} = \omega_i \tag{2.5}$$

Так как $u \frac{d\gamma_i}{dx} = \sum_j v_{ij} \omega_j$, то $d\gamma_i = \sum_j v_{ij} d\xi_j$.

Легко убедиться, что

$$\sum_i h_i d\gamma_i = - \sum_j \Delta h_j d\xi_j \quad (2.6)$$

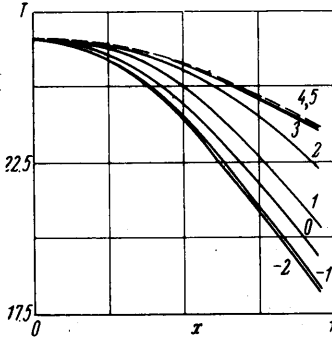
где Δh_j — тепловой эффект j -й реакции. $\Delta h_j > 0$ для реакций, идущих с выделением тепла, $\Delta h_j < 0$ в случае поглощения тепла. Окончательно, уравнение обращения воздействия запишется в виде

$$\frac{du}{u}(1 - M_j^2) + \frac{dF}{F} + \frac{dm}{m} + \frac{\gamma_f - 1}{a_f^2} \left(\sum_i \gamma_i de_{vi} - \sum_j \Delta h_j d\xi_j \right) = 0 \quad (2.7)$$

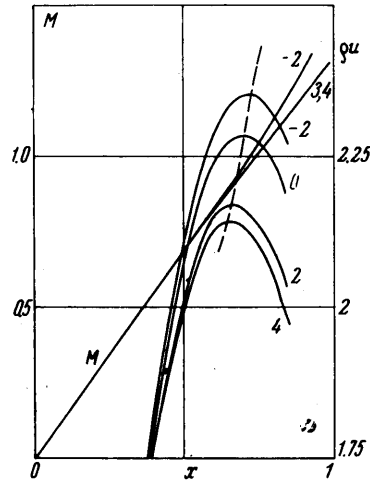
или

$$\frac{du}{u}(1 - M_e^2) + \frac{dF}{F} + \frac{d(m - m_e)}{m} + \frac{\gamma_e - 1}{a_e^2} \left[\sum_i \gamma_i d(e_{vi} - e_{vie}) - \sum_j \Delta h_j d(\xi_j - \xi_{je}) \right] = 0 \quad (2.8)$$

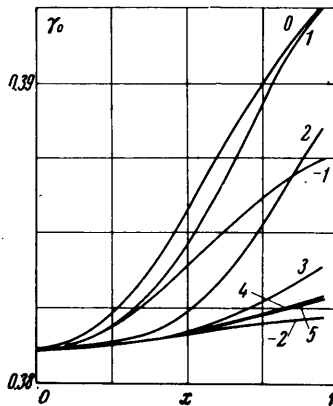
Во-первых, из (2.7) следует, что в замороженном течении ($dm = de_{vi} = d\xi_j = 0$) в минимальном сечении ($dF = 0$) $M_j = 1$, а из (2.8) видно, что при полном равновесии ($e_{vi} = e_{vie}$, $\xi_j = \xi_{je}$, $m = m_e$), в сечении $dF = 0$, $M_e = 1$. Далее, если в неравновесном течении преобладают процессы, идущие с выделением тепла, как в случае дезактивации колебательных степеней свободы и реакции рекомбинации ($\Delta h_j > 0$, $dm < 0$), то в



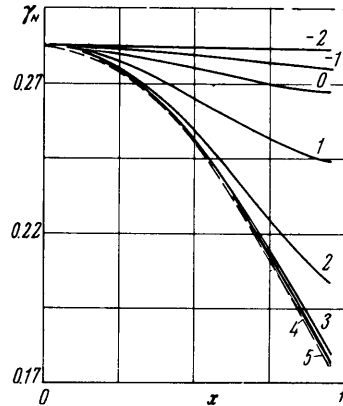
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

(2.7) все члены с дифференциалами неравновесных параметров отрицательны и условие $M_j = 1$ выполняется при $dF > 0$, т. е. ниже минимального сечения. Для $j = 1$

этот результат был получен, например, в работе [4]. Этот факт подтверждается расчетом. Из фиг. 2 следует, что точка с $M_f = 1$ лежит ниже то течению от точки максимума ρ_i ($dF = 0$) и по мере перехода течения от замороженного к равновесному удаляется от минимального сечения.

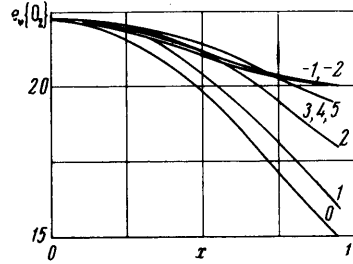
С другой стороны, из (2.8) следует, что в случае выделения тепла сечение с $M_e = 1$ лежит выше максимального, так как члены с дифференциалами неравновесных параметров положительны. Покажем это на примере последнего слагаемого. Так как расширение происходит из начального равновесного состояния ($\xi_j = \xi_{je}$), то $\xi_j - \xi_{jo} < \xi_{je} - \xi_{jo}$ и это неравенство при увеличении x усиливается, так как состояние стремится к замороженному. Отсюда следует, что $d(\xi_j - \xi_{je}) < 0$.

Для неравновесных течений, в которых преобладают реакции с поглощением тепла, ситуация меняется на противоположную: сечение с $M_f = 1$ лежит выше минимального, а с $M_e = 1$ — ниже.

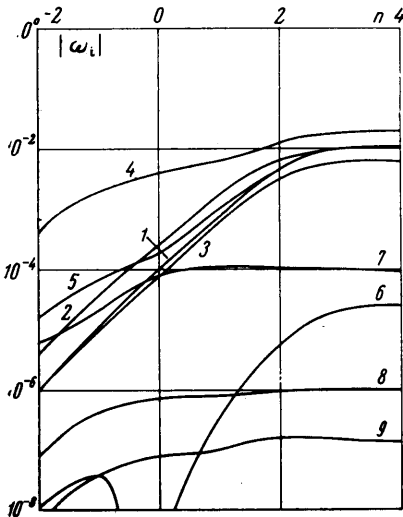
Расчеты неравновесного течения воздуха в трубке тока были проведены для условий, соответствующих обтеканию сферы радиуса R_0 потоком газа с $M_\infty = 18$, $P_\infty = 0.01$ атм, $T_\infty = 250^\circ$ К.

Отсутствие равновесия в течении при заданном давлении сильно влияет на распределение термодинамических переменных и состава (фиг. 1—5) и гораздо слабее на скорость. Влияние на площадь поперечного сечения трубки тока $F = \text{const } \rho^{-1} u^{-1}$ (фиг. 2) также достаточно сильное. Это говорит о том, что в прямой задаче (с заданным контуром) неравновесность может заметно влиять и на давление, и на скорость (номера кривых на фиг. 1—5 равны порядку характерного размера $R_0 = 0.15 \cdot 10^n$ см).

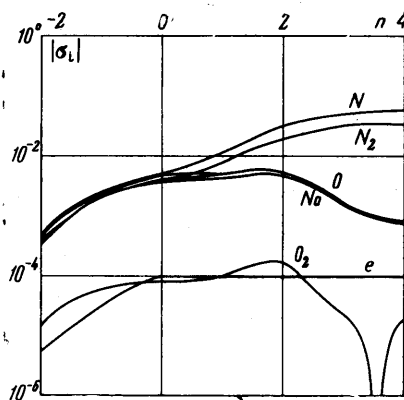
Значение температуры в любом сечении трубки тока монотонно увеличивается при переходе от замороженного течения к равновесному (фиг. 1). Монотонный характер имеет также изменение скорости, плотности и числа Маха (фиг. 2). Однако изменение релаксирующих параметров (колебательных энергий и концентраций) имеет более сложный характер. Рассмотрим вначале колебательные энергии (фиг. 5). При увеличении R_0 колебательная энергия в любом



Фиг. 5



Фиг. 6



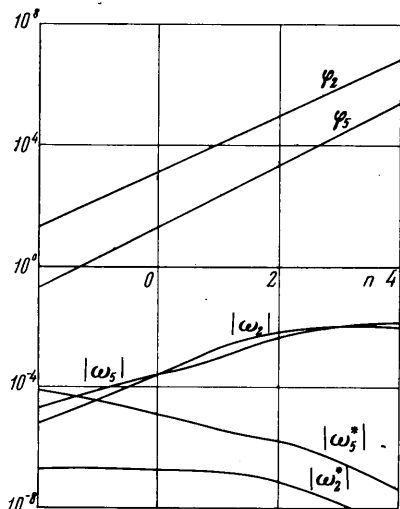
Фиг. 7

сечении уменьшается, так как происходит дезактивация колебательных степеней свободы. Поскольку скорость колебательной релаксации выше скоростей химических реакций, колебательное равновесие наступает при меньших R_0 , нежели химическое. При дальнейшем увеличении R_0 температура продолжает расти, вместе с ней возрастает и колебательная энергия, которая теперь имеет локально равновесное значение и определяется только температурой, а не кинетикой процесса дезактивации.

Немонотонное изменение с увеличением R_0 всех концентраций компонент диссоциированного и ионизованного воздуха (кроме $\gamma(N_2)$ и $\gamma(N)$) объясняется сложным характером протекания химических реакций. В частности, немонотонное изменение ионизованных компонент можно так же, как и в случае колебательных энергий, объяснить более высокой скоростью рекомбинации пар ион-электрон.

Как и следовало ожидать, в расширяющемся газе главными являются бинарные реакции, а среди них — реакции обмена, так как реакции диссоциации требуют высоких энергий. Избыток атомарного кислорода (фиг. 3) и недостаток NO (относительно замороженного и равновесного пределов) можно объяснить именно преобладающей ролью обменных реакций.

Указанную выше неоднозначную связь между концентрациями компонент и параметром неравновесности следует иметь в виду при анализе экспериментальных данных по неравновесному расширению газов в соплах.



Фиг. 8

Проведенная серия расчетов позволяет изучить характер перехода к равновесному течению с увеличением R_0 . Скорости реакций (1—9) и скорости образования компонент в сечении $x = 0.95$, в зависимости от n ($R_0 = 0.15 \cdot 10^n$ см) приведены на фиг. 6 и 7. Из расчетов следует, что при малых R_0 (замороженный предел) ω_j и σ_j стремятся к нулю. В равновесном пределе все параметры течения принимают некоторые стационарные значения, соответствующие равновесному расширению; колебательные энергии равны своим равновесным значениям, а концентрации определяются законами Гильдберга — Вааге. При этом скорости реакции ω_j и скорости образования компонент σ_j стремятся к некоторым постоянным, отличным от нуля значениям (фиг. 6, 7). Напомним, что скорость j -й реакции можно представить в виде $\omega_j = \varphi_j \omega_j^*$. На фиг. 8 на примере реакций (2) и (5) при $x = 0.95$ показано поведение каждого множителя при переходе к равновесию $\varphi_j \rightarrow \infty$, $\omega_j^* \rightarrow 0$, так, что их произведение $\rightarrow \text{const} \neq 0$. Отсюда следуют два вывода: во-первых, абсолютное значение скорости реакции ω_j в переменном течении не позволяет

судить о близости j -й реакции к равновесию, для этого надо рассматривать величину ω_j^* ; во-вторых, пятое и шестое уравнения (1.1) в равновесии нельзя использовать для определения соответствующих переменных, поскольку их правые части обращаются в неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Используемая в данной работе неясная схема фактически представляет собой способ раскрытия этой неопределенности.

НИИ механики МГУ

Поступило 10 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Стулов В. П., Теленин Г. Ф. Неравновесное обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Галун Н. С., Крайко А. Н. К расчету неравновесных течений. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
3. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчет неравновесных течений в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. Брей. Рекомбинация атомов в соплах аэродинамических труб. Сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., Изд-во иностр. лит., 1962.